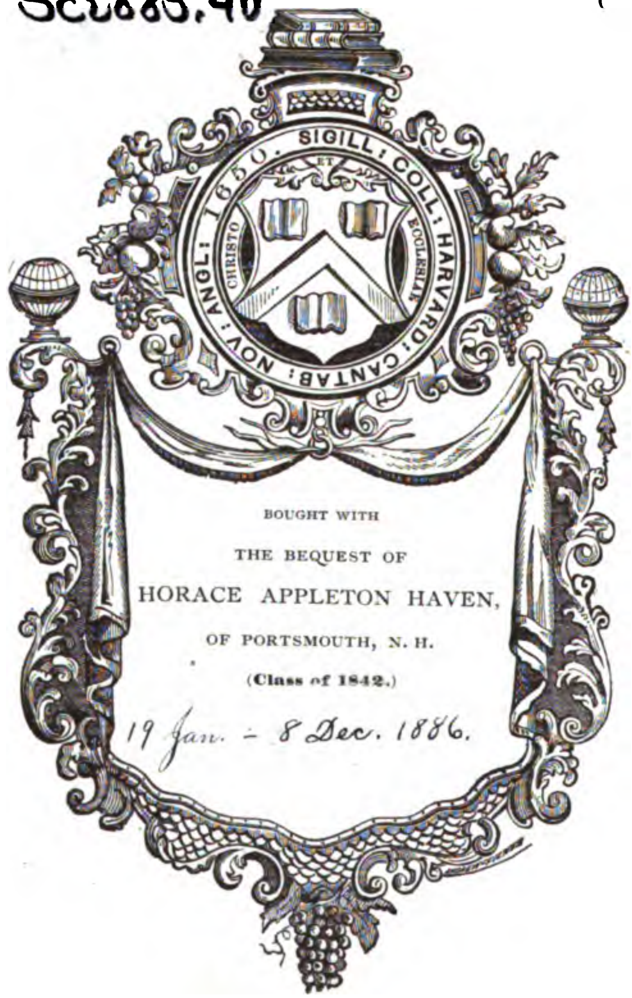


19 Jan. - 8 Dec. 1886.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXXI. Jahrgang.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1886.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mechanik und Physik.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

31. Jahrgang. 1. Heft.

Mit einer lithographirten Tafel.

Ausgegeben am 22. December 1885.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1886.

I.

Ueber die Realitätsverhältnisse der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung.

Von

Dr. Carl Hossfeld

in Apolda.

Die Resultate der vorliegenden Untersuchung sind nicht neu; sie sind in einer Abhandlung von Zeuthen: Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre (Mathem. Annalen Bd. VII), ausgesprochen. Dennoch dürfte es nicht uninteressant, sondern vielmehr vielleicht nothwendig sein, jene Resultate, welche die Realität der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung betreffen, aus einer andern Quelle nochmals herzuleiten.

Den Ausgangspunkt dieser Herleitung bildet eine an räumliche Vorstellungen anknüpfende Erzeugungsweise der genannten Curven; es erscheinen die Geraden der Ebene auf sämmtliche Regelflächen zweiter Ordnung abgebildet, welche ein Ebenenbüschel dritter Ordnung berühren, die Tangenten und Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung insbesondere auf diejenigen Regelflächen, welche eine feste Fläche zweiten Grades einfach, bezw. doppelt berühren. Aus der Natur der letzteren, sowie aus der Realität ihrer dem Ebenenbüschel dritter Ordnung angehörenden Tangentialebenen ergeben sich dann fast ohne Weiteres die bekannten Resultate.

I.

1. Der Ort der Punkte einer Ebene ε, deren Verbindungslinien mit den entsprechenden Punkten einer zu ε in collineare Beziehung gesetzten Ebene ε' eine feste Fläche zweiten Grades φ^2 berühren, ist eine Curve c^4 vierter Ordnung.

Durchläuft ein Punkt P die Gerade g in ε, der entsprechende Punkt P' also die Gerade g' in ε', so beschreibt die Verbindungslinie PP' im Allgemeinen ein Hyperboloid η^2, ihr Schnittpunkt mit der Polarebene von P bezüglich φ^2 aber eine Raumcurve dritter Ordnung, welche φ^2 ausser in den Schnittpunkten dieser Fläche mit g noch in vier Punkten trifft. Die durch diese letzteren vier Punkte hindurchgehenden Erzeugenden von η^2 berühren φ^2 und fixiren auf g die Punkte einer Curve c^4, welche hiernach von der vierten Ordnung ist.

2. **Die Curve c^4 ist unter Voraussetzung der allgemeinsten Form collinearer Verwandtschaft zwischen ε und ε' von der zwölften Classe und hat achtundzwanzig Doppeltangenten.**

Aus Nr. 1 ist klar, dass jeder Geraden g in ε im Allgemeinen ein Hyperboloid η^2 zugehört, nämlich dasjenige, welches sie mit der entsprechenden Geraden g' erzeugt; im Besondern wird dieses Hyperboloid in eine eine Curve zweiter Classe enthaltende Doppelebene η ausarten, sobald g mit g' in eine Ebene zu liegen kommt, und die Gesammtheit dieser Doppelebenen bildet ein Ebenenbüschel dritter Ordnung ϱ^3, welches von allen eigentlichen Hyperboloiden η^2 berührt wird. Mit anderen Worten: die Flächen η^2 und η bilden eine Schaar von doppelter Unendlichkeit (η^2, η). Vier Erzeugende einer jeden Fläche berühren im Allgemeinen die φ^2 und bestimmen auf der in ε liegenden zugehörigen Geraden g die vier Punkte der Curve c^4. Wenn es nun eintritt, dass eine Fläche der Schaar (η^2, η) die φ^2 berührt, in welchem Falle zwei berührende Erzeugende in einer einzigen zusammenfallen, so müssen auf der zugehörigen Geraden g zwei Curvenpunkte in einem zusammenfallen, d. h. g ist Tangente der c_4. Einer Fläche der Schaar (η^2, η), welche φ^2 einfach berührt, gehört also eine Tangente von c^4 an; in gleicher Weise gehört einer die φ^2 doppelt berührenden Fläche oder aber einer dieselbe einfach berührenden Doppelebene der Schaar (η^2, η) in ε eine Doppeltangente von c^4 an. Wenn es sich nun darum handelt, die Classe der Curve c^4, d. h. die Anzahl der durch einen beliebig gewählten Punkt P der Ebene ε hindurchgehenden Tangenten, und ferner die Anzahl ihrer Doppeltangenten zu bestimmen, so ist es einleuchtend, dass diese Bestimmung auf die Beantwortung folgender beiden Fragen hinauskommt:

Wieviel Flächen der Schaar (η^2, η), welche die Ebenen des Büschels PP' zu Tangentialebenen haben, berühren die Fläche φ^2?

Wieviel Flächen der Schaar (η^2, η) berühren φ^2 doppelt, bezw. — im Fall einer Doppelebene — einfach?

Es gewinnen nun unsere Ausführungen an Uebersichtlichkeit, wenn wir statt der in Betracht kommenden Gebilde die ihnen bezüglich φ^2 polar gegenüberstehenden ins Auge fassen. Wir haben es dann mit zwei collinear verwandten Ebenenbündeln E und E' und mit sämmtlichen Regelflächen η^2 und Kegeln $\varkappa^2$ zu thun, welche durch die von E und E' erzeugte Raumcurve dritter Ordnung r^3 hindurchgehen. An Stelle der Curve vierter Ordnung c^4 in der Ebene ε tritt jetzt ein Kegel vierter Classe γ^4, dessen Tangentialebenen durch Projection der die φ^2 berührenden Sehnen von r^3 aus dem Punkte E erhalten werden. Jedem Hyperboloid η^2 resp. jedem Kegel $\varkappa^2$ des Bündels (r^3) (wie wir von nun an die Gesammtheit der durch r^3 hindurchgehenden η^2 und $\varkappa^2$ bezeichnen wollen) entspricht ein durch E gehender Strahl g, nämlich die durch E mögliche Gerade des andern Systems, resp. der durch E mögliche Kegelstrahl; die vier Erzeugenden der Fläche

aus dem Bündel, welche φ^2 berühren, lassen sich mit g durch die vier in g sich schneidenden Tangentialebenen an γ^4 verbinden. Berührt nun eine Fläche des Bündels (r^3) die φ^2 einfach, so schneiden sich in der zugehörigen Geraden g nur drei Tangentialebenen: g ist Kegelstrahl; berührt die Fläche aber φ^2 doppelt, so reducirt sich die Zahl der Tangentialebenen auf zwei: g ist Doppelstrahl des Kegels γ^4. Es fragt sich jetzt: Durch r^3 und durch die in einer beliebig von E ausgehenden Ebene π liegende Sehne s lassen sich wieviel Flächen zweiter Ordnung legen, welche die Fläche φ^2 berühren? und: Durch r^3 lassen sich wieviel Flächen zweiter Ordnung legen, welche φ^2 doppelt berühren?

Beschäftigen wir uns zunächst mit der ersten Frage. Bekanntlich schneiden sich die Polarebenen eines Punktes R in Bezug auf sämmtliche Flächen zweiter Ordnung eines Büschels in einer geraden Linie p, welche also durch zwei Polarebenen im Allgemeinen völlig bestimmt ist, insbesondere ist p in der Tangentialebene des Punktes R an die durch R hindurchgehende Fläche des Büschels gelegen. Berührt nun die Fläche χ^2 des Büschels (r^3, s) die feste Fläche zweiter Ordnung φ^2 im Punkte R, so enthält die Polarebene von R bezüglich φ^2 die zu R gehörige Gerade p, in welcher sich die Polarebenen dieses Punktes bezüglich aller Flächen des Büschels schneiden. Sucht man daher den Ort des Punktes zu bestimmen, dessen Polarebene bezüglich (r^3, s), d. h. bezüglich zweier beliebigen Flächen dieses Büschels, und ferner bezüglich φ^2 in einer geraden Linie sich schneiden, so enthält derselbe sicher auch die Berührungspunkte von φ^2 mit Flächen des Büschels (r^3, s). Dieser Ort nun ist eine Raumcurve sechster Ordnung r^6, da die Polarebenen der Punkte einer beliebigen Ebene bezüglich dreier Flächen zweiter Ordnung, indem sie collineare Bündel darstellen, sechsmal in geraden Linien sich schneiden.* Weil aber r^6 die Fläche φ^2 in zwölf Punkten trifft, so giebt es im Büschel (r^3, s) zwölf die φ^2 berührende Flächen, welche die Ebene Es in den zwölf Kegelstrahlen von γ^4 schneiden.

Noch einfacher gestaltet sich die Beantwortung der zweiten Frage. Zunächst sei erwähnt, dass die Flächen des Bündels (r^3) die φ^2 in Curven vierter Ordnung schneiden, welche sämmtlich durch die sechs der φ^2 und r^3 gemeinsamen Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 hindurchgehen. Eine im eigentlichen Sinne doppelt berührende Fläche des Bündels (r^3) wird φ^2 in einer zerfallenden Curve vierter Ordnung mit zwei wirklichen Doppelpunkten, den Berührungspunkten treffen; diese zerfallende Curve vierter Ordnung kann aber nur entweder aus einem Kegelschnittpaare, oder im Falle, dass φ^2 geradlinig ist, aus einer Raumcurve dritter Ordnung mit Sehne bestehen. Solche Curven haben wir also durch die Punkte 1 ... 6 auf der Fläche φ^2, welche wir als Regelfläche voraussetzen, zu legen. Die Kegelschnittpaare ergeben sich unmittelbar. Indem wir z. B. mit 123 denjenigen Kegelschnitt bezeichnen,

* Reye, Die Geometrie der Lage, II, 2. Aufl., S. 216.

welcher in der durch 1, 2 und 3 hindurchgehenden Ebene gelegen ist, haben wir folgende zehn zerfallende Curven:

123	456	135	246
124	356	136	245
125	346	145	236
126	345	146	235
134	256	156	234,

in welchen φ^2 von zehn Flächen des Bündels (r^3) doppelt berührt wird.

Aber auch die Raumcurven mit je einer Sehne lassen sich leicht überblicken.

Bekanntlich* können durch fünf Punkte einer Regelfläche zweiter Ordnung φ^2 auf dieser im Allgemeinen zwei Raumcurven dritter Ordnung gelegt werden derart, dass die eine, durch einen beliebigen sechsten Flächenpunkt gehende Erzeugende von φ^2 für die eine, die andere durch denselben Punkt gehende Erzeugende für die andere Raumcurve eine Sehne ist. Hiernach erhalten wir zwölf, nämlich sechs Paar Raumcurven dritter Ordnung mit Sehnen:

1 — 23456	4 — 56123
2 — 34561	5 — 61234
3 — 45612	6 — 12345,

wobei z. B. mit 1 — 23456 die beiden durch die Punkte 2, 3, 4, 5, 6 möglichen Raumcurven nebst ihren von 1 ausgehenden Sehnen bezeichnet sein sollen.

Entsprechend haben wir weiterhin zwölf doppelt berührende Flächen des Bündels.

Aber damit sind noch nicht alle Flächen von (r^3) erschöpft, welche zu Doppelstrahlen des Kegels γ^4 Veranlassung geben. Im weiteren Sinne als doppelt berührende Fläche ist jeder Kegel zweiter Ordnung zu betrachten, dessen Spitze in einem der sechs Punkte 1 ... 6 gelegen ist, da φ^2 nur von zwei Erzeugenden eines solchen Kegels berührt wird. Wir bezeichnen die sechs Curven, in denen φ^2 von jenen Kegeln geschnitten wird, wie folgt:

$\dot{1}23456$	$\dot{4}56123$
$\dot{2}34561$	$\dot{5}61234$
$\dot{3}45612$	$\dot{6}12345$,

wobei z. B. $\dot{1}23456$ die Curve vierter Ordnung durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit einem wirklichen Doppelpunkte in 1 bezeichnen soll.

Somit haben wir $10 + 12 + 6 = 28$ Flächen des Bündels (r^3) gewonnen, von denen jede einen durch E laufenden Doppelstrahl des Kegels γ^4 als Erzeugende enthält; letzterer ist also von der zwölften Ordnung und hat 28 Doppelstrahlen, oder c^4 ist von der zwölften Classe und hat 28 Doppeltangenten.

---

* Reye, *l. c.* S. 93.

3. **Haben die beiden collinear verwandten Punktfelder ε und ε' einen Punkt D ihrer Schnittlinie entsprechend gemeinsam, so ist derselbe ein Doppelpunkt der Curve vierter Ordnung c^4, und diese ist von der zehnten Classe und besitzt sechszehn Doppeltangenten.**

Legt man durch D in ε eine beliebige Gerade g, so erzeugt dieselbe mit der ebenfalls durch D gehenden entsprechenden Geraden g' in ε' zwei Strahlbüschel erster Ordnung, deren eines sein Centrum in D selbst hat Von den vier die Fläche φ^2 berührenden Strahlen beider Strahlbüschel treffen mithin zwei die Gerade g in D, wodurch dieser in Anbetracht der willkürlichen Annahme von g als Doppelpunkt der Curve c^4 charakterisirt ist.

Wir knüpfen nun unsere Betrachtungen wieder an die collinearen Ebenenbündel E und E' an, welche jetzt eine Ebene δ entsprechend gemeinsam haben. Das Erzeugniss, d. h. der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen, ist ein durch E und E' hindurchgehender, in der Ebene δ gelegener Kegelschnitt k^2 und eine denselben in einem Punkte R schneidende Gerade a.

Um die Ordnung des Kegels γ^4 zu bestimmen, nehmen wir wieder eine Ebene π durch E beliebig an und untersuchen, wieviel Flächen zweiter Ordnung von allen, welche durch k^2, a und die in der Ebene π gelegene Sehne s hindurchgehen, mit anderen Worten, wieviel Flächen des Büschels (k^2, a, s) die φ^2 berühren. Die Berührungspunkte wurden in Nr. 2 als die Schnittpunkte einer Raumcurve sechster Ordnung r^6 gefunden, welche der Ort der Punkte im Raume ist, deren Polarebenen bezüglich φ^2 durch die Polaren bezüglich des Büschels (r^3, s) hindurchgehen. Im vorliegenden Falle hat sich die r^6 in eine Raumcurve fünfter Ordnung r^5 und eine Gerade r gespalten, welche die Schnittlinie der Ebene δ mit der Ebene as ist; offenbar sind die Polarebenen eines beliebigen Punktes Q von r bezüglich der Flächen des Büschels (k^2, a, s) sämmtlich mit der durch die Polare q von Q bezüglich k^2 und den Punkt as möglichen Ebene ω identisch, und es entspricht somit jeder Punkt der Linie r der Bedingung, welche die Punkte der r^6 erfüllen. Die Schnittpunkte von φ^2 und r können aber deshalb nicht Berührungspunkte von Flächen des Büschels (k^2, a, s) sein, weil die durch einen dieser Schnittpunkte hindurchgehende Fläche des Büschels in ein Ebenenpaar zerfällt. Demnach haben wir nur noch zehn in den Schnittpunkten von φ^2 und r^5 berührende Flächen, welche π in den zehn Kegelstrahlen des Kegels γ^4 schneiden.

Nehmen wir an, φ^2 werde von k^2 in den vier Punkten 1, 2, 3, 4, von a in 5 und 6 getroffen, so gehen durch folgende zerfallende Curven:

123	456	5 — 61234	$\dot{1}23456$
124	356	6 — 12345	$\dot{2}34561$
134	256		$\dot{3}45612$
234	156		$\dot{4}56123$

nicht mehr eigentliche Hyperboloide oder Kegel des Bündels (k^2, a), sondern es sind Ebenenpaare, weil jede der aufgeführten Curven aus zwei Kegelschnitten besteht, von denen der eine mit dem der Fläche φ^2 und der Ebene δ gemeinsamen identisch ist. Jedes der zwölf Ebenenpaare enthält daher ausser einer andern noch die Ebene δ; da diese aber für γ^4 Doppeltangentialebene ist, so kann keine durch E laufende Erzeugende derselben als Doppelstrahl betrachtet werden. Es kommen mithin nur die folgenden sechszehn zerfallenden Curven und die sie enthaltenden Hyperboloide oder Kegel als solche in Betracht, welchen Doppelstrahlen des Kegels γ^4, bezw. Doppeltangenten der Curve c^4 entsprechen:

125 346		
126 345	1 — 23456	$\dot{5}61234$
135 246	2 — 34561	$\dot{6}12345$
136 245	3 — 45612	
145 236	4 — 56123	
146 235		

4. Haben die beiden collinear verwandten Punktfelder ε und ε' zwei Punkte D_1 und D_2 ihrer Schnittlinie entsprechend gemeinsam, so sind dieselben Doppelpunkte der Curve c^4, und diese ist von der achten Classe und besitzt acht Doppeltangenten.

Dass D_1 und D_2 Doppelpunkte der c^4 sind, beweist man wie in Nr. 3. Für die übrigen Fragen betrachten wir die beiden Ebenenbündel E und E', welche im vorliegenden Falle zwei Ebenen δ_1 und δ_2 ihrer Verbindungslinie entsprechend gemeinsam haben und deren Erzeugniss daher aus der Verbindungslinie $EE' = v$ und zwei die letztere schneidenden zu einander windschiefen Geraden a_1 und a_2 besteht. Eine beliebige in E angenommene Ebene π, welche die beide Geraden a_1 und a_2 schneidende Sehne s enthält, wird von den acht Flächen des Büschels (v, a_1, a_2, s), welche φ^2 berühren, in den acht Kegelstrahlen des Kegels γ^4 geschnitten. Denn es kann nur da eine Berührung der Fläche φ^2 mit einer solchen des Büschels (v, a_1, a_2, s) stattfinden, wo φ^2 von der Curve vierter Ordnung r^4 getroffen wird, welche übrig bleibt, wenn man von der r^6, dem Ort der Punkte, deren Polarebenen bezüglich φ^2 und (v, a_1, a_2, s) in einer geraden Linie sich schneiden, die beiden Verbindungslinien sa_1va_2 und sa_2va_1 absondert, deren Schnittpunkte mit φ^2 nicht Berührungspunkte von Flächen des Büschels sind.

Wird φ^2 von v in den Punkten 1 und 2, von a_1 in 3 und 4, von a_2 in 5 und 6 geschnitten, so entsprechen, wie man leicht erkennt, nur denjenigen Flächen des Bündels (v, a_1, a_2) Doppelstrahlen des Kegels γ^4, welche die folgenden Curven auf φ^2 enthalten:

135 246	145 236
136 245	146 235

1 — 23456

2 — 34561.

Hieraus ergeben sich für γ^4 acht Doppelstrahlen, für c^4 acht Doppeltangenten.

5. Liegen die beiden collinearen Punktfelder ε und ε' in einer Ebene vereinigt, haben sie also drei Punkte D_1, D_2, D_3 entsprechend gemeinsam, so hat die Curve c_4 die letzteren als Doppelpunkte, ist von der sechsten Classe und besitzt vier Doppeltangenten.

Die beiden Ebenenbündel E und E' haben jetzt dasselbe Centrum E und erzeugen als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen die drei Schnittlinien a_1, a_2, a_3 der drei sich selbst entsprechenden Ebenen δ_2, δ_3, δ_1. Die Flächen zweiter Ordnung, welche durch entsprechende Ebenenbüschel g und g' erster Ordnung erzeugt werden, sind sämmtlich Kegel k^2, deren Spitzen im Punkte E liegen, oder Ebenenpaare, und enthalten die drei Geraden a_1, a_2, a_3 als Erzeugende. Legt man durch eine beliebige Gerade g von E, durch die entsprechende g' und durch a_1, a_2, a_3 einen Kegel zweiter Ordnung k^2, so werden die vier Schnittlinien desselben mit dem von E aus an φ^2 möglichen Berührungskegel β^2 mit g durch die vier Tangentialebenen an den Kegel γ^4 verbunden. Die Kegelstrahlen des letzteren in einer beliebigen Ebene π von E findet man, wenn man π mit den Kegeln zweiten Grades zum Schnitte bringt, welche durch die Schnittlinie s der Ebene π und ihrer entsprechenden π', ferner durch a_1, a_2, a_3 hindurchgehen und φ^2 oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Berührungskegel β^2 berühren. Die Raumcurve r^6 besteht in diesem Falle aus den drei Schnittlinien der drei Ebenenpaare $a_1 s\ a_2 a_3$, $a_2 s\ a_1 a_3$, $a_3 s\ a_1 a_2$ und aus einer ebenen Curve r^3 dritter Ordnung in der Polarebene von E bezüglich φ^2. Letztere schneidet φ^2 in den sechs Berührungspunkten von sechs dem Büschel (a_1, a_2, a_3, s) angehörenden Kegeln k^2, welche ihrerseits die Ebene π ausser in s in den sechs Erzeugenden des Kegels γ^4 treffen.

Doppelstrahl des letzteren wird jeder Strahl g sein, welcher mit dem entsprechenden Strahle g' und mit a_1, a_2, a_3 auf einem die Fläche φ^2 doppelt berührenden Kegel zweiter Ordnung liegt, oder umgekehrt: Auf jedem durch a_1, a_2, a_3 hindurchgehenden, φ^2 doppelt berührenden Kegel zweiter Ordnung ist derjenige Strahl g Doppelstrahl des Kegels γ^4, dessen entsprechender g' ebenfalls auf jenem Kegel gelegen ist. Wenn wir nun annehmen, dass φ^2 von a_1 in 1, 2, von a_2 in 3, 4, von a_3 in 5, 6 getroffen wird, so berühren diejenigen Kegel des Bündels (a_1, a_2, a_3) die Fläche φ^2 doppelt, welche diese in den Kegelschnittpaaren:

135	246
136	245
145	236
146	235

schneiden. Wir haben demnach vier Doppelstrahlen des Kegels γ^4, resp. vier Doppeltangenten der Curve c^4.

II.

Für die Realität der Doppeltangenten einer auf die in 1 beschriebene Art erzeugten Curve vierter Ordnung c^4 muss sich ein ausgezeichnetes Criterium aus der Möglichkeit ergeben, bei fortgesetzter Beschränkung der Realität der sechs Punkte $1 \ldots 6$ auf vier, zwei und Null und Combination dieser Fälle mit den Voraussetzungen, dass φ^2 geradlinig oder nicht geradlinig ist, durch die Punkte $1 \ldots 6$ Curven vierter Ordnung mit je einem Doppelpunkte in i $(i = 1 \ldots 6)$ oder mit je einem Paare wirklicher Doppelpunkte zu legen, deren Verbindungslinie reell ist. Dabei können die Curven selbst möglicherweise imaginär werden; sind nichtsdestoweniger die beiden Doppelpunkte einer solchen imaginären Curve reell, so entspricht diesem Falle eine reelle Doppeltangente mit reellen Berührungspunkten; sind dagegen die Doppelpunkte conjugirt imaginär, ihre Verbindungslinie also reell, so bleibt die Doppeltangente zwar reell, aber die Berührungspunkte auf ihr sind conjugirt imaginär.

Wir übertragen im Folgenden die Bezeichnung der zerfallenden Curven vierter Ordnung auf die Verbindungslinien ihrer Doppelpunkte.

6. Die Zahl der reellen Doppeltangenten der c^4 ohne Doppelpunkte kann nur die Werthe 28, 16, 8, 4 annehmen.*

Ist φ^2 geradlinig und sind alle sechs Schnittpunkte derselben mit r^3 reell, so sind nach Nr. 2 alle 28 Doppeltangenten reell. Wir lassen nun die sechs Schnittpunkte paarweise imaginär werden.

a) φ^2 ist Regelfläche.

1. Die Punkte 1 und 2 sind imaginär, ihre Verbindungslinie 12 ist reell. Dann sind reell:

123	456	$3-45612$	$\dot{3}45612$
124	356	$4-56123$	$\dot{4}56123$
125	346	$5-61234$	$\dot{5}61234$
126	345	$6-12345$	$\dot{6}12345$.

Hiernach ist die Zahl der Doppeltangenten $\delta = 4 + 8 + 4 = 16$.

2. Imaginär sind: 1 und 2, 3 und 4;
reell: 12, 34;

reell:	125	346	$5-61234$	$\dot{5}61234$
	126	345	$6-12345$	$\dot{6}12345$.

$\delta = 2 + 4 + 2 = 8$.

---

* Vergl. Zeuthen, Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre. Math. Ann. Bd. VII S. 411.

3. Imaginär sind: 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6;
reell: 12, 34, 56;
reell: 135 246
136 245
145 236
146 235.

$\delta = 4$.

Ist φ^2 nicht geradlinig, dann fallen offenbar alle Raumcurven dritter Ordnung mit Sehnen fort und wir erhalten der Eintheilung unter a) entsprechend:

b) φ^2 ist Nicht-Regelfläche:

1. $\delta = 4 + 4 = 8$;
2. $\delta = 2 + 2 = 4$;
3. $\delta = 4$.

7. Die Zahl der reellen Doppeltangenten der c^4 mit einem Doppelpunkte kann nur die Werthe 16, 8, 4, 0 annehmen.

Es möge wieder φ^2 von k^2 in den vier Punkten 1, 2, 3, 4, von a in 5 und 6 getroffen werden.

a) φ^2 ist Regelfläche:

1. α) Imaginär sind: 1 und 2; reell: 12;
reell: 125 346 — 3 – 45612 — $\dot{5}61234$
126 345 — 4 – 56123 — $\dot{6}12345$.

$\delta = 2 + 4 + 2 = 8$.

β) Imaginär sind: 5 und 6; reell: 56;
reell: 1 – 23456
2 – 34561
3 – 45612
4 – 56123.

$\delta = 8$.

2. α) Imaginär sind: 1 und 2, 3 und 4; reell: 12, 34;
reell: 125 346 — $\dot{5}61234$
126 345 — $\dot{6}12345$.

$\delta = 2 + 2 = 4$.

β) Imaginär sind: 1 und 2, 5 und 6; reell· 12, 56;
reell: 3 – 45612
4 – 56123.

$\delta = 4$.

3. Imaginär sind: 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6; reell: 12, 34, 56;
reell: 135 246
136 245
145 236
146 235.

$\delta = 4$.

b) φ^2 ist Nicht-Regelfläche:

1. α) $\delta = 4$;
   β) $\delta = 0$.
2. α) $\delta = 4$;
   β) $\delta = 0$.
3. $\delta = 4$.

8. Die Zahl der reellen Doppeltangenten der c^4 mit zwei Doppelpunkten kann nur die Werthe 8, 6, 4, 2, 0 annehmen.

Im vorliegenden Falle haben wir die beiden Möglichkeiten zu trennen, dass die Doppelpunkte der c^4 reell oder conjugirt imaginär sind; dem entspricht die Realität oder Imaginarität der beiden Geraden a_1 und a_2. Die Fläche φ^2 möge von v in 1 und 2, von a_1 in 3 und 4, von a_2 in 5 und 6 geschnitten werden.

I. a_1 und a_2 sind reell; $\delta = 8, 4, 0$.

a) φ^2 ist Regelfläche:

1. α) Imaginär sind: 1 und 2; reell: 12.
$\delta = 0$.
   β) Imaginär sind: 3 und 4; reell: 34;
   reell: 1 — 23456
   2 — 34561.
$\delta = 4$.

2. α) Imaginär sind: 1 und 2, 3 und 4; reell: 12, 34.
$\delta = 0$.
   β) Imaginär sind: 3 und 4, 5 und 6; reell: 34, 56;
   reell: 1 — 23456
   2 — 34561.
$\delta = 4$.

3. Imaginär sind: 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6; reell: 12, 34, 56.
$\delta = 4$ (siehe Nr. 7b, 3).

b) φ^2 ist Nicht-Regelfläche:

1. α) $\delta = 0$; β) $\delta = 0$.
2. α) $\delta = 0$; β) $\delta = 0$.
3. $\delta = 4$.

II. a_1 und a_2 sind conjugirt imaginär; $\delta = 6,2$.

a) φ^2 ist Regelfläche:

1. Imaginär sind: 3, 4, 5, 6; reell: 35, 46;
   reell: 135 246 1 — 23456
   146 235 2 — 34561.
$\delta = 2 + 4 = 6$.

2. Imaginär sind: 3, 4, 5, 6, 1 und 2; reell: 12, 35, 46;
   reell: 145 236
   136 245.
$\delta = 2$.

b) φ^2 ist Nicht-Regelfläche:

1. $\delta = 2$; 2. $\delta = 2$.

9. Die Zahl der reellen Doppeltangenten der c^4 mit drei Doppelpunkten kann nur die Werthe 4, 2, 0 annehmen.

Es werde φ^2 von a_1 in 1 und 2, von a_2 in 3 und 4 und von a_3 in 5 und 6 getroffen.

I. a_1 und a_2 sind reell; $\delta = 4,0$.

1. Imaginär sind: 1 und 2; reell: 12.

$\delta = 0$.

2. Imaginär sind: 1 und 2, 3 und 4; reell: 12, 34.

$\delta = 0$.

3. Imaginär sind: 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6; reell: 12, 34, 56.

$\delta = 4$.

II. a_1 und a_2 sind conjugirt imaginär; $\delta = 2$.

1. Imaginär sind: 1, 2, 3, 4; reell: 13, 24;

reell: 135 246

136 245.

$\delta = 2$.

2. Imaginär sind: 1, 2, 3, 4, 5 und 6; reell: 13, 24 56;

reell: 145 236

146 235.

$\delta = 2$.

Hat demnach eine Curve vierter Ordnung drei reelle Doppelpunkte, so ist die Zahl ihrer reellen Doppeltangenten vier oder Null; sind dagegen zwei Doppelpunkte conjugirt imaginär, so ist die Zahl der reellen Doppeltangenten jederzeit zwei.

Apolda, 18. September 1885.

II.

Zur graphisch-mechanischen Auflösung numerischer Gleichungen.

Von

Prof. Dr. C. Reuschle

in Stuttgart.

Erster Artikel.

Im Anschluss an meine Brochure über „Graphisch-mechanische Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen" (Stuttgart, Ostern 1884) habe ich im Herbst 1885 unter dem Titel: „Graphisch-mechanischer Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen" die Tafeln veröffentlicht, welche zur Behandlung der cubischen (und quadratischen) Gleichungen in diesem Sinne nöthig sind. In der Brochure ist gezeigt, wie die numerischen Gleichungen II. bis V. Grades (einschliesslich) nach einheitlichem Princip graphisch-mechanisch gelöst werden können und wie die Methode auch auf defecte (bezw. „mehrfach reducirte", vergl. Anm. 4) Gleichungen höheren Grades anwendbar ist.

Das allgemeine Princip ist das bekannte, schon vielfach angewandte, die Wurzeln einer Gleichung mit Hilfe der Schnittpunkte zweier Curven zu bestimmen. Während aber die bisher bekannten Methoden geometrische Constructions- bezw. graphische Probirmethoden sind, wie z. B. die von *Lalanne*[1]), liefert meine Methode die Wurzeln der numerischen Gleichungen II. bis V. Grades, und zwar alle reellen Wurzeln auf einmal, durch eine directe (nicht probirende), einfache, mechanische Manipulation mittels ein-für allemal angefertigter graphischer Tafeln.

Das specielle Princip besteht darin, dass eine auf durchsichtigem Papier (Pauspapier, Gelatinepapier) gezeichnete Curve, bezw. Curvenschaar über einer andern auf Millimeterpapier entworfenen Curvenschaar gemäss den Werthen gewisser Coefficienten der Gleichung eingestellt wird, um dann mit einem Blicke zu übersehen, wieviele reelle Wurzeln eine gegebene Gleichung hat, und um dieselben als Abscissen der Durchschnittspunkte der

1) Vergl. *Lalanne*, „Mémoire sur les tables graphiques et sur la géométrie anamorphique etc." in Annales des Ponts et Chaussées 1846, Tome XI pag. 1; ferner Comptes rendus, T. LXXXI pag. 1186 und 1243.

(bezw. einer) Curve des durchsichtigen Papiers und einer der Curven des Millimeterpapiers auf zwei bis drei Stellen näherungsweise abzulesen.

In der Begleitschrift des „Apparats“ ist die Methode für die Gleichungen III. (und II.) Grades in einer auch für den Nichtmathematiker leicht fasslichen Weise klargelegt. Unter Voraussetzung der Bekanntschaft mit den allerersten Elementen der Geometrie und Algebra wird Derjenige, der nicht einmal eine quadratische Gleichung algebraisch auflösen kann, ja nicht einmal Etwas von Quadrat- oder Cubikwurzel weiss, in den Stand gesetzt, sogleich die allgemeine cubische Gleichung mit Zahlencoefficienten graphisch-mechanisch aufzulösen und die Methode theoretisch zu verstehen.

Die zur Auflösung der Gleichungen IV. und V. Grades nöthigen, sowie die weiteren in dieses Gebiet fallenden, in der Brochure erwähnten graphischen Tafeln bleiben einer späteren Veröffentlichung vorbehalten.

Zweck der gegenwärtigen Zeilen ist, zu zeigen, wie der bisher veröffentlichte Apparat auch zur Auflösung der Gleichungen IV. Grades benutzt werden kann, wobei übrigens sogleich erwähnt sein mag, dass dieses Verfahren hinter der in der Brochure S. 25 hierfür gegebenen Methode sowohl in Betreff der Einfachheit der Ausführung, als in Betreff der praktischen Brauchbarkeit etwas zurücksteht. Immerhin dürfte auch diese Methode Beachtung verdienen, einmal weil der Apparat, wie er bis jetzt vorliegt, auch auf die biquadratischen Gleichungen anwendbar ist, das andere Mal, weil ein neues Princip zur Anwendung kommt.

Der Apparat besteht erstens aus der Hyperbelschaar II. Ordnung $xy = p$, welche für $p = 1, 2, 3, \ldots$ bis $p = 50$, ferner für $p = 0{,}1, 0{,}2, \ldots$ bis $p = 0{,}9$, für $p = 1{,}5,\ 2{,}5,\ 3{,}5,\ 4{,}5$, endlich für $p = 0{,}01$ und $0{,}05$ auf Millimeterpapier lithographirt ist; zweitens aus der auf Gelatinepapier gedruckten Parabel II. Ordnung $y = x^2$, welch' letztere in bestimmter Weise auf ersterer durch doppelte Parallelverschiebung entlang den Coordinatenaxen eingestellt wird, um dann die reellen Wurzeln einer allgemeinen numerischen Gleichung III. Grades als Abscissen der Schnittpunkte der Parabel mit einer der Hyperbeln abzulesen, während für eine quadratische Gleichung die Wurzeln als Abscissen der Schnittpunkte der in derselben Weise eingestellten Parabel mit der x-Axe des Millimeterpapieres sich ergeben, worüber des Näheren die citirten Schriften zu vergleichen sind.

Durch Einführung von *Liniencoordinaten* kann nun auch eine numerische Gleichung IV. Grades mittels dieses Apparates in Verbindung mit einem Lineal gelöst werden. In Liniencoordinaten ist die Gleichung der Hyperbelschaar:

$$uv = \frac{1}{4p} \quad (p \text{ willkürlicher Parameter}),$$

die Gleichung der Parabel:

$$4v = u^2,$$

wenn u und v die negativen reciproken Werthe der Axenabschnitte einer veränderlichen Tangente der Curve sind. Wird die Parabel um α parallel zur $+x$-Axe und um β zur $+y$-Axe verschoben, so lautet ihre Gleichung[2]):

$$4v(\alpha u + \beta v + 1) = u^2$$

oder

$$u^2 - 4\alpha uv - 4\beta v^2 - 4v = 0.$$

Das v-Eliminat[3]) des Systems:

$$\left\{ \begin{aligned} u^2 - 4\alpha uv - 4\beta v^2 - 4v &= 0 \\ uv &= \frac{1}{4p} \end{aligned} \right\}$$

giebt die in u biquadratische Gleichung

$$u^2 - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{4p^2u^2} - \frac{1}{pu} = 0$$

zur Bestimmung der u der gemeinschaftlichen Tangenten an die dem Werthe p entsprechende Hyperbel und an die „um α, β parallel-verschobene" Parabel. Führt man in die letzte Gleichung an Stelle von u den Axenabschnitt x einer gemeinschaftlichen Tangente beider Curven ein, indem man

$$u = -\frac{1}{x}$$

setzt, so erhält man:

---

2) Der Satz von der parallel-verschobenen Curve für Punktcoordinaten ist: Die Gleichung $f(x-\alpha, y-\beta) = 0$ stellt die um α parallel zur $+x$-Axe und um β parallel zur $+y$-Axe verschobene Curve $f(x, y) = 0$ dar, während die in Liniencoordinaten gegebene Curve $\varphi(u, v) = 0$, in derselben Weise parallel verschoben, als Gleichung hat:

$$\varphi\left(\frac{u}{\alpha u + \beta v + 1}, \frac{v}{\alpha u + \beta v + 1}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi(\widetilde{u, v, \alpha u + \beta v + 1}) = 0,$$

wo die Wellenlinie über den Argumenten andeuten soll, dass die Function homogen in denselben ist; also: Die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten, mit $(\alpha u + \beta v + 1)$ homogen gemacht, giebt die Gleichung der um α bezw. β parallel-verschobenen Curve. Z. B. die so verschobene Ellipse $a^2u^2 + b^2v^2 = 1$ hat die Gleichung

$$a^2u^2 + b^2v^2 = (\alpha u + \beta v + 1)^2.$$

3) An Stelle der Ausdrucksweisen: „Eliminationsresultat von x aus zwei Gleichungen in x", ferner „Eliminationsresultat von x und y aus drei Gleichungen in x und y" u. dergl. schlage ich die kürzere und bequemere Bezeichnung: „x-*Eliminat zweier Gleichungen in* x", bezw. „x, y-*Eliminat dreier Gleichungen in* x *und* y" vor. Bei der in der letzten Anmerkung eingeführten Bezeichnungsweise $f(\widetilde{x, y, z})$ für eine homogene algebraische Function mit drei Veränderlichen wäre für das Eliminationsresultat der drei homogenen Veränderlichen aus zwei solchen Gleichungen zu sagen:

$$\widetilde{x, y, z}\text{-}\textit{Eliminat des Systems} \left\{ \begin{aligned} f(\widetilde{x, y, z}) = 0 \\ g(\widetilde{x, y, z}) = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Die linke Seite des Eliminats aus einem System heisst Resultante des Systems.

$$\frac{\beta}{4p^2}x^4 - \frac{1}{p}x^3 + \frac{\alpha}{p}x^2 = 1$$

zur Bestimmung der Axenabschnitte der gemeinschaftlichen Tangenten beider Curven.

Identificirt man die letzte Gleichung mit der einfach-reducirten[4]) Gleichung IV. Grades

$$(*) \qquad ax^4 + bx^3 + cx^2 = 1,$$

so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten p, α und β:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\beta}{4p^2} &= a \\ -\frac{1}{p} &= b \\ \frac{\alpha}{p} &= c \end{aligned}\right\}, \quad \text{woraus} \quad \left\{\begin{aligned} p &= -\frac{1}{b} \\ \alpha &= pc = -\frac{c}{b} \\ \beta &= 4p^2 a = \frac{4a}{b^2} \end{aligned}\right\}.$$

Ist nun irgend eine gegebene numerische Gleichung IV. Grades auf die Form (*) gebracht, so lässt sich dieselbe mit Hilfe des erwähnten Apparates und eines Lineals graphisch-mechanisch folgendermassen lösen:

Man stelle über der Hyperbelschaar auf dem Millimeterpapier die Gelatineparabel so ein, dass ihr Scheitel im Punkte $(pc, 4p^2a)$ oder $\left(-\frac{c}{b}, \frac{4a}{b^2}\right)$ und ihre Axe parallel zur $+y$-Axe liegt, lege das Lineal in die verschiedenen möglichen Lagen einer gemeinschaftlichen Tangente der eingestellten Parabel und derjenigen Hyperbel, deren $p = -\frac{1}{b}$ ist, und lese die Abscissen der Durchschnittspunkte des Lineals mit der x-Axe des Millimeterpapieres als die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung IV. Grades ab.

---

4) Eine Gleichung irgendwelchen Grades, in der sämmtliche Coefficienten beliebige Werthe haben, nenne ich die allgemeinste, eine Gleichung, in der irgend ein Coefficient, insbesondere der des höchsten oder des niedersten Gliedes (des Absolutgliedes) durch Division auf die Einheit gebracht ist, die allgemeine Gleichung. Eine Gleichung, in der durch die bekannte lineare Transformation der Coefficient des zweithöchsten oder des zweitniedersten Gliedes auf Null gebracht ist, nenne ich einfach-reducirte Gleichung. Letztere Reduction wird ausgeführt, indem man die erstere an der Reciprokalgleichung vornimmt, wobei unter Reciprokalgleichung diejenige Gleichung verstanden ist, welche aus einer gegebenen Gleichung hervorgeht, wenn man für die Unbekannte ihren reciproken Werth setzt. In derselben Weise unterscheide ich dann weiter zweifach-, dreifach-reducirte Gleichung.

Beispiele.

1) $$x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 0x + 8 = 0 \text{ oder } -\underset{a}{\tfrac{1}{8}}x^4 - \underset{b}{\tfrac{1}{2}}x^3 - \underset{c}{\tfrac{1}{4}}x^2 = 1,$$

$$p = -\frac{1}{b} = 2, \quad \left.\begin{aligned} \alpha &= pc = 2\,(-\tfrac{1}{4}) = -\tfrac{1}{2} \\ \beta &= 4p^2c = 4.4(-\tfrac{1}{8}) = -2 \end{aligned}\right\}.$$

Man stelle also den Scheitel der Gelatineparabel in den Punkt $(-\frac{1}{2}, -2)$, ihre Axe parallel zur $+y$-Axe und lege das Lineal in die Lagen der gemeinschaftlichen Tangenten der Parabel und der Hyperbel $xy = 2$, alsdann findet man als Abscissen der Durchschnittspunkte des Lineals mit der x-Axe die zwei reellen Wurzeln

$$x_1 = -2 \text{ und } x_2 = -3{,}1;$$

die beiden anderen Wurzeln x_3 und x_4 sind imaginär, da nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten vorhanden sind.

Probe:

	1	4	2	0	8
−2	1	2	−2	4	[0]

, also −2 genaue Wurzel.

Die kubische Gleichung

$$x^3 + 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

giebt nach der Methode in der Brochure oder im Apparat gelöst als einzige reelle Wurzel näherungsweise −3,07.

2) $$3x^4 - 8x^3 + 16 = 0 \text{ oder } -\underset{a}{\tfrac{3}{16}}x^4 + \underset{b}{\tfrac{1}{2}}x^3 + \underset{c}{0}x^2 = 1,$$

$$p = -\frac{1}{b} = -2, \quad \left.\begin{aligned} \alpha &= pc = 0 \\ \beta &= 4p^2a = -3 \end{aligned}\right\}.$$

Da p negativ ist, hat man die Hyperbeltafel um 90^0 zu drehen, wodurch die Hyperbelzweige in den zweiten und vierten Quadranten kommen; die Hyperbel $xy = -2$ wird alsdann von der mit ihrem Scheitel in den Punkt $(0, -3)$ gestellten Parabel in einem Punkte mit Abscisse 1 berührt, die gemeinschaftliche Tangente in diesem Punkte, welche für zwei zusammenfallende Tangenten gilt, schneidet von der x-Axe die doppelte Abscisse des Berührungspunktes ab, also ist $x_1 = x_2 = 2$ eine Doppelwurzel der Gleichung. Ausserdem giebt es keine (reellen) gemeinschaftlichen Tangenten, die beiden anderen Wurzeln sind also wieder imaginär.

Probe:

	3	−8	0	0	16
2	3	−2	−4	−8	[0]
2	3	4	4	[0]	

}, also ist 2 eine Doppelwurzel.

Die quadratische Gleichung

$$3x^2 + 4x + 4 = 0$$

giebt die imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung.

3) $x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 4 = 0$ oder $-\underset{a}{\tfrac{1}{4}}x^4 - \underset{b}{x^3} + \underset{c}{2{,}5}x^2 = 1$;

$$p = 1; \qquad \alpha = 2{,}5, \quad \beta = -1.$$

Die mit ihrem Scheitel in den Punkt (2,5; −1) gestellte Parabel und die Hyperbel $xy = 1$ haben vier reelle gemeinschaftliche Tangenten, welche näherungsweise als Wurzeln liefern:

$$x_1 = 1{,}5, \quad x_2 = 0{,}8, \quad x_3 = -0{,}5, \quad x_4 = -5{,}7.$$

Probe: Summe der Wurzeln $= -3{,}9$ statt -4.

4) $75x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 8 = 0$ oder $-\underset{a}{\tfrac{75}{8}}x^4 - \underset{b}{5}x^3 + \underset{c}{10}x^2 = 1$;

$$p = 0{,}2; \qquad \alpha = 2, \quad \beta = -1{,}5.$$

Die eingestellte Parabel und die Hyperbel haben wieder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten, welche für die Wurzeln die Näherungswerthe liefern:

$$x_1 = 0{,}7, \quad x_2 = 0{,}4, \quad x_3 = -0{,}3, \quad x_4 = -1{,}3.$$

Probe: Summe der Wurzeln $= -0{,}5$ statt $-\frac{40}{75}$ oder $-0{,}53$.

Man beachte, wie leicht das graphisch-mechanische Verfahren in diesem Beispiel die beiden zwischen 0 und 1 nahe bei einander liegenden Wurzeln 0,7 und 0,4 liefert.

Stuttgart, im September 1885.

III.

Eine elementare Betrachtung über Strahlen-congruenzen.

Von

Dr. A. Weiler

in Zürich.

Hierzu Taf. I Fig. 1—5.

Es soll hier mit Hilfe einfacher Sätze über Regelschaaren neuerdings bewiesen werden, dass ein Strahl einer beliebigen Congruenz von zwei unendlich nahen Congruenzstrahlen geschnitten wird. Aus diesem Satze schliesst man, dass die Congruenz aus Doppeltangenten einer gewissen Fläche bestehen muss. Hierauf werden die einfachsten singulären Elemente untersucht; ihre Beziehungen zu jener Fläche (Brennfläche) ergeben sich unmittelbar aus der Vertheilung der zugehörigen Brennpunkte und Brennebenen. — Besteht die Congruenz aus einem einfach unendlichen System von Regelschaaren, so zerfallen die Schnittlinien der aufeinanderfolgenden unter ihnen in gewisse leicht angebbare Curven. — Die singulären Elemente können in unendlicher Anzahl vorhanden sein. In Verbindung damit werden alle Hauptgattungen angegeben, die bei Congruenzen möglich sind.

Die hier abgleiteten Resultate sind zumeist bekannt und es finden sich auch manche der gegebenen Ausführungen theilweise oder ganz in früheren Arbeiten über diesen Gegenstand, namentlich in den Kummer'schen*, bereits vor.

1. Eine Congruenz m^{ter} Ordnung n^{ter} Classe besteht aus ∞^2 Strahlen des Raumes, welche derart stetig vertheilt sind, dass im Allgemeinen durch jeden Punkt des Raumes m derselben gehen und in jeder Ebene deren n liegen. Es sei p eine Gerade, welche nicht der Congruenz angehört; zieht man aus allen ihren Punkten P die hindurchgehenden Congruenzstrahlen, so entstehen die ∞^1 Erzeugenden einer Regelschaar R_p, von denen keine in p fallen kann. Dieselbe Regelschaar enthält alle Congruenzstrahlen, welche in sämmtlichen Ebenen E durch p liegen. Für R_p ist p eine m-fache Leitlinie und eine n-fache Leitdeveloppable; der Grad von R_p ist gleich $m+n$, d. h.: Alle Congruenzstrahlen, welche eine Raumgerade

* Abh. d. Berl. Akad. 1866; Crelle's Journal Bd. 57.

p schneiden, bilden eine Regelschaar R_p, deren Grad gleich ist der Summe aus Ordnung und Classe der Congruenz.

2. Tritt an Stelle der Geraden p ein Congruenzstrahl s, so wird $m+n$ ebenfalls der Grad der zugehörigen Regelschaar R_s sein. Weil aber nunmehr durch P auf s noch $m-1$ Erzeugende der Regelschaar gehen und in E durch s deren $n-1$ liegen, welche nicht in s fallen, so muss jeder Punkt auf s ein $(m+1)$-facher, jede Ebene durch s eine $(n+1)$-fache Tangentialebene sein. Die Berührungspunkte von E (auf s) sind die $n-1$ Schnittpunkte von s mit den $n-1$ in E liegenden Erzeugenden und ausserdem zwei weitere Punkte, die nicht von variabeln Erzeugenden herrühren können, sondern stationäre Punkte sind, in denen alle durch s gehenden Ebenen berühren. Ebenso gehen durch s nothwendig zwei stationäre Tangentialebenen. — Ein stationärer Punkt und eine stationäre Ebene an s können aber nur dann auftreten, wenn eine Erzeugende der Regelschaar in die Leitgerade fällt, genauer gesagt, dieselbe schneidet und ihr unendlich benachbart ist. Hieraus folgt: Jeder Congruenzstrahl wird von zwei unendlich benachbarten Congruenzstrahlen geschnitten.

3. Der Strahl a habe a_1, a_2 zu seinen benachbarten, schneidenden Strahlen. Es bestimmen a und a_1 den Punkt A_1 und die Ebene A_1 (Fig. 1), a und a_2 ebenso den Punkt A_2 und die Ebene A_2. A_1 und A_2 sind die beiden Brennpunkte von a, A_1 und A_2 seine Brennebenen. Von jedem Strahl aus gelangt man durch Drehung um die Brennpunkte, in den zugeordneten Brennebenen, zu den beiden benachbarten, schneidenden Strahlen. Die Anzahl dieser Punkte und Ebenen ist eine doppelt unendliche; alle Brennpunkte erfüllen die Fläche der Brennpunkte und die genannten Ebenen bilden die Fläche der Brennebenen.

Von a aus gehe man in der angegebenen Weise über zu a_1.* Der letztere Strahl hat, mit A_1, A_1 benachbart, den einen seiner Brennpunkte A_{11} und die eine Brennebene A_{11}. Mit Hilfe von A_{11} und A_{11} gelangt man aus a_1 weiter zu a_{11} u. s. w. Hierdurch entsteht eine developpable Regelschaar mit den Erzeugenden a, a_1, a_{11}, ..., der Rückkehrcurve $\mathfrak{a}_{11} = A_1 A_{11} \ldots$ und der Torse $\mathfrak{A}_{11} = \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_{11} \ldots$; $\mathfrak{a}_{11}$ liegt augenscheinlich auf der Fläche der Brennpunkte, welch' letztere von a, a_1, ... in A_1, A_{11}, ... berührt wird.

Ersetzt man in der vorstehenden Betrachtung überall die ersten Brennpunkte durch die zweiten, so ergiebt sich für a als Ausgangsstrahl die zweite developpable Regelschaar a, a_2, a_{22}, ... mit der Rückkehrcurve $\mathfrak{a}_{22} = A_2 A_{22} \ldots$ und der Torse $\mathfrak{A}_{22} = \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_{22} \ldots$ Auch $\mathfrak{a}_{22}$ liegt auf der Fläche der Brennpunkte und es wird diese von a, a_2, ... in A_2, A_{22}, ... berührt.

Für den Strahl a folgt hieraus, dass er die Fläche der Brennpunkte in seinen Brennpunkten berührt, und weil a ein beliebiger Congruenzstrahl

* Die Voraussetzung der Realität der Brennpunkte- und Brennebenenpaare (und der benachbarten, schneidenden Strahlen) ist gestattet, wie die erlangten Resultate zeigen werden.

ist, so folgt: **Alle Congruenzstrahlen sind Doppeltangenten der Fläche der Brennpunkte.**

Weiterhin sind $a, a_1, a_{11}, \dots$ und $a, a_2, a_{22}, \dots$ Schnittlinien consecutiver Tangentialebenen der Fläche der Brennebenen. Diese Strahlen werden daher mit den Ebenen $A_1, A_{11}, \dots$ und $A_2, A_{22}, \dots$ die letztere Fläche je an derselben Stelle berühren. Für a und somit für jeden Strahl folgt: **Die Congruenzstrahlen sind Doppeltangenten der Fläche der Brennebenen.**

Auf $a, a_1, a_{11}, \dots$ $(a, a_2, a_{22}, \dots)$ führe man jetzt die zweiten Brennpunkte ein, nämlich $A_2, A_{12}, \dots$ $(A_1, A_{21}, \dots)$, so werden sie eine Curve $\mathfrak{a}_{12}$ $(\mathfrak{a}_{21})$ bilden, welche auf der Fläche der Brennpunkte gelegen ist. Weil a diese Fläche in A_2 berührt und die Curve $\mathfrak{a}_{12}$ ebenfalls auf ihr gelegen ist, so ergiebt sich die Ebene $(a, A_{12}) = A_1$ als Tangentialebene der Fläche in A_2, ebenso A_{11} als Tangentialebene in A_{12} u. s. f. Hieraus folgt: **Jede Brennebene eines Strahles berührt die Fläche der Brennpunkte in dem einen Brennpunkte dieses Strahles** (A_1 in A_2, A_2 in A_1). — Die duale Schlussweise ergiebt: **Jeder Brennpunkt eines Strahles ist der Berührungspunkt der einen Brennebene des Strahles mit der Fläche der Brennebenen** (A_1 von A_2, A_2 von A_1). Somit sind die Punkte (Ebenen) der Fläche der Brennpunkte zugleich Punkte (Ebenen) der Fläche der Brennebenen; diese beiden Flächen sind **identisch**, daher das Resultat:

Eine Strahlencongruenz hängt im Allgemeinen mit einer Fläche, ihrer Brennfläche, in der Weise zusammen, dass die Congruenzstrahlen Doppeltangenten, die Brennpunkte die zugehörigen Berührungspunkte und die Brennebenen die zugehörigen Tangentialebenen der Fläche sind. Einem Brennpunkte eines Strahles ist allemal die Tangentialebene im andern Brennpunkte desselben Strahles zugeordnet, in der Weise, dass beide einen den Strahl schneidenden unendlich nahen Strahl liefern.

Die Brennfläche enthält alle Punkte des Raumes, von denen zwei unendlich nahe Strahlen ausgehen; zugleich wird sie berührt von allen Ebenen, in welchen zwei Strahlen unendlich nahe liegen.

Um die einem Strahle a unendlich nahen Strahlen zu erhalten,* ersetze man die Brennfläche durch ihre beiden osculirenden Paraboloide in den Brennpunkten und construire ihre gemeinsamen, a unendlich nahen Tangenten.

4. Eine **singuläre Ebene** S enthält unendlich viele Congruenzstrahlen, welche die zugehörige Strahlencurve umhüllen. Fig. 1 giebt eine Anschauung hiervon; man lasse einfach die Torse $\mathfrak{A}_{11}$ zu einer Ebene S werden, $\mathfrak{a}_{11}$ ist alsdann die Strahlencurve. Die Brennfläche enthält diese Curve und

* Vergl. **Weingarten**, Crelle's Journal 98, „Note über die Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels“.

wird längs derselben von den von S verschiedenen Ebenen A_2, A_{12}, ... berührt. In den Brennpunkten A_2, A_{12}, ... wird die Brennfläche von S berührt. Die in der singulären Ebene enthaltene Strahlencurve ist eine Schnittcurve mit der Brennfläche; ausserdem berührt die singuläre Ebene die Brennfläche längs einer gewissen Curve.

Bilden die Strahlen in S einen Büschel, so wird die Strahlencurve zu einem Punkte; die Brennebenen A_2, A_{12}, ... bilden einen Kegel, welcher die Brennfläche in unendlicher Nähe des Büschelscheitels repräsentirt. Wenn y dieser Ebenen mit S zusammenfallen, so ist der Kegel von der Classe $y+1$, er hat alsdann die Büschelebene zur y-fachen Tangentialebene. — Haben x Strahlen des Büschels ihre beiden Brennpunkte (im Scheitel) vereinigt, so berührt die singuläre Ebene die Brennfläche längs einer Curve von der Ordnung $x+1$, welche im Scheitel einen x-fachen Punkt hat.

Ist die Strahlencurve in S von der Classe ν, so giebt es durch jeden Punkt von S noch $m-\nu$ Strahlen, die nicht in S fallen, und hieraus folgt, dass ν höchstens gleich $m-1$ sein darf.

5. Durch einen singulären Punkt S gehen unendlich viele Strahlen a, a_1, a_{11}, ..., welche den zugehörigen Strahlenkegel bilden (Fig. 2). Für alle diese Strahlen fallen die einen Brennpunkte A_1, A_{11}, ... in S, welcher Punkt die unendlich vielen Brennpunkte einer Curve $\mathfrak{a}_{11}$ vertritt. Die Brennebenen A_1, A_{11}, ... sind Tangentialebenen des Strahlenkegels, sie berühren die Brennfläche in den Punkten der Curve $\mathfrak{a}_{12}$. Die übrigen Brennebenen umhüllen einen Kegel vom Scheitel S und weil sie die Brennfläche in S berühren, so folgt: Der vom singulären Punkte ausgehende Strahlenkegel ist ein Berührungskegel an die Brennfläche und durch den singulären Punkt geht diese Fläche in Gestalt eines Kegels. — Die Ordnung eines Strahlenkegels ist höchstens gleich $n-1$.

6. Wie in 2. lässt sich zeigen, dass ein k-facher Congruenzstrahl von $2k$ unendlich nahen Strahlen geschnitten wird. Die Brennpunkte und Brennebenen eines solchen Strahles sind in k Paare gruppirt; in einem Brennpunktepaare A_i, A_k seien A_i, A_k die Tangentialebenen der Brennfläche. Dann liefern A_i, A_k und A_k, A_i ein Paar unendlich naher, schneidender Strahlen. Aber die $2k$ Brennpunkte (Brennebenen) brauchen nicht sämmtlich verschieden zu sein und es wird ein k-facher Strahl die Brennfläche in der Regel in weniger als $2k$ Punkten berühren.

Ist k gleich der Ordnung m der Congruenz, so muss $n>m$ sein, wenn die Congruenz nicht zerfallen soll. Durch einen beliebigen Punkt P dieses Strahles s geht ausser s kein Strahl mehr, während in einer Ebene E durch s noch deren $n-m$ liegen. Die Regelschaar R_s zerfällt nothwendig in Strahlenkegel, deren Scheitel auf s liegen und für welche s je eine m-fache Erzeugende ist. Jeder dieser Kegel enthält k Brennebenen des Strahles s

(Tangentialebenen des Kegels längs s); die zugeordneten Brennpunkte sind im Kegelscheitel vereinigt. Daraus geht hervor, dass R_s in nur zwei solcher Kegel zerfällt. — Für $k=n$ $(m>n)$ zerfällt R_s in zwei Strahlencurven.

7. Die ∞^2 Congruenzstrahlen werden sich in verschiedener Weise zu Systemen von ∞^1 Regelschaaren R zusammenfassen lassen. (Geht z. B. die Leitcurve einer solchen Regelschaar durch singuläre Punkte, so bilden deren Strahlenkegel reducible Theile der Regelschaar.) Der Ort der Brennpunkte der Strahlen von R ist eine Curve, welche im Allgemeinen jeden Strahl in zwei Punkten trifft, und längs dieser Curve berührt R die Brennfläche. Längs derselben Curve haben R und die Brennfläche eine gemeinsame Developpable, bestehend aus den Brennebenenpaaren der Strahlen.

Es seien $R=abc\ldots$ und $R'=a'b'c'\ldots$ zwei unendlich benachbarte Regelschaaren des Systems, beide vom Grade (Range) r. R hat eine Doppelcurve, welche jede ihrer Erzeugenden in $r-2$ Punkten trifft. — Ist a' ein Strahl von R′, welcher a von R unendlich benachbart ist, so schneiden sich a' und R in unendlicher Nähe der $r-2$ Punkte, in denen a die Doppelcurve von R trifft; R′ schneidet somit R in einer der Doppelcurve von R unendlich nahen Curve, und umgekehrt. Ausserdem schneiden sich R und R′ in derjenigen Curve, längs welcher R die Brennfläche berührt; denn R′ muss die beiden irgend einem Strahl von R unendlich nahen, schneidenden Strahlen enthalten.* Hierdurch entstehen für jede Erzeugende von R′ die zwei letzten Schnittpunkte mit R und es folgt: Besteht eine Congruenz aus einem einfach unendlichen System von Regelschaaren, so schneidet jede ihre consecutive in einer mit ihrer Doppelcurve zusammenfallenden Curve** und ausserdem in ihrer Berührungscurve mit der Brennfläche, hierbei abgesehen von den gemeinsamen Erzeugenden beider.

Sind die Regelschaaren vom zweiten Grade, so folgt, dass die Brennfläche ein System von Raumcurven vierter Ordnung (erster Species) enthält.

8. Die Anzahl der singulären Punkte kann eine einfach unendliche werden. Die von ihnen gebildete Curve, die Brenncurve, wird von allen Strahlen geschnitten. Aus jedem Punkte S dieser Curve $\mathfrak{b}$ geht ein Kegel von Strahlen, die ihre einen Brennpunkte in S vereinigt haben. (5.) Die Brennebenen, welche in S die „Brennfläche" berühren, bilden einen Büschel, dessen Axe die Tangente an $\mathfrak{b}$ in S ist. (Fig. 3.) Denn construirt man zu einem Strahle g des Kegels den unendlich nahen, schneidenden Strahl g_2, so schneidet er $\mathfrak{b}$ in dem S unendlich nahen Punkte S^* und die Brennebene G_2 enthält $\overline{SS^*}$. Die so entstehenden Brennebenen sind die ∞^2 Tangentialebenen der Brenncurve; die übrigen Brennebenen, G_1, sind die Tangen-

* Der Strahl a' schneidet a in dem einen Brennpunkte A_1. Ferner schneidet a' den a consecutiven Strahl b von R in B_2.

** Diese Doppelcurve ist eine doppelt zu zählende Schnittcurve beider Flächen.

tialebenen der Strahlenkegel. — Jede Ebene durch $\overline{SS^*}$ wird den Strahlenkegel in mehreren Strahlen schneiden, ebensoviele Paare benachbarter Strahlen sind in dieser Ebene. Die Tangentialebenen der Brenncurve sind also im Allgemeinen mehrfache Brennebenen; ihre Punkte sind unendlich vielfache Brennpunkte.

9. Besitzt eine Congruenz ∞^1 singuläre Ebenen, so sind in denselben alle Strahlen enthalten; sie bilden eine Torse singulärer Ebenen. Fig. 4 giebt zwei consecutive Ebenen A, A* mit ihren Strahlencurven $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^*$; zu einem Strahl g in A sind die beiden benachbarten, schneidenden Strahlen construirt. Die Brennpunkte (G_1), welche die Strahlencurven erfüllen, sind einfache; die anderen (G_2), welche auf den geradlinigen Erzeugenden der Torse liegen, sind ebenso vielfache Brennpunkte, als aus einem Punkte G_2 auf $\overline{AA^*}$ an $\mathfrak{a}$ Tangenten gezogen werden können, die nicht in $\overline{AA^*}$ fallen. Die Ebenen A sind unendlich vielfache, $(gg_2) = \mathrm{G}_2$ dagegen einfache Brennebenen.

10. Die Congruenz kann eine einfach unendliche Anzahl von k-fachen Strahlen enthalten, deren Gesammtheit eine Regelschaar R ist. R berührt die Brennfläche in k Curven, von denen jede die Erzeugenden von R in zwei zugeordneten Brennpunkten schneidet u. s. f. — Ist die Fläche developpabel ($\mathrm{R} = \mathfrak{D}$), so rückt mit jedem der k Brennpunktepaare auf einem Strahl a der eine Brennpunkt in den Schnittpunkt A_1 mit dem consecutiven Strahl b (Fig. 5). Die Ebene $(ab) = \mathrm{A}_1$ ist eine k-fache Brennebene (und b repräsentirt k der a benachbarten, schneidenden Strahlen). Die den Brennpunkten A_2, A_3, ... zugeordneten Brennebenen A_2, A_3, ... berühren die Brennfläche sämmtlich in A_1; sie sind im Allgemeinen von A_1 verschieden und es folgt: Die Rückkehrcurve von $\mathfrak{D}$ ist eine k-fache Curve der Brennfläche und es berührt $\mathfrak{D}$ die Brennfläche in k getrennten Curven, von denen jede die Erzeugenden von $\mathfrak{D}$ in je einem Punkte schneidet. — Bestehen die k-fachen Strahlen aus den Tangenten einer ebenen Curve, so tritt eine einfache Modification ein. Bilden endlich diese Strahlen einen Kegel, so berührt er die Brennfläche in k einzelnen Curven und durch den Kegelscheitel geht die Brennfläche in Gestalt von k getrennten Kegeln.

11. Es lassen sich nun elf Hauptgattungen von Congruenzen unterscheiden. Im allgemeinsten Falle besteht die Congruenz aus Doppeltangenten einer doppelt gekrümmten Brennfläche. Letztere kann ersetzt werden durch eine Brenncurve, welche die Congruenz zu ihrem Secantensystem hat, oder durch eine Developpable singulärer Ebenen, deren Doppeltangenten die Congruenzstrahlen sind. Sechs weitere Gattungen haben eine Brennfläche, welche in zwei Theile zerfällt; jeder dieser Theile ist entweder eine doppelt gekrümmte Fläche, oder eine Brenncurve, oder eine Developpable singulärer Ebenen (so dass die drei genannten Gebilde zu zweien mit Wiederholung zu combiniren sind).

Sind die beiden Theile der Brennfläche ungleicher Art, aber in vereinigter Lage, oder gleicher Art und zugleich unendlich benachbart, so zerfällt die durch sie bestimmte Congruenz im Allgemeinen jedesmal in zwei verschiedene Congruenzen. Die eine davon gehört einer bereits genannten Gattung an und die zweite ist in jedem Falle dieselbe. Sie besteht aus den Tangentenbüscheln einer Fläche in den Punkten einer (einfach oder mehrfach) aufgeschriebenen Curve und es kann die Fläche durch ihre längs jener Curve umschriebene Developpable ersetzt werden u. s. f.

Dass alle Strahlen vereinigte Brennpunkte und verschiedene Brennebenen haben, oder umgekehrt, ist bei einer eigentlichen Congruenz unmöglich. Fallen dagegen für jeden Strahl beide Brennpunkte und -Ebenen zusammen, so besteht die Congruenz aus ∞^1 Büscheln und gehört in die zuletzt erwähnte Gattung. Sind auf jedem Strahl die Brennpunkte und -Ebenen je unendlich benachbart (und das Eine ohne das Andere kann auch hier nicht stattfinden), so wird jeder Strahl die Brennfläche stationär berühren. Letztere darf nicht ausarten; die Congruenz besteht bei dieser letzten Gattung aus den Haupttangenten einer krummen Fläche.

IV.

Ueber den functionentheoretischen Zusammenhang zwischen den Lamé'schen, Laplace'schen und Bessel'schen Functionen.

Von

Dr. E. Haentzschel

in Duisburg a. Rh.

---

§ 1.

Unter den Lamé'schen Functionen zweiter Ordnung nehmen diejenigen eine besondere Stellung ein, welche definirt sind durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{du^2} = \{(\nu^2 - \tfrac{1}{4})(\wp u - e_\lambda) - h^2\} y, \tag{1}$$

wo ν eine ganze Zahl ist. Denn das allgemeine Integral von 1) wird für $u = 0$ logarithmisch unendlich. Diese Eigenschaft geht verloren, wenn ν nicht mehr ganzzahlig ist. Die durch 1) definirten Functionen stehen zu den übrigen Lamé'schen Functionen zweiter Ordnung in derselben Beziehung, wie $\int \frac{du}{u}$ zu $\int \frac{du}{u^m}$, wenn $m \gtrless 1$; sie sind demnach von den zuerst von Lamé selbst, dann von Heine* und besonders von Hermite** studirten verschieden. Ihr Verhältniss zu den letzteren ist leicht zu ermitteln. Heine legt seiner Untersuchung die Gleichung zu Grunde:

$$(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)\frac{d^2 E(\mu)}{d\mu^2} + \mu(2\mu^2 - b^2 - c^2)\frac{dE(\mu)}{d\mu} + [(b^2 + c^2)v - n(n+1)\mu^2]E(\mu) = 0. \tag{2}$$

Setzt man hierin:

$$\left.\begin{aligned} \mu^2 &= s + \tfrac{1}{3}(b^2 + c^2), \\ g_2 &= \tfrac{4}{3}(b^2 + c^2)^2 - 4b^2c^2, \\ g_3 &= \tfrac{8}{27}(b^2 + c^2)^3 - \tfrac{4}{3}b^2c^2(b^2 + c^2), \\ h^2 &= (b^2 + c^2)v, \\ 4s^3 - g_2 s - g_3 &= 4(s - e_\iota)(s - e_\varkappa)(s - e_\lambda) \end{aligned}\right\}$$

und macht s zur Unabhängigen, so entsteht:

---

* Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Aufl. Berlin 1878/81.

** Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Comptes Rendus, Tome 85 etc., 1877—1882.

3) $$(4s^3-g_2s-g_3)\frac{d^2E}{ds^2}+\left(6s^2-\frac{1}{2}g_2\right)\frac{dE}{ds}-[n(n+1)(s-e_\lambda)-h^2]E=0,$$

welche Gleichung durch die Substitution

4) $$-\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}=du,\quad s=\wp(u/g_2,g_3)$$

in

5) $$\frac{d^2E}{du^2}=\{n(n+1)(\wp u-e_\lambda)-h^2\}E$$

übergeführt wird.

Die beiden partikulären Integrale von 5) bezeichnet Heine mit $E^n(u)$ bez. $F^n(u)$. Es erhalten folglich die Integrale von 1) die Bezeichnung $E^{\nu-\frac{1}{2}}(u)$ bez. $F^{\nu-\frac{1}{2}}(u)$.

§ 2.

Den Lamé'schen Functionen y der Differentialgleichung 1) adjungire ich Functionen z, welche mit den y verbunden sind durch die Beziehung:

6) $$y=z(\wp u-e_\lambda)^{-\frac{1}{4}}$$

und daher der Differentialgleichung genügen:

7) $$\frac{d^2z}{du^2}-\frac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u-e_\lambda}\frac{dz}{du}$$
$$+\left\{h^2+\frac{3}{4}e_\lambda-\nu^2(\wp u-e_\lambda)-\frac{3}{4}\frac{(e_\lambda-e_\varkappa)(e_\iota-e_\lambda)}{\wp u-e_\lambda}\right\}z=0.$$

Das allgemeine Integral, ausgedrückt durch zwei partikuläre Integrale, sei:

8) $$z=\alpha V_\nu+\beta W_\nu.$$

Die Gleichung 1) für die Functionen y nenne ich die doppelt periodische Normalform. Derselben lässt sich eine algebraische Normalform an die Seite stellen, wenn man in 1)

9) $$s=\wp u$$

einführt und s zur Unabhängigen macht. Dann ergiebt sich:

10) $$(4s^3-g_2s-g_3)\frac{d^2y}{ds^2}+\left(6s^2-\frac{1}{2}g_2\right)\frac{dy}{ds}-\left\{\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)(s-e_\lambda)-h^2\right\}y=0$$

mit dem Integral:

$$y=\alpha E^{\nu-\frac{1}{2}}(s)+\beta F^{\nu-\frac{1}{2}}(s).$$

Es ist zu beachten, dass die Gleichung 1) eine dreifache Form annimmt, je nachdem man $\lambda=1, 2, 3$ setzt. Ueberträgt man die gebrauchte Weierstrass'sche Bezeichnung in die Jacobi'sche, so ergeben sich die drei Gleichungen:

$$11)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{du^2}=\left\{\left(\nu^2-\dfrac{1}{4}\right)(e_1-e_3)\dfrac{cn^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k)}{sn^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k)}-h^2\right\}y,\\ \dfrac{d^2y}{du^2}=\left\{\left(\nu^2-\dfrac{1}{4}\right)(e_1-e_3)\dfrac{dn^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k)}{sn^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k)}-h^2\right\}y,\\ \dfrac{d^2y}{du^2}=\left\{\left(\nu^2-\dfrac{1}{4}\right)(e_1-e_3)\dfrac{1}{sn^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k)}-h^2\right\}y,\end{cases}$$

wo $k^2=\dfrac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$ ist.

Dieselben gehen durch die Substitution:

$$12)\quad \begin{cases} s-e_1=(e_1-e_3)\dfrac{cn^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k)}{sn^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k)},\\ s-e_2=(e_1-e_3)\dfrac{dn^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k)}{sn^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k)},\\ s-e_3=(e_1-e_3)\dfrac{1}{sn^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k)},\\ s=\wp(u/g_2,g_3)\end{cases}$$

sofort in die algebraische Normalform 10) über.

Für das Fernere ist nöthig, die Aufmerksamkeit auf zwei Differentialgleichungen zu lenken, welche eine Erweiterung der in Heine's Handbuch Bd. I, S. 148, 23 und S. 217, 36 β) auftretenden sind. Definirt man

$$13)\qquad z^{(\nu)}=y(\wp u-e_\lambda)^{\frac{2\nu+1}{4}}=z(\wp u-e_\lambda)^{\frac{\nu}{2}}=\alpha\mathfrak{V}_{-\nu}+\beta\mathfrak{W}_{-\nu},$$

so genügt $z^{(\nu)}$ der Differentialgleichung:

$$14)\qquad \frac{d^2z^{(\nu)}}{du^2}-\frac{(2\nu+1)}{2}\frac{\wp' u}{\wp u-e_\lambda}\frac{dz^{(\nu)}}{du} -\left\{\frac{(2\nu+1)(2\nu+3)}{4}\frac{(e_\lambda-e_\varkappa)(e_\iota-e_\lambda)}{\wp u-e_\lambda}-\frac{3}{4}e_\lambda(2\nu+1)^2-h^2\right\}z^{(\nu)}=0$$

und ganz analog:

$$15)\qquad z_{(\nu)}=y(\wp u-e_\lambda)^{-\frac{(2\nu-1)}{4}}=z(\wp u-e_\lambda)^{-\frac{\nu}{2}}=\alpha\mathfrak{V}_\nu+\beta\mathfrak{W}_\nu$$

der Gleichung:

$$16)\qquad \frac{d^2z_{(\nu)}}{du^2}+\frac{(2\nu-1)}{2}\frac{\wp' u}{\wp u-e_\lambda}\frac{dz_{(\nu)}}{du} -\left\{\frac{(2\nu-1)(2\nu-3)}{4}\frac{(e_\lambda-e_\varkappa)(e_\iota-e_\lambda)}{\wp u-e_\lambda}-\frac{3}{4}e_\lambda(2\nu-1)^2-h^2\right\}z_{(\nu)}=0.$$

§ 3.

Unter Benutzung der von Herrn Professor Weierstrass in seinen Vorlesungen gegebenen Theorie der elliptischen Functionen kann man streng functionentheoretisch durch einen Grenzübergang aus dem Gebiete der Lamé'schen in das der Laplace'schen Functionen hinabsteigen.

Bleibt von den beiden Perioden 2ω und $2\omega'$ der $\wp$-Function die reelle erste endlich, wird hingegen der reelle Bestandtheil von $\frac{\omega'}{\omega . i}$ unendlich gross, so werden zwei der Grössen e_ι, $e_\varkappa$, e_λ einander gleich.

Ich wähle nun

17) $$e_\iota = e_1, \quad e_\varkappa = e_2, \quad e_\lambda = e_3,$$

so ist unter der genannten Voraussetzung

18) $$e_2 = e_3$$

und es geht $(\wp u - e_\lambda)$ über in

19) $$\wp u - e_3 = \frac{(e_1 - e_3)}{\sin^2(\sqrt{e_1 - e_3}\, u)}.$$

Daher verwandelt sich die Differentialgleichung der Lamé'schen Functionen in:

1a) $$\frac{d^2 y}{du^2} = \left\{\left(\nu^2 - \tfrac{1}{4}\right)\frac{(e_1 - e_3)}{\sin^2(\sqrt{e_1 - e_3}\, u)} - h^2\right\} y.$$

Die hierdurch dargestellten Functionen haben keinen besondern Namen erhalten, wohl aber die zugehörigen z-Functionen.

Denn es ist

6a) $$y = z(e_1 - e_3)^{-\frac{1}{4}} \sin^{\frac{1}{2}}(\sqrt{e_1 - e_3}\, u)$$

zu setzen und z das Integral von:

7a) $$\frac{d^2 z}{du^2} + \sqrt{e_1 - e_3}\, ctg(\sqrt{e_1 - e_3}\, u)\frac{dz}{du} + \left\{h^2 + \frac{3}{4} e_3 - \frac{\nu^2 (e_1 - e_3)}{\sin^2(\sqrt{e_1 - e_3}\, u)}\right\} z = 0.$$

Aus $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ folgt wegen 18), dass

$$3 e_3 = -(e_1 - e_3);$$

führt man noch die Abkürzung ein:

20) $$n = \frac{h}{\sqrt{e_1 - e_3}} - \frac{1}{2},$$

so erhält man:

7α) $$\frac{d^2 z}{du^2} + \sqrt{e_1 - e_3}\, ctg(\sqrt{e_1 - e_3}\, u)\frac{dz}{du} + (e_1 - e_3)\left\{n(n+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2(\sqrt{e_1 - e_3}\, u)}\right\} z = 0.$$

In Heine's Bezeichnung (Bd. I S. 216) ist:

8a) $$z = \alpha P_\nu^n\left(\cos(\sqrt{e_1 - e_3}\, u)\right) + \beta Q_\nu^n\left(\cos(\sqrt{e_1 - e_3}\, u)\right).$$

Die Functionen z in 7) gehen demnach an der Grenze in Laplace'sche Functionen über, d. h. in zugeordnete Kugelfunctionen, welche in dem vorliegenden Falle einen ganzzahligen unteren und einen willkürlichen oberen Index haben.

Aus 20) ersieht man, dass für $e_1 - e_3 = 1$ die Grösse n eine ganze Zahl wird, wenn h die Hälfte einer ungeraden Zahl ist, und dass die zugeordnete Kugelfunction mit ganzzahligem oberen und unteren Index entsteht, wie sie Heine betrachtet hat.

Für $e_1 - e_3 = 1$ und ganzzahliges h ergiebt sich die Ringfunction (Heine II, S. 289); endlich für $e_1 - e_3 = 1$ und $h = \mu\sqrt{-1}$ die zugeordnete Mehler'sche Kegelfunction (Heine II, S. 231).

Weiter folgt:

$$13a)\quad \begin{cases} z^{(\nu)} = y(e_1-e_3)^{\frac{2\nu+1}{4}} \sin^{-\frac{(2\nu+1)}{2}}(\sqrt{e_1-e_3}\,u) = z(e_1-e_3)^{\frac{\nu}{2}} \sin^{-\nu}(\sqrt{e_1-e_3}\,u), \\ z^{(\nu)} = \alpha \mathfrak{P}^n_{-\nu}\left(\cos(\sqrt{e_1-e_3}\,u)\right) + \beta \mathfrak{Q}^n_{-\nu}\left(\cos(\sqrt{e_1-e_3}\,u)\right); \end{cases}$$

$$14a)\quad \frac{d^2 z^{(\nu)}}{du^2} + (2\nu+1)\sqrt{e_1-e_3}\, ctg(\sqrt{e_1-e_3}\,u)\frac{dz^{(\nu)}}{du} + (e_1-e_3)(n-\nu)(n+\nu+1)z^{(\nu)} = 0$$

(Heine, Bd. I S. 148 und S. 217);

$$15a)\quad \begin{cases} z_{(\nu)} = y(e_1-e_3)^{-\frac{(2\nu-1)}{4}} \sin^{\frac{(2\nu-1)}{2}}(\sqrt{e_1-e_3}\,u) = z(e_1-e_3)^{-\frac{\nu}{2}} \sin^{\nu}(\sqrt{e_1-e_3}\,u), \\ z_{(\nu)} = \alpha \mathfrak{P}^n_{\nu}\left(\cos(\sqrt{e_1-e_3}\,u)\right) + \beta \mathfrak{Q}^n_{\nu}\left(\cos(\sqrt{e_1-e_3}\,u)\right); \end{cases}$$

$$16a)\quad \frac{d^2 z_{(\nu)}}{du^2} - (2\nu-1)\sqrt{e_1-e_3}\, ctg(\sqrt{e_1-e_3}\,u)\frac{dz_{(\nu)}}{du} + (e_1-e_3)(n+\nu)(n-\nu+1)z_{(\nu)} = 0.$$

§ 4.

Durch die Substitution

$$x = \cos(\sqrt{e_1-e_3}\,u)$$

geht 7 α) über in die bekannte Gleichung der zugeordneten Kugelfunctionen:

$$(1-x^2)\frac{d^2 z}{dx^2} - 2x\frac{dz}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2}\right\} z = 0.$$

Wird hingegen

$$21)\quad x = \cos^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u)$$

gesetzt, so erhält man:

$$22)\quad 4x(1-x)\frac{d^2 z}{dx^2} + 2(1-3x)\frac{dz}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{\nu^2}{1-x}\right\} z = 0.$$

Sei für den Augenblick in dieser Gleichung ausser ν auch das bisher willkürliche n eine ganze Zahl.

Der Differentialgleichung 22) der Laplace'schen Functionen stellen wir gegenüber die algebraische Normalform 3) der y-Functionen für $e_2 = e_3$. Dieselbe lautet:

$$3a)\quad 4(s-e_1)(s-e_3)\frac{d^2 y}{ds^2} + 6(s+e_3)\frac{dy}{ds} - \left\{n(n+1) - \frac{h^2}{s-e_3}\right\} y = 0.$$

Sie geht durch die Substitution

$$23)\quad s = (e_3-e_1)x + e_1, \quad \text{d. h.} \quad x = -ctg^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u),$$

über in:

$$24)\quad 4x(1-x)\frac{d^2 y}{dx^2} + 2(1-3x)\frac{dy}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{h^2}{(e_1-e_3)(1-x)}\right\} y = 0.$$

Hier möge jetzt neben n auch $\dfrac{h}{\sqrt{e_1-e_3}}$ eine ganze Zahl sein.

Alsdann definiren 22) und 24) eine und dieselbe Function. Nun ist das allgemeine Integral von 22):

$$z = \alpha P_\nu^n(x) + \beta Q_\nu^n(x)$$

und wir wissen, dass $Q_\nu^n(x)$ an der Stelle $x=1$ logarithmisch unendlich wird, so lange $\nu \leqq n$; dass sich aber für $\nu > n$ beide partikuläre Integrale als algebraische Functionen von x darstellen lassen.* Andererseits definirt 24) solche Functionen y, welche aus den Lamé'schen Functionen $E^n(x)$ bez. $F^n(x)$ hervorgehen, wenn man $e_2 = e_3$ setzt. Herr Hermite hat die vollständige Integration der Gleichung 3) geleistet und gezeigt, dass, wenn $F(x)$ ein partikuläres Integral ist, $F(-x)$ ein zweites ist.** Aber in einem an Heine gerichteten Briefe findet er, dass seine Integration versagt, wenn $e_2 = e_3$ und ausserdem $\frac{h}{\sqrt{e_1 - e_3}}$ eine ganze Zahl ist, kleiner oder höchstens gleich n,*** weil dann das zweite partikuläre Integral logarithmischen Charakter hat, wie wir hinzusetzen können.† Damit ist ein doppelter Zugang zur Theorie der Kugelfunctionen mit ganzzahligem unteren und oberen Index eröffnet und es ist interessant, denselben auch in Heine's Handbuch vorzufinden. Im ersten Theile des ersten Bandes sind die zugeordneten Kugelfunctionen z-Functionen, entsprechend der Differentialgleichung 22). Hingegen werden im dritten Theil (S. 450) unter Kugelfunctionen zweiter Ordnung die durch 24) dargestellten y-Functionen verstanden, wofern dort $\frac{h}{\sqrt{e_1 - e_3}}$ eine ganze Zahl ist.

Aber man wird die Gleichungen 22) und 24), obschon unter unseren Voraussetzungen gleichwerthig, doch nicht als gleichberechtigt ansehen dürfen, wenn man sich den Ursprung von 24) aus 3) vergegenwärtigt. Denn alle Resultate, die man für 1) erhält, gelten unter der Voraussetzung $e_2 = e_3$ sofort für Heine's Kugelfunction [Gleichung 22)], weil der Charakter des Integrals wesentlich durch das ganzzahlige ν bestimmt wird. Die Integrale von 3) hingegen lassen keine directen Schlüsse auf $z = \alpha P_\nu^n(x) + \beta Q_\nu^n(x)$ zu, wie es der Brief Hermite's an Heine augenscheinlich darthut. Uebrigens hätte Heine dieser Umstand nicht entgehen dürfen. Weil $P_\nu^n(x)$ eine ganze Function von x ist, so sucht er auch $E^n(x)$ als ganze Function darzustellen. Dieser Analogieschluss war falsch; er führte zur Integration

---

* Haentzschel, Ueber die Reduction der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Beitrag zur Theorie der Lamé'schen Functionen zweiter Ordnung. Berlin 1888, Mayer & Müller.

** Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Comptes Rendus 1877—1882.

*** Hermite, Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé. Extrait d'une lettre adressée à M. Heine. Borchardt's Journal Bd. 89.

† Heine, Handbuch, Bd. II S. 364—367.

von 3) für einen Ausnahmefall.* Denn $Q_\nu^n(x)$ wird für $x=1$ logarithmisch unendlich, während die Lamé'sche Function der zweiten Art $F^n(x)$ nur „elliptische Integrale der ersten und zweiten, nicht aber der dritten Gattung enthält", folglich des logarithmischen Charakters entbehrt. (Heine I, S. 386).

§ 5.

Es ist endlich noch ein weiterer Grenzfall möglich, nämlich der, dass die beiden Perioden der $\wp$-Function unendlich gross werden, d. h. dass alle drei Grössen e und also auch die Invarianten g_2 und g_3 verschwinden.

Man gelangt dann in das Gebiet der Bessel'schen Functionen oder nach Heine in das der Functionen des Kreiscylinders. Diese sind daher sowohl ein Grenzfall der Lamé'schen, als der Laplace'schen Functionen, in welchen natürlich über die e nicht, etwa in der Weise $e_1-e_3=1$, verfügt werden darf.

Wird demnach

25) $$g_2=g_3=0 \quad \text{oder} \quad e_1=e_2=e_3=0$$

gesetzt, so lauten die entsprechenden Gleichungen:

1b) $$\frac{d^2y}{du^2}=\left\{\frac{(\nu^2-\frac{1}{4})}{u^2}-h^2\right\}y,$$

6b) $$y=z\sqrt{u},$$

7b) $$\frac{d^2z}{du^2}+\frac{1}{u}\,\frac{dz}{du}+\left\{h^2-\frac{\nu^2}{u^2}\right\}z=0.$$

Also ist

8b) $$z=\alpha J_\nu(hu)+\beta K_\nu(hu)$$

die Fourier-Bessel'sche Function; die Functionen y haben keinen Namen erhalten.

Die algebraische Normalform reducirt sich auf:

10b) $$4s^3\frac{d^2y}{ds^2}+6s^2\frac{dy}{ds}-\left\{\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)s-h^2\right\}y=0.$$

Weiter ist:

13b) $$z^{(\nu)}=yu^{-\frac{(2\nu+1)}{2}}=zu^{-\nu}, \quad z^{(\nu)}=\alpha j_\nu(u)+\beta k_\nu(u);$$

14b) $$\frac{d^2z^{(\nu)}}{du^2}+\frac{(2\nu+1)}{u}\,\frac{dz^{(\nu)}}{du}+h^2z^{(\nu)}=0$$

(Heine, Bd. I S. 233),

15b) $$z_{(\nu)}=yu^{\frac{2\nu-1}{2}}=zu^{\nu},$$

* Fuchs, Ueber eine Classe von Differentialgleichungen, welche durch Abel'sche und elliptische Functionen integrirbar sind. Nachrichten der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1878.

16b) $$\frac{d^2 z_{(\nu)}}{du^2} - \frac{(2\nu-1)}{u}\frac{dz_{(\nu)}}{du} + h^2 z_{(\nu)} = 0.$$

Bekanntlich hat Herr Mehler ein Grenzverfahren angegeben, um von Kugelfunctionen zu Bessel'schen Functionen zu gelangen. Dasselbe ist jedoch nicht einwurfsfrei, denn es vermischt den endlich bleibenden Parameter n, der, in der Verbindung $n(n+1)(e_1-e_3)$ auftretend, an der Grenze in h^2 übergeht, mit einem variirenden n, das sich auf das Argument u bezieht. Es ist deshalb bezeichnend, dass Heine zu falschen Resultaten gelangt, als er dieses Grenzverfahren auf die Differentialgleichung der Lamé'schen Functionen anwendet, um die Functionen des elliptischen Cylinders zu erhalten.

§ 6.

Legen wir uns nämlich zum Schluss noch die Frage vor: In welchem Verhältniss stehen die Functionen des elliptischen Cylinders zu den Lamé-schen Functionen und den daraus abgeleiteten? so antwortet Heine, Bd. I S. 5: Man erhält die genannten Functionen in derselben Weise aus den Lamé'schen, wie die Bessel'schen aus den Kugelfunctionen. Dass dies falsch ist, haben die vorangegangenen Erörterungen bewiesen, indem die Functionen des Kreiscylinders sowohl aus den Lamé'schen, als aus den Laplace'schen hervorgingen, indem man $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ setzt. Aber auch die andere Angabe Heine's, Bd. I S. 401, ist als unrichtig zu bezeichnen: „Wie die Lamé'schen Functionen mit den Kugelfunctionen, so hängen die Functionen des elliptischen Cylinders mit denjenigen zusammen, welche bisher schlechtweg als Cylinderfunctionen bezeichnet wurden." Die Functionen des elliptischen Cylinders stehen eben mit den genannten drei Gattungen von Functionen nicht in so naher Beziehung, als Heine angiebt.

Schreibt man die Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders:

26) $$\frac{d^2 y}{du^2} + \left\{\frac{\lambda^2 \sin^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u)}{(e_1-e_3)} - h^2\right\} y = 0$$

und setzt alsdann:

$$e_1 = e_3 = 0,$$

so erhält man die Functionen des parabolischen Cylinders:

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \{\lambda^2 u^2 - h^2\} y = 0,$$

welche demnach mit den Functionen des elliptischen Cylinders ebenso zusammenhängen, wie die Bessel'schen mit den Laplace'schen Functionen.*

* Karl Baer, Ueber die Functionen des parabolischen Cylinders. Programm des Gymnasiums zu Cüstrin, 1883.

Erwähnt sei noch, dass keines der beiden partikulären Integrale von 26) an der Stelle $u=0$ logarithmisch unendlich wird, wie eine einfache Untersuchung lehrt. Deshalb ist Heine's Darstellung derselben durch

$$\mathfrak{E}(\varphi)=2\,J_0\,(i\lambda\cos\varphi)-N_1\,J_2\,(i\lambda\cos\varphi)+N_2\,J_4\,(i\lambda\cos\varphi)\ldots,$$
$$\mathfrak{F}(\varphi)=2\,K_0(i\lambda\cos\varphi)-N_1\,K_2(i\lambda\cos\varphi)+N_2\,K_4\,(i\lambda\cos\varphi)\ldots$$

irrthümlich, da in dem zweiten Integral der Factor von $log(i\lambda\cos\varphi)$ verschwinden muss. Weil nämlich:

$$K_0(i\lambda\cos\varphi)=J_0(i\lambda\cos\varphi).log(i\lambda\cos\varphi)+2(J_2-\tfrac{1}{2}J_4+\tfrac{1}{3}J_6-\ldots)$$

nach Heine, Bd. I S. 244, und allgemein:

$$K_\nu(i\lambda\cos\varphi)=J_\nu(i\lambda\cos\varphi).log(i\lambda\cos\varphi)+\psi(i\lambda\cos\varphi),$$

wie sich aus S. 28—29 meiner schon citirten Dissertation ergiebt, so ist jener Factor von $log(i\lambda\cos\varphi)$ nichts Anderes, als $\mathfrak{E}(\varphi)$, welches, gleich Null gesetzt, aufhören würde, ein Integral zu sein.

Kleinere Mittheilungen.

I. Ueber die Inversion der vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung für ihre reellen Moduln.

In der verdienstlichen Schrift von Grothe über „Leonardo da Vinci als Ingenieur und Philosoph" wird mitgetheilt, dass der berühmte Künstler folgenden Satz ausgesprochen habe: „Der schwere Körper A steigt schneller auf dem Kreisbogen ACE herab, als auf der Sehne AE." — Bei der zugefügten Figur ist der Bogen ACE ein Quadrant.

Hierzu macht nun Grothe die Bemerkung: „Venturi weist in seiner Erklärung darauf hin, dass Vinci und später Galilei gefunden haben und festhielten, dass der Kreisbogen für den Fall der Körper der Weg des Minimums der Zeitdauer sei, während später gezeigt ward, dass dies die Cycloide sei."

Wenn wirklich Leonardo da Vinci seinen obigen Satz auf die von Venturi angegebene Eigenschaft des Kreisbogens gestützt haben sollte, so wäre die Begründung allerdings eine falsche gewesen; der Satz selbst ist aber nichtsdestoweniger vollkommen richtig, wie sich sehr leicht zeigen lässt.

Bezeichnet man nämlich den Durchmesser desjenigen Kreises, welchem der Bogen ACE als Quadrant angehört, mit $2r$, so findet man für die Fallzeit auf der Sehne AE den Werth:

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Für die Fallzeit auf dem Bogen ACE aber lässt sich aus dem Pendelgesetz die Relation ableiten:

$$t_2 = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot F' \left(mod \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right),$$

wobei nach der Bezeichnungsweise von Legendre F' das vollständige elliptische Integral erster Gattung bedeutet. Entnimmt man den Werth desselben aus den Tafeln, so findet sich:

$$t_2 = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot 1{,}85407 \ldots.$$

Demnach ist $t_2 < t_1$, womit das Theorem von Leonardo da Vinci bewiesen ist. An dasselbe lässt sich nun in sehr einfacher Weise folgende Pendelaufgabe anknüpfen:*

* Diese Gedankenverbindung wurde in einer Vorlesung über analyt. Mechanik von Herrn Geh. Rath Lipschitz gelegentlich vorgetragen und gab zu der folgenden Untersuchung die unmittelbare Anregung.

„Gebraucht bei einem Ausschlagwinkel von 90 Grad das Pendel eine kürzere Zeit, um in seine tiefste Lage zu kommen, als ein auf der zugehörigen Sehne ohne Reibung gleitender Körper nöthig hat, um an denselben Punkt zu gelangen, so wächst doch bei zunehmendem Bogen die Schwingungszeit für das Pendel bekanntlich zu unendlicher Dauer an, während die Fallzeit auf der zugehörigen Sehne ganz unverändert dieselbe bleibt. Es muss demnach irgend einen Bogen geben, bei welchem beide Zeitbestimmungen genau den gleichen Werth haben. Wie gross ist dieser Bogen?“

Die analytisch-mechanische Entwickelung der so fixirten Aufgabe ist rasch erledigt. Bezeichnet man den gesuchten Bogen mit ψ, so ist derselbe geknüpft an die Bedingung:

$$\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\psi}{2}\sin^2\varphi}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$$

oder

$$F'\left(\operatorname{mod}\frac{\psi}{2}\right) = 2.$$

Es handelt sich also nur noch darum, die Function F' oder, wie man dieselbe jetzt bezeichnet, das Integral K, für seinen reellen Modulus zu invertiren, und dies ist die Aufgabe, deren allgemeine Lösung das Ziel der folgenden Entwickelungen bildet.

1. Inversion für kleine Werthe von K durch die Landen'sche Transformation und durch abgekürzte Potenzreihen.

Giebt man dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung die vorhin angegebene Form:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\psi}{2}\sin^2\varphi}},$$

bezeichnet $\frac{\psi}{2}$ mit η und setzt nun $\cos\eta = \frac{1-\sin\eta_1}{1+\sin\eta_1}$, $\cos\eta_1 = \frac{1-\sin\eta_2}{1+\sin\eta_2}$ etc., so gelangt man bekanntlich zu der Relation:

$$K = \frac{\pi}{2}(1+\sin\eta_1)(1+\sin\eta_2)(1+\sin\eta_3)\ldots,$$

und da hierbei die aufeinander folgenden Winkel η rasch abnehmen, so kann man, im Falle das Integral K und demnach auch der Winkel ψ nur

kleine Werthe haben, das Product auf der rechten Seite schon bald abbrechen, ohne dass der damit begangene Fehler allzu erheblich wird. Auch die in der Einleitung fixirte Aufgabe lässt sich, obschon der Bogen ψ einen Quadranten übersteigt, doch noch mit ziemlicher Genauigkeit auf diese Weise erledigen. Bricht man z. B. nach der zweiten Klammer ab, so führt die Rechnung auf eine quadratische Gleichung für $\sin\eta_1$, nach deren Auflösung die Winkel η und ψ leicht bestimmt werden können. Man findet dabei:

$$\psi = 106^\circ\, 44'\, 36''$$

und dieses Resultat ist schon bis auf eine Minute genau richtig.

Bricht man das Product hinter der dritten Klammer ab, so ergiebt sich nach einigen Umformungen die Relation:

$$1 + \sqrt{\cos\eta_1} = \sqrt{\pi(1+\sin\eta_1)},$$

welche in ihrer weiteren Behandlung auf eine Gleichung des vierten Grades führt, deren Auflösung kein besonderes Interesse mehr hat, da eine genauere Betimmung des Winkels ψ, wie sich später ergeben wird, auf andere Weise viel bequemer erreicht werden kann.

Einen zweiten Weg, um aus kleinen Werthen von K den Modulus zu eruiren, bietet die bekannte Reihe:

$$K = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^3 + \dots\right\}$$

dar, wobei $x = \sin^2\frac{\psi}{2}$ gesetzt ist. Wenn nämlich der Winkel ψ so klein ausfällt, dass schon $\sin^6\frac{\psi}{2}$ jenseits der Grenze liegt, bis zu welcher man die Genauigkeit der Rechnung zu treiben gedenkt, dann kann man in der That die aus der Abkürzung obiger Reihe sich ergebende Gleichung:

$$\frac{9}{64}x^2 + \frac{1}{4}x - \left(\frac{2K}{\pi} - 1\right) = 0$$

recht wohl zu Grunde legen, um den Modulus direct durch das Integral K zu bestimmen.

In einem viel grösseren Bereich hingegen lässt sich die Methode der abgekürzten Potenzreihen anwenden, wenn statt der obigen Legendreschen die von Jacobi gegebene Reihe:

$$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$$

dazu verwendet wird. Die Grösse q ist ja durchweg bedeutend kleiner als der Modulus k des elliptischen Integrals, und infolge dessen convergirt die Reihe so stark, dass man sie in vielen Fällen schon nach dem zweiten Gliede abbrechen kann. Selbst für den verhältnissmässig ungünstigen Fall der Pendelaufgabe findet man auf diese Weise schon ein auffallend richtiges Resultat. Es ergiebt sich nämlich dann:

$$q=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2K}{\pi}}-1\right), \quad \text{also für } K=2 \quad q=\frac{2-\sqrt{\pi}}{2.\sqrt{\pi}}=0{,}0641896,$$

und nun kann man zur Auffindung des gesuchten Winkels eine der Formeln benutzen, in welchen k als Function von q auftritt, etwa die Formel:

$$k=\frac{2\pi}{K}\sqrt{q}.\{1+q^2+q^6+\ldots\}^2,^{*}$$

oder auch

$$k=4\sqrt{q}\left\{\frac{1+q^2}{1+q}\cdot\frac{1+q^4}{1+q^3}\cdot\frac{1+q^6}{1+q^5}\cdot\,.\,.\right\}^2.^{**}$$

Dabei findet sich:

$$\eta=arcsin\,k=53^0\,22'\,14'', \quad \psi=106^0\,44'\,28''.$$

Bricht man aber obige Reihe $\vartheta_3(0)$ erst hinter dem dritten Gliede ab, so ergiebt sich die trinomische Gleichung:

$$q^4+q=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{2K}{\pi}}-1\right\}=u,$$

und man kann unmittelbar bilden:

$$q=u-(u-(u-(u-\ldots)^4)^4)^4,$$

ein Schema, dessen Ausrechnung sehr rasch auf den Werth $q=0{,}0641726$ führt, und dieser ist so genau, als er mit siebenstelligen Tafeln überhaupt gefunden werden kann. Die Grösse des gesuchten Winkels ψ bestimmt sich hieraus auf:

$$\psi=106^0\,43'\,15{,}46''.$$

2. Lösung des Problems durch die Reversionsformel von Lagrange.

Die bis jetzt angeführten Methoden werden weit in Schatten gestellt durch Entwickelung einer Reihe, welche aus der vorhin schon benutzten Relation:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=1+2q+2q^4+\ldots+2q^{n^2}+\ldots$$

durch Inversion erhalten werden kann. Man bildet zunächst wieder:

$$q+q^4+q^9+\ldots=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2K}{\pi}}-1\right)=u,$$

sucht sodann eine neue Reihe abzuleiten von der Form:

$$q=A_0u^0+A_1u^1+A_2u^2+A_3u^3+\ldots$$

und kann dabei die Coefficienten A nach irgend einer der bekannten Methoden berechnen. Geeignet hierzu ist z. B. die Formel von Lagrange***:

---

* Jacobi, Fund. nova, p. 184 Nr. 10 und 6.

** Fund. nova, p. 89 Nr. 7.

*** Méc. Anal. II, p. 22. Vergl. ferner Lagrange, „Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales“ in den Berichten der Berliner Akademie des Jahres 1768, S. 274. — Bequem sind auch die von Kerz in seinen beiden Abhandlungen über „Die allgemeine Umkehrung der Reihen“, Giessen 1850 und Darmstadt 1861, angegebenen Formeln.

$$u = \vartheta - f(\vartheta),$$

$$\vartheta = u + f(u) + \frac{d}{2\,du}(f(u))^2 + \frac{d^2}{3!\,du^2}(f(u))^3 + \ldots + \frac{d^{i-1}}{i!\,du^{i-1}}(f(u))^i.$$

Bis zur zwanzigsten Potenz des Arguments hat diese Reihe folgende Glieder:

$$q = \begin{cases} u - u^4 + 4u^7 - u^9 + 22u^{10} + 13u^{12} \\ + 140u^{13} - 136u^{15} + 969u^{16} + 9u^{17} + 844u^{18} \\ + 6316u^{19} - 42u^{20} \pm \ldots \end{cases}$$

Bei der Application derselben auf unsere Pendelaufgabe ist die Rechnung äusserst kurz:

$$\begin{aligned} u &= 0{,}0641896 \\ u^4 &= 0{,}0000170 \\ 4u^7 &= 0{,}0000000 \\ q &= 0{,}0641726, \end{aligned}$$

und das Resultat stimmt mit dem vorhin erhaltenen überein.

So rasch und bequem nun auch diese Methode in einem gewissen Bereiche zum Ziele führt, so lässt sie doch im Stiche, sobald K und damit auch u grössere Werthe annehmen, nicht allein deswegen, weil die Ermittelung der zu den höheren Potenzen von u gehörigen Coefficienten eine sehr mühevolle Rechnung erfordert, sondern weil die Reihe an irgend einem Punkte überhaupt aufhört, convergent zu sein. Die zuverlässige Festsetzung dieser Convergenzgrenze erfordert aber eine besondere und umständliche Untersuchung, die ich aus dem Plane der gegenwärtigen Arbeit ausgeschieden habe, um sie später zum speciellen Thema einer andern zu machen. Ich will hier *anticipando* nur dies erwähnen, dass jene Grenze für K nicht jenseits des Werthes 2π liegen kann. Aber schon ziemlich weit unterhalb dieser Zahl hört, wenn auch vielleicht nicht die Convergenz, so doch die praktische Verwendbarkeit der obigen invertirten Reihe auf, und da K bekanntlich von $\frac{\pi}{2}$ bis ∞ wachsen kann, so ist es unerlässlich, ein Mittel zu finden, welches auch für höhere Beträge aus dem Integral K den reellen Modulus zu ermitteln möglich macht.

8. Lösung des Inversionsproblems durch Limitation.

Weil es sich wesentlich nur noch um die grösseren Werthe von K handelt, und weil offenbar jedes auf die Gleichung $u = q + q^4 + q^9 + \ldots$ basirte Näherungsverfahren zu immer längeren und unbequemeren Rechnungen führt, je näher q an die Einheit heranrückt und je mehr Glieder der rechten Seite demzufolge berücksichtigt werden müssen, so wird die Entwickelung einer Formel, welche umgekehrt um so rascher zum Ziele führt, je grösser K gegeben ist, das nächste Interesse beanspruchen dürfen.

Den complementären Moduln k und k' entsprechen die Hilfsgrössen q und q', sowie die vollständigen Integrale K und K' in der Weise, dass,

wenn k in k', dann auch q in q', K in K' übergeht und umgekehrt. Demgemäss kann die Jacobi'sche Definition:

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

auch geschrieben werden:

$$q = e^{-\frac{\pi K(q')}{K(q)}}$$

oder entsprechend:

$$q' = e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q')}}$$

Da man nun allgemein, abgesehen von den Grenzen, die hier keiner besondern Betrachtung bedürfen, hat:

$$0 < q' < 1,$$

so ist entsprechend auch

$$K(0) < K(q') < K(1);$$

dies ergiebt sich direct aus der Relation:

$$K(q') = \frac{\pi}{2}\{1 + 2q'^4 + 2q'^9 + 2q'^{16} + \dots\}^2.$$

Ferner ist ersichtlich $K(0) = \frac{\pi}{2}$, $K(1) = \infty$.

Setzen wir jetzt definirend:

$$q'_1 = \frac{1}{e^n},$$

wobei n irgend eine reelle constante Grösse bedeutet, welche der einzigen Bedingung unterliegt:

$$\pi < n < \infty,$$

so kann man infolge des Umstandes, dass

$$\frac{\pi}{2} < K(q) < \infty$$

ist, statt n auch $2K(q)$ setzen, so dass die für q'_1 aufgestellte Definition nunmehr lautet:

$$q'_1 = e^{-2K(q)}.$$

Diese lässt sich noch weiter umbilden, indem man, ohne die Identität zu verletzen, auch noch die Function K' in dieselbe eintreten lässt. Man hat nämlich zunächst:

$$q'_1 = e^{-\frac{\pi K(q)}{\frac{\pi}{2}}},$$

und weil $\frac{\pi}{2} = K(0)$, so kann man schreiben:

$$q'_1 = e^{-\frac{\pi K(q)}{K(0)}}.$$

Combinirt man diese Gleichung mit der vorhin angeführten:

$$q' = e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q')}},$$

so folgt aus $0 < q'$ der Reihe nach:

$$K(0) < K(q'), \quad \frac{\pi K(q)}{K(0)} > \frac{\pi K(q)}{K(q')}, \quad e^{-\frac{\pi K(q)}{K(0)}} < e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q')}}, \quad q'_1 < q'.$$

Andererseits folgt aus $n<\infty$, dass $\frac{1}{e^n}>0$ ist, also hat man:

$$0<q'_1<q',\quad K(0)<K(q'_1)<K(q'),$$

$$\frac{\pi K(q)}{K(0)}>\frac{\pi K(q)}{K(q'_1)}>\frac{\pi K(q)}{K(q')},\quad e^{-\frac{\pi K(q)}{K(0)}}<e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'_1)}}<e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q')}}.$$

Setzt man daher wiederum definirend:

$$q'_2=e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'_1)}},$$

so ergiebt sich:

$$0<q'_1<q'_2<q'.$$

Und wenn man weiterhin setzt:

$$q'_3=e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'_2)}},$$

so erhält man auf dieselbe Weise:

$$0<q'_1<q'_2<q'_3<q'.$$

In dieser Art lassen sich zwischen den zuletzt fixirten Näherungswerth und den wirklichen Werth q' immer neue Näherungen einschieben, so dass man schreiben kann:

$$0<q'_1<q'_2<\cdots<q'_{n-1}<q'_n<q'.$$

Um nun auch noch über die Stetigkeit dieser Annäherung ins Klare zu kommen, ist folgende Erwägung dienlich. Wie schon angeführt, hat man:

$$K(q')=\frac{\pi}{2}(1+2q'+2q'^4+2q'^9+\ldots)^2.$$

Diese Function wächst für $0<q'<1$ von $\frac{\pi}{2}$ ab mit wachsendem q' stetig weiter, ohne irgendwo ein Maximum zu erreichen; ihr Werth bleibt stets endlich, so lange das Argument unter der Einheit bleibt.

Ist nun $K(q)$ der Werth irgend eines gegebenen vollständigen elliptischen Integrals erster Gattung, so hat man:

$$\frac{\pi}{2}<K(q)<\infty,$$

und der Bruch $\frac{\pi K(q)}{K(q'_n)}$ ist für alle Werthe von q und q'_n, welche zwischen 0 und 1 liegen, eine eindeutig bestimmte Grösse, die nicht zu Null und nicht unendlich werden kann. Ausserdem ist zu sehen, dass bei constantem q und stets wachsendem q'_n der Bruch immerwährend abnimmt, dass also $e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'_n)}}$ stets zunehmen muss.

Setzen wir nun $q'_{n+1}=q'-\delta_{n+1}$, $q'_n=q-\delta_n$ etc., so folgt zunächst:

$$\ldots\delta_{n-1}>\delta_n>\delta_{n+1}>0$$

und die Gleichung $q'_n=e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'_{n-1})}}$ geht über in:

$$q'-\delta_n=e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'-\delta_{n-1})}}$$

und entsprechend:

$$q' - \delta_{n+1} = e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'-\delta_n)}} \text{ etc.}$$

oder auch:

$$\delta_n = q' - e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'-\delta_{n-1})}}, \quad \delta_{n+1} = q' - e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'-\delta_n)}} \text{ etc.},$$

und unter Berücksichtigung der Definition von q' hat man:

$$\delta_n = e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q')}} - e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'-\delta_{n-1})}}, \quad \delta_{n+1} = e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q')}} - e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'-\delta_n)}} \text{ etc.}$$

Da nun $\delta_{n-1} > \delta_n > \delta_{n+1}$ etc., so nähert sich mit wachsendem Index oder, was dasselbe ist, mit abnehmendem δ die Function $K(q'-\delta)$ stetig dem Werthe $K(q')$, also die Differenz:

$$e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q')}} - e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'-\delta)}}$$

stetig der Null. Wenn aber $lim\, \delta_n = 0$, so folgt aus $q'_n = q' - \delta_n$, dass $lim\, q'_n = q'$, also dürfen wir schreiben:

1) $$q' = lim\, e^{-\frac{\pi K(q)}{K(q'_n)}}$$

oder auch:

$$log \frac{1}{q'} = lim \frac{\pi K(q)}{K(q'_n)},$$

wobei $K(q)$ als Werth des zu invertirenden elliptischen Integrals erster Gattung eine bestimmt gegebene Grösse, und $q'_0 = 0$ ist.

Da die entwickelte Formel nur an die Bedingung

$$\frac{\pi}{2} < K(q) < \infty$$

geknüpft ist, so enthält sie eine uneingeschränkte Lösung des Inversionsproblems für die erste Gattung. Die nachherige Ermittelung von k aus q' kann leicht geschehen durch die von Jacobi* gegebene Gleichung:

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta(0, q')}{\vartheta_3(0, q')} = \frac{1 - 2q' + 2q'^4 - 2q'^9 + \ldots}{1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + \ldots}$$

oder durch

$$k = \prod_{h=1}^{h=\infty} \left(\frac{1 - q'^{2h-1}}{1 + q'^{2h-1}}\right)^4.$$

Nunmehr ist auch leicht einzusehen, dass die gegenwärtige Lösungsmethode gerade für die grösseren Werthe des Integrals K am raschesten zum Ziele führt. Denn in diesem Falle ist der Modulus k der Einheit nahe, also k' der Null. Daher ist auch q' eine sehr kleine Grösse, und wenn in dem ersten Näherungswerthe q'_1 statt $K(q')$ die Grösse $K(0)$ eingeführt wird, so ist der Fehler nur gering und es bedarf weniger weiterer Annäherungen, um q' bis auf den gewünschten Grad von Genauigkeit zu bestimmen. Der Werth des Integrals $K = 2$, wie er in der Pendelaufgabe vorliegt, ist für diesen Zweck noch etwas zu klein. Wenn aber schon $K = 4$ gegeben ist, so findet sich q' sehr rasch. Man hat dann:

* Fund. nova, p. 184 Nr. 11 und p. 89 Nr. 8.

$$q'_1 = 0{,}0003347$$
$$q'_2 = 0{,}0003391$$
$$q'_3 = 0{,}0003391.$$

Auf sieben Decimalstellen giebt also der zweite Näherungswerth das Resultat schon richtig an.

Auch für kleine Beträge von K lassen sich übrigens Wege finden, um die Grösse q durch Limitation mit nur wenigen Näherungswerthen sehr genau bestimmen zu können. Geht man z. B. aus von der bekannten Relation:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \frac{1+q}{1-q} \cdot \frac{1-q^2}{1+q^2} \cdot \frac{1+q^3}{1-q^3} \cdot \frac{1-q^4}{1+q^4} \cdots$$

und setzt $q = \cos\varphi$, so ergiebt sich auf leichte Weise die Gleichung:

$$2)\qquad \cot^2\frac{\varphi}{2} = \lim \sqrt{\frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1+q_n^2}{1-q_n^2} \cdot \frac{1-q_n^3}{1+q_n^3} \cdot \frac{1+q_n^4}{1-q_n^4} \cdots}, \qquad q_0 = 0,$$

welche für ein kleines K ziemlich rasch zum Ziele führt. Noch rascher ist dies der Fall bei Anwendung der Formel:

$$3)\qquad q = \lim \frac{\sqrt{\frac{2K}{\pi}} - 1}{2\sum\limits_{h=1}^{h=\infty} q_n^{h^2-1}}, \qquad q_0 = 0.$$

Die Ableitung von Nr. 2) und 3) übergehe ich, weil sie im Wesentlichen auf Schlüssen derselben Art beruht, wie sie vorhin bei Entwickelung der Limitation für q' benutzt worden sind. Die Anwendbarkeit der Formel Nr. 3) geht übrigens, wie sich leicht zeigen lässt, nicht über die Zahl $K = 9 \cdot \frac{\pi}{2}$ hinaus, allein schon weit unterhalb derselben wird sie so unbequem, dass man lieber Nr. 1) benutzen wird. Selbst bei kleineren Werthen von K kann sie in Bezug auf Bequemlichkeit nicht concurriren mit der in Abschnitt 2 aufgeführten Reihe. Trotzdem haftet ihr doch ein besonderes Interesse an, nämlich dass bei ihr die Annäherung nicht, wie bei Nr. 1), eine einseitige ist, sondern eine oscillirende, so dass je zwei aufeinander folgende Näherungswerthe, indem sie den wahren Werth von q zwischen sich haben, stets über den Grad der erreichten Genauigkeit ein zuverlässiges Urtheil gestatten.

Bezüglich aller in diesem Abschnitte entwickelten Limitationsformeln wird man sich leicht die Gründe entwickeln können, weshalb es nicht erforderlich ist, stets genau mit den Werthen $q'_0 = 0$ oder $q_0 = 0$ anzufangen. Sodann ist auch unschwer einzusehen, dass sich für die Grösse q eine Relation ableiten liesse, welche genau dieselben Eigenschaften haben würde, wie die in Formel Nr. 1) für q' gegebene.

Durch vorstehende Erörterungen erscheint das Inversionsproblem für jeden beliebigen Werth des vollständigen elliptischen Integrals erster Art

gelöst. Nicht minder lässt sich aber auch, wie in einem folgenden Abschnitt erörtert werden soll, aus jedem vollständigen elliptischen Integral zweiter Art der reelle Modulus mit beliebiger Genauigkeit ermitteln.

Bonn. Dr. C. Isenkrahe.

II. Geometrische Sätze.

(Hierzu Taf. I Fig. 6—9.)

I.

a) Beschreiben wir um die vier, von vier geraden Linien gebildeten Dreiecke Kreise, so schneiden sich diese vier Kreise in einem und demselben Punkte, dem Brennpunkte der Parabel, welche die vier geraden Linien berührt. Diese vier Kreise bilden nun mit den vier geraden Linien acht Systeme von je vier Linien, und zwar ein System von vier Linien, sechs Systeme von je zwei Linien und zwei Kreisen, welche durch einen Punkt gehen, und ein System von vier in einem Punkte sich schneidenden Kreisen. Berühren nun die vier Linien von irgend einem solchen System einen Kreis, so existirt zu jedem der acht Systeme ein solcher Berührungskreis.

Zum Beweise dieses Satzes führen zwei Sätze, welche wir in Folgendem entwickeln wollen.

b) Zwei sich in C schneidende Kreise werden von einem dritten berührt und zwar in den Punkten A und B. Die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte, also AB, geht nun durch einen Aehnlichkeitspunkt O der beiden sich in C schneidenden Kreise, und zwar ist $OC^2 = OA.OB$. Beschreiben wir ferner um O einen durch C gehenden Kreis, so muss dieser den berührenden Kreis senkrecht schneiden. Dieser Kreis halbirt aber einen der Winkel der beiden durch C gehenden Kreise. Wir erhalten also als hinreichende Bedingung, dass ein Kreis, welcher einen andern Kreis berührt, zugleich noch einen zweiten den ersteren schneidenden Kreis berühren muss, dass die in Bezug auf ihn conjugirten Pole der beiden Schnittpunkte der zwei sich schneidenden Kreise auf einem Kreise liegen müssen, welcher einen der Winkel der beiden sich schneidenden Kreise halbirt und durch deren Schnittpunkte geht.

c) Legen wir durch den Schnittpunkt P zweier Tangenten PE und PD eines Kreises einen solchen, welcher den ersteren Kreis in einem Punkte C berührt, so bestimmt dieser Berührungskreis auf den Tangenten PD und PE zwei Punkte B und A so, dass AB einen festen Kreis berührt. Halbiren wir nämlich die zu den Sehnen PA und PB des durch P gehenden Kreises gehörigen Bögen in F und G, so finden wir, dass z. B. die beiden Berührungspunkte E und C mit F auf einer geraden Linie liegen, und zwar als Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise und der Linie PF. Ebenso liegen C, G und D auf einer geraden Linie. Hieraus erhalten wir sofort

die Relationen: $FP^2 = FC.FE$ und $GP^2 = GP.GD$, d. h. FG ist Potenzlinie des Punktes P und des ersten Kreises, halbirt also die Tangenten PE und PD. Diese Umstände ergeben uns aber sofort, dass der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABP als Schnittpunkt der zwei um F und G beschriebenen, durch P gehenden Kreise der Halbirungspunkt der Berührungssehne ED ist. Die Linie AB berührt also einen festen die beiden Linien PD und PE berührenden Kreis, dessen Mittelpunkt der Halbirungspunkt der Berührungssehne ED ist.

d) (Fig. 6.) Um nun den im Anfang erwähnten Satz zu erweisen, sollen die vier geraden Linien einen und denselben Kreis mit dem Mittelpunkte O berühren. Wir finden nun sofort, dass nach dem zweiten Hilfssatze z. B. die beiden durch E gehenden Kreise einen Kreis berühren müssen, welcher die beiden Linien EB und ED in zwei Punkten H und J berührt, und zwar so, dass HJ durch den Mittelpunkt O des gegebenen berührenden Kreises gehen und zu OE senkrecht stehen muss.

Da überdies O und E conjugirte Pole in Bezug auf den zu dem durch E gehenden System von Linien gehörigen Berührungskreise sind, so halbirt ein durch O, E und P gelegter Kreis einen der Winkel der beiden durch E gehenden Kreise. Wenden wir diese Schlussfolgerung auf irgend zwei andere der vier durch P gehenden Kreise an, so finden wir, dass nach dem ersten Hilfssatze O und P conjugirte Pole eines Kreises sein müssen, welcher irgend zwei der vier durch P gehenden Kreise berührt, d. h. O und P sind conjugirte Pole in Bezug auf einen Kreis, der die vier durch P gehenden Kreise berührt, oder mit anderen Worten, dass zu den vier durch P gehenden Kreisen ein gemeinsamer Berührungskreis existirt, dessen Mittelpunkt mit O und P auf einer geraden Linie liegt.

II.

In Bd. LXIX S. 332 von Grunert's Archiv giebt Herr Ehlert folgenden Satz: Beschreibt man um die vier, von vier geraden Linien gebildeten Dreiecke vier Kreise, so schneiden sich diese in einem Punkte, der mit den vier Mittelpunkten der Kreise auf einem Kreise liegt. Diesen Satz beweist Herr Ehlert auf analytischem Wege. Wir werden nun in Folgendem diesen Satz und eine Reihe von Eigenschaften dieses Kreises der vier Mittelpunkte, den wir kurz als Mittelpunktskreis bezeichnen wollen, geometrisch entwickeln und zugleich zeigen, dass derselbe in enger Beziehung zu dem Feuerbach'schen Kreise vom Dreieck steht. Wir werden ferner eine Reihe von Sätzen entwickeln, welche bei dem gleichzeitigen Auftreten mehrerer dieser Kreise giltig sind.

a) Es seien AB, BF, CD und AF (Fig. 7) irgend vier gerade Linien der Ebene und P der Schnittpunkt der vier, von den vier geraden Linien gebildeten Dreiecken umschriebenen Kreise. Die Mittelpunkte der Kreise seien ferner a_1, a_2, a_3 und a_4. Wir erhalten nun folgende Relationen:

$$\angle Ca_3P = 2.\angle CAP \text{ und } \angle Ba_4P = 2.\angle CAP,$$

da ja stets jeder Centriwinkel doppelt so gross ist als der zugehörige Peripheriewinkel. Nun halbiren aber die Linien a_3a_1 und a_4a_1 die Winkel Ca_3P und Ba_4P, d. h. es sind auch die Winkel a_1a_3P und a_1a_4P unter sich gleich, oder mit anderen Worten, a_1, a_3, a_4 und P liegen auf einem Kreise, dem Mittelpunktkreise. Auf diesem Kreise muss nun selbstverständlich auch a_2 liegen.

b) Errichten wir ferner auf ED und BA, also auf zwei der Strecken, in welche sich die vier Linien gegenseitig theilen und von denen keine drei Endpunkte in einer geraden Linie liegen, die Mittellothe, so schneiden sich diese in einem Punkte des Mittelpunktkreises. Wir finden nämlich, dass die beiden Halbirungslothe a_4b_1 und a_2b_1 einen Winkel $a_2b_1a_4$ miteinander bilden, der gleich dem Winkel BCD ist. Da jedoch auch $a_4a_1 \perp PB$ und $a_2a_1 \perp PD$ ist, so finden wir, dass $\angle a_2a_1a_4 = \angle BPD$ ist. Dieser letztere Winkel ist jedoch gleich dem Winkel BCD. Daraus ergiebt sich sofort, dass auch $\angle a_2a_1a_4 = \angle a_2b_1a_4$ ist, oder mit anderen Worten, dass b_1 auf dem Mittelpunktkreise liegt. Dies giebt sechs Punkte b.

c) Die um die Punkte a_1, a_2, a_3 und a_4 beschriebenen Kreise schneiden den Mittelpunktkreis ausserdem noch in den Punkten c_1, c_2, c_3 und c_4. Diese Punkte c liegen nun derart, dass z. B. C, a_3 und c_1 in einer geraden Linie liegen, dass also der Satz giltig ist:

> Verbindet man einen der sechs Schnittpunkte der vier geraden Linien mit dem Mittelpunkte eines der beiden durch diesen Punkt gehenden Kreise, so schneidet diese Linie den Mittelpunktkreis in einem Punkte des zweiten durch den Punkt gehenden Kreises zum zweiten Mal.

Es ergeben sich uns nämlich folgende Relationen:

$$\angle Cc_1P = \angle CDP$$

und

$$\angle a_3c_1P = 2R - \angle a_3a_4P = 2R - \tfrac{1}{2}\angle Aa_4P$$
$$= 2R - \angle AFP = \angle EDP,$$

d. h. es sind

$$\angle Cc_1P + \angle a_3c_1P = 2R$$

oder a_3, c_1 und C sind Punkte einer geraden Linie.

d) Diese letzteren Punkte c, die vier Mittelpunkte a und der Punkt P stehen nun in einem interessanten Zusammenhang mit dem Feuerbach-schen Kreise des Dreiecks. Um diesen Umstand zu erläutern, wollen wir zunächst die Beziehungen untersuchen, die eintreten, wenn, wie in Fig. 7 angenommen wird, vier der sechs Schnittpunkte der vier geraden Linien auf einem Kreise liegen. In Fig. 7 ist dies der Fall mit den Punkten A, B, D und E.

Wir finden zunächst sofort, dass der Punkt P auf der Linie CF liegen muss und dass der Mittelpunkt b_1 des durch die Punkte A, B, D und E

gehenden Kreises aus der Vereinigung von zwei Punkten b entsteht, also ein Punkt des Mittelpunktkreises ist. Wir finden ferner die Relationen:

$$\angle a_3 a_1 b_1 = \angle PFD = \angle PAB = \angle a_1 a_3 P,$$

d. h.: die Linie $a_1 a_3$ wird parallel zu Pb_1. Da jedoch $a_1 a_3 \perp CF$ ist, so ist auch $b_1 P \perp CF$. Ferner ist der Schnittpunkt O der beiden Diagonalen AD und BE der Pol der Linie CF in Bezug auf den durch A, B, D und E gelegten Kreis, d. h. die Linie $b_1 P$ geht durch O. Aus diesem Umstande ergiebt sich uns jedoch sofort, dass O auch ein Punkt gleicher Potenz in Bezug auf den letzterwähnten Kreis und den Mittelpunktkreis ist, also auf der gemeinsamen Sehne dieser Kreise liegen muss, oder dass HJ durch O geht. Wir haben überdies gefunden, dass $b_1 P \perp CF$ ist. Daraus folgt, dass die Mittelpunkte der beiden zuletzt erwähnten Kreise und der zweite Schnittpunkt der Linie CF mit dem Mittelpunktkreise, also b_1, g und K in einer geraden Linie liegen.

Werden nun die Linien CE und BF senkrecht zu den Linien AF und AC, so fällt Pb_1 mit der Linie AD zusammen und wird zu der durch A gehenden Höhe des Dreiecks ACF, die Linie HJ fällt mit der Linie BE zusammen und die Punkte c_1 und c_4 vereinigen sich in B, die Punkte c_2 und c_3 in E. Die Punkte a_1, a_2, a_3, b_1, K werden die Halbirungspunkte der Strecken CD, DF, AC, AF und CF und der Mittelpunktkreis selbst wird der Feuerbach'sche Kreis von jedem der aus dreien der Punkte A, C, D und F gebildeten Dreiecke.

e) Kehren wir wieder zu dem allgemeinen Falle zurück und ziehen die Linie PA, so finden wir, dass folgende Gleichungen giltig sind:

$$\sin PAC : \sin PAF = PB : PF = PC : PE.$$

Da jedoch ferner die beiden Dreiecke PBC und PEF ähnliche Dreiecke sind, so verhält sich auch:

$$PB : PF = BC : EF = PC : PE.$$

Hieraus erhalten wir jedoch die Relation:

$$\sin PAC : \sin PAF = BC : EF,$$

d. h. wir erhalten folgenden Satz:

> Verbindet man einen Schnittpunkt zweier der vier Linien mit dem gemeinsamen Schnittpunkte der vier, den von den Linien gebildeten Dreiecken umschriebenen Kreise, so theilt dieser den Winkel der beiden Linien in zwei Theile, deren Sinus sich wie die Abschnitte, welche die beiden anderen Linien auf den ersteren bilden, verhalten.

f) Die Linien PA, PB, PC, PD, PE und PF sollen ferner den Mittelpunktkreis in den Punkten d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 und d_6 schneiden. Beschreiben wir nun um einen dieser Punkte d, etwa d_1, einen Kreis, der durch den d_1 entsprechenden Schnittpunkt A geht, so geht dieser Kreis auch durch zwei Punkte c, und zwar durch diejenigen Punkte c, welche

auf den durch den Schnittpunkt gehenden Kreisen liegen, in unserem Beispiele also durch c_3 und c_4.

Aus dem Umstande, dass A, a_3 und c_4 in einer geraden Linie liegen und $a_3A = a_3P$, und somit $\angle a_3c_4d_1 = \angle a_3Pd_1 = \angle a_3Ad_1$ ist, finden wir nämlich, dass $d_1A = d_1c_4$ wird.

Wir erhalten auf diese Art im Ganzen sechs neue Kreise. Betrachten wir z. B. die durch A und F gehenden Kreise, so finden wir, dass dieselben mit dem um das Dreieck ABF beschriebenen Kreise einen Punkt c_4 gemein haben. Da überdies die Mittelpunkte dieser drei Kreise auf einem Kreise liegen, der ebenfalls durch c_4 geht, nämlich auf dem Mittelpunktkreise, so folgt, dass deren übrige Schnittpunkte A, L und F auf einer geraden Linie liegen. (Vergl. Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. Eb. I, Art. 134 Aufg. 7.) Durch denselben Punkt L muss jedoch auch der um d_5 durch E beschriebene Kreis gehen. Wir erhalten also auf den vier geraden Linien vier Punkte, in welchen sich je drei Kreise schneiden.

Untersuchen wir ferner das Dreieck BCD näher, so finden wir, dass auf dessen Seiten die Punkte M, N und Q derart liegen, dass die vier um die Dreiecke BNM, BDC, MQC und NDQ beschriebenen Kreise sich in einem Punkte schneiden. Daraus ergiebt sich uns jedoch, dass M, N und Q Punkte einer geraden Linie sind. Wir finden also, dass die Punkte M, N, Q und L auf einer geraden Linie liegen.

Die Linie MN bildet nun mit den vier ersteren Linien fünf Vierseite, welche den Mittelpunktkreis gemein haben. Berücksichtigen wir ferner den Umstand, dass sämmtliche fünf Vierseite denselben Mittelpunktkreis besitzen und dass P der Brennpunkt einer Parabel ist, welche die vier ersten Linien berührt so finden wir, dass es möglich ist, zu vier Linien stets eine fünfte zu construiren, welche mit den ersteren vier die Eigenschaft besitzt, dass die Mittelpunktkreise von je vier dieser Linien zusammenfallen, die Brennpunkte der fünf Parabeln, welche je vier der fünf geraden Linien berühren, also auf einem Kreise liegen.

g) Wir wollen in Folgendem untersuchen, welchen Beziehungen die Mittelpunktkreise und die Brennpunkte der berührenden Parabeln unterworfen sind, welche zu je vier von fünf Linien gehören.

Sind die fünf geraden Linien AB, BC, CD, DE und EA und sind P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 (Fig. 8) die fünf Brennpunkte der Parabeln, so finden wir, dass z. B. $\angle P_1P_2A = \angle P_1BK$ ist, da ja ABP_1P_2 ein Kreisviereck ist. Ebenso $\angle AP_2P_3 = \angle P_3EH$ und $\angle GEP_3 = \angle P_3P_4D$. Hieraus ergiebt sich uns, dass:

$$\angle P_1P_2P_3 = \angle P_1BK + \angle P_3EH$$

ist. Wir haben jedoch ferner folgende Gleichungen:

$$\angle DP_4C = \angle DJC,$$

$$\angle P_1P_4C = \angle P_1HD = \angle KAP_1 = \angle P_1BK - \angle AP_1B = \angle P_1BK - \angle AFB,$$

also auch:

$$\angle P_1 P_4 P_3 = \angle P_3 E G + \angle D J C + \angle A F B - \angle P_1 B K.$$

Durch Addition der Werthe für $P_1 P_2 P_3$ und $P_1 P_4 P_5$ erhalten wir hieraus:

$$\begin{aligned} \angle P_1 P_2 P_3 + \angle P_1 P_4 P_3 &= \angle P_3 E G + \angle P_3 E H + \angle D J C + \angle A F B \\ &= \angle F E J + \angle E J F + \angle J F E \\ &= 2R, \end{aligned}$$

da ja die letzteren Winkel die Winkel eines Dreiecks sind. Wir finden also, dass $P_1 P_2 P_3 P_4$ ein Kreisviereck ist und es ergiebt sich uns also folgender bekannter Satz:

Die fünf Brennpunkte der Parabeln, welche je vier von fünf geraden Linien berühren, liegen auf einem Kreise.

h) Da ferner $ah \perp A P_2$, also $\angle P_2 a A = 2 \angle P_2 a h$ und somit auch $P_2 P_1 a = \frac{1}{2} \angle P_2 a A$ ist, ergiebt sich uns, dass $\angle P_2 P_1 A = \angle h a P_2$ wird. Ebenso finden wir, da $hc \perp E P_5$ ist, dass $\angle h f P_3 = \angle E D P_3 = \angle E H P_3 = \angle A P_1 P_3$ ist. Hieraus ergiebt sich uns sofort, dass die Summe der Peripheriewinkel über den Bögen $P_2 h$ und $P_3 H$ der zwei durch h gehenden Mittelpunktkreise gleich dem Winkel $P_2 P_1 P_3$ ist. Daraus folgt, dass sich die beiden Mittelpunktkreise in einem Punkte H des Brennpunktkreises schneiden, d. h. wir erhalten den Satz:

Die fünf Mittelpunktkreise, welche zu je vier von fünf Linien gehören, schneiden sich in einem Punkte, welcher mit den fünf Brennpunkten der je vier dieser Linien berührenden Parabeln auf einem Kreise liegt.

Bevor wir diese Gebilde verlassen, wollen wir auf einen Umstand noch aufmerksam machen. Wir haben nämlich gefunden, dass zu vier Linien vier und ein Punkt gehören, welche auf einem Kreise liegen, nämlich die Punkte a und der Punkt P, und dass ebenso vier und ein Kreis sich in einem Punkte P schneiden. Wir finden ferner, dass bei fünf Linien fünf und ein Punkt auf einem Kreise liegen und dass fünf und ein Kreis sich in einem Punkte schneiden.

Diese Umstände machen es wahrscheinlich, dass nun für sechs Linien die sechs Brennpunktkreise sich in einem Punkte schneiden und dass durch diesen Punkt ein weiterer Kreis geht, auf dem sechs Punkte liegen, die dem Punkte X entsprechen, und dass überhaupt diese Sätze sich ins Unendliche fortsetzen lassen.

i) Es seien irgend vier Punkte A, B, C, D miteinander durch gerade Linien verbunden. Die Verbindungslinien dieser Punkte bilden nun drei Vierseite. Beschreiben wir um die Dreiecke dieser Vierseite Kreise, so schneiden sich diese je zu vieren in drei Punkten P_1, P_2, P_3. Diese Punkte P liegen nun so, dass sich die Verbindungslinien derselben mit den Ecken viermal zu dreien in einem Punkte schneiden. In Fig. 9 ist dies z. B. der Fall mit den Linien $P_1 A$, $P_2 B$ und $P_3 C$.

Wir wissen nämlich, dass nach II. e) folgende Relationen giltig sind:

$$\frac{\sin P_1 AB}{\sin P_1 AC}=\frac{BG}{CF},\quad \frac{\sin P_2 BC}{\sin P_2 BA}=\frac{CE}{AG}\quad\text{und}\quad \frac{\sin P_3 CA}{\sin P_3 CB}=\frac{AF}{BE}.$$

Die Multiplication dieser drei Gleichungen ergiebt uns:

$$\frac{\sin P_1 AB}{\sin P_1 AC}\cdot\frac{\sin P_2 BC}{\sin P_2 BA}\cdot\frac{\sin P_3 CA}{\sin P_3 CB}=\frac{BG}{CF}\cdot\frac{CE}{AG}\cdot\frac{AF}{BE}=1.$$

Die letztere Gleichung drückt aber bekanntlich die Bedingung aus, dass die drei Linien $P_1 A$, $P_2 B$ und $P_3 C$ sich in einem Punkte schneiden.

Ganz ebenso ergiebt sich, dass sich auch $P_1 D$, $P_3 B$, $P_2 C$; $P_1 B$, $P_3 D$, $P_2 A$; $P_1 C$, $P_3 A$ und $P_2 D$ je in einem Punkte schneiden.

k) Construiren wir in Bezug auf die Vierseite die drei Mittelpunktkreise, so finden wir, dass diese sich in einem Punkte X schneiden.* Errichten wir nämlich z. B. auf AD nnd BC, also auf zwei Linien, welche die vier Punkte A, B, C und D enthalten, die Halbirungslothe ab und eb, so liegt deren Schnittpunkt b auf zweien der drei Mittelpunktkreise [nach II. b)]. Auf diese Art erhalten wir drei Schnittpunkte b, c und f der drei Mittelpunktkreise. Wir finden ferner, dass $\angle bmc + \angle ACB = 2R$ sind, da ja $bm \perp BC$ und $mc \perp AC$ sind. Da überdies kn als Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden, den Dreiecken BCF und ADF umschriebenen Kreise senkrecht auf $P_3 F$ und ebenso $nb \perp P_3 A$ steht, so ergiebt sich uns, dass $\angle knb = \angle FP_3 A = \angle ADF$ wird. Berücksichtigen wir ferner noch, dass der Peripheriewinkel über dem Bogen bc des Mittelpunktkreises durch P_3, also der Winkel blc, gleich der Differenz der Winkel cmb und lnk ist, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\angle blc &= 2R - \angle ACB - \angle ADF\\ &= \angle BDA - \angle ABC.\end{aligned}$$

Ganz ebenso finden wir für die Winkel über den Bögen bf und fc die Relationen:

Periph.-W. über Bogen fc ist $= \angle BDC - \angle BAC$,
" " " " bf " $= \angle ADC - \angle ABC$.

Aus den drei Werthen dieser letzteren Winkel folgt aber sofort, dass sich die drei Mittelpunktkreise in einem Punkte X schneiden müssen.

Wir wollen noch hinzufügen, dass auch die Punkte X, P_1, P_2 und P_3 ebenfalls auf einem Kreise liegen, ohne jedoch einen Beweis, der sich ziemlich einfach ergiebt, anzufügen.

Weingarten (Württemb.). BENEDIKT SPORER,
Professoratscandidat.

III. Ein Minimum-Problem.

Es sei $\varphi(x, y, z)$ eine homogene Function n^{ter} Dimension dreier Variabelen. Dann ist, wenn x, y, z die Coordinaten des Berührungspunktes bedeuten und $D_x\varphi = p$, $D_y\varphi = q$, $D_z\varphi = r$ gesetzt wird:

* Vergl. Dr. H. Böklen, Math.-naturw. Mittheilungen, Heft 1 S. 66—67.

$$p(\xi-x)+q(\eta-y)+r(\zeta-z)=0$$

die Gleichung einer Tangentialebene der Fläche $\varphi=C$. Werden die Parameter dieser Ebene (ihre Abschnitte auf den im positiven Sinne genommenen Axen der ξ, η, ζ), nämlich $\frac{px+qy+rz}{p}$, $\frac{px+qy+rz}{q}$, $\frac{px+qy+rz}{r}$, für welche wegen der Homogenität von φ: $\frac{nC}{p}$, $\frac{nC}{q}$, $\frac{nC}{r}$ gesetzt werden kann, bezw. mit t, u, v bezeichnet, so geht ihre Gleichung über in

$$\frac{\xi}{t}+\frac{\eta}{u}+\frac{\zeta}{v}=1 \equiv (1)\, p\xi+q\eta+r\zeta=nC.^{*}$$

Das Coordinatensystem ist schiefwinklig und es wird $\angle(\eta,\zeta)$ mit α, $\angle(\xi,\zeta)$ mit β, $\angle(\xi,\eta)$ mit γ bezeichnet, sowie $\angle(\zeta,\xi\eta)$ mit i.**

Es soll nun diejenige Tangentialebene ermittelt werden, die von dem Trieder der Coordinatenebenen das kleinste Tetraeder abschneidet.

Da das Volumen eines durch die Ebene $\frac{\xi}{t}+\frac{\eta}{u}+\frac{\zeta}{v}=1$ von diesem Trieder abgeschnittenen Tetraeders $\frac{1}{6}tuv\sin\gamma\sin i$ ist, so hat man hier:

$$V=\frac{1}{6}\frac{n^3C^3\sin\gamma\sin i}{pqr}.$$

Es sind mithin die Bedingungen aufzustellen, unter denen $pqr=P$ ein Maximum wird.*** Demnach ist

$$rD_xP-pD_zP=0,\quad rD_yP-qD_zP=0$$

oder auch, hieraus abgeleitet,

$$qD_xP-pD_yP=0.$$

Es ist aber $D_xq=D_yp$, $D_xr=D_zp$, $D_yr=D_zq$. Die vorstehenden Gleichungen lassen sich also schreiben:

$$rD_xP-PD_xr=pD_zP-PD_zp,\quad rD_yP-PD_yr=qD_zP-PD_zq \text{ u. s. w.}$$

oder

$$r^2D_x\left(\frac{P}{r}\right)=p^2D_z\left(\frac{P}{p}\right),\quad r^2D_y\left(\frac{P}{r}\right)=q^2D_z\left(\frac{P}{q}\right) \text{ u. s. w.}$$

Also ist

$$r^2D_x(pq)=p^2D_z(qr),\quad r^2D_y(pq)=q^2D_z(pr)$$

und

$$q^2D_x(pr)=p^2D_y(qr)$$

oder

---

* Die Bedingungsgleichung der Homogenität von $\varphi=C$ ist somit, wenn p, q, r die angegebene Bedeutung haben, auch die Gleichung der Tangentialebene.

** Bekanntlich ist $\sin i=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\gamma}$ oder $\frac{2\Pi}{\sin\gamma}$, wo Π den sogenannten Eckensinus bedeutet.

*** Von einem Minimum des P kann, da V unbegrenzt wächst, nicht die Rede sein.

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} & r^2(pD_xq+qD_xp)=p^2(qD_zr+rD_zq),\\ & r^2(pD_yq+qD_yp)=q^2(pD_zr+rD_zp)\\ &\text{und}\\ & q^2(pD_xr+rD_xp)=p^2(qD_yr+rD_yp). \end{aligned}\right.$$

Hierzu kommt noch die Bedingungsgleichung der Homogenität mit ihren Derivirten:

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} & px+qy+rz=\quad nC,\\ & yD_xq+zD_xr=-D_x(px),\\ & xD_yp+zD_yr=-D_y(qy),\\ & xD_zp+yD_zq=-D_z(rz). \end{aligned}\right.$$

Setzt man $px=\psi$, $qy=\chi$, $rz=\varrho$, so ergiebt sich aus den drei letzten der Gleichungen 3):

$$D_xq=D_yp=\frac{zD_z\varrho-yD_y\chi-xD_x\psi}{2xy},$$

$$D_xr=D_zp=\frac{yD_y\chi-xD_x\psi-zD_z\varrho}{2xz},$$

$$D_yr=D_zq=\frac{xD_x\psi-yD_y\chi-zD_z\varrho}{2yz}$$

und es ist ausserdem

$$D_xp=\frac{xD_x\psi-\psi}{x^2},\quad D_yq=\frac{yD_y\chi-\chi}{y^2},\quad D_zr=\frac{zD_z\varrho-\varrho}{z^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in 2), so nehmen die Gleichungen 2) folgende Form an:

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} & x\varrho(2\chi\varrho-\psi\varrho-\psi^2)D_x\psi+y\psi\varrho(\psi-\varrho)D_y\chi\\ & -z\psi(2\psi\chi-\psi\varrho-\varrho^2)D_z\varrho+2\psi\chi\varrho(\psi-\varrho)=0,\\ & x\chi\varrho(\chi-\varrho)D_x\psi+y\varrho(2\psi\varrho-\chi^2-\varrho^2)D_y\chi\\ & -z\chi(2\psi\varrho-\chi\varrho-\chi^2)D_z\varrho+2\psi\chi\varrho(\chi-\varrho)=0. \end{aligned}\right.$$

Diesen Gleichungen wird durch $\psi=\chi=\varrho$ genügt, so dass also die gesuchte Bedingung für das Minimum des Tetraedervolumens

$$5)\qquad xD_x\varphi=yD_y\varphi=zD_z\varphi$$

ist. Wegen der ersten der Gleichungen 3) ist jeder dieser Werthe $=\frac{nC}{3}$, also auch p oder $D_x\varphi=\frac{nC}{3x}$, q oder $D_y\varphi=\frac{nC}{3y}$, z oder $D_y\varphi=\frac{nC}{3z}$, und daher $t=3x$, $u=3y$, $v=3z$.

Es ist aber auch, wenn x_0, y_0, z_0 den Schwerpunkt des Schnittdreiecks der Tangentialebene bedeutet, $t=3x_0$, $y=3y_0$, $v=3z_0$. Mithin hat man $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, d. h.:

Das Minimaltetraeder wird vom Trieder (der Coordinatenebenen) durch diejenige Tangentialebene abgeschnitten, deren Berührungspunkt der Schwerpunkt des zugehörigen Schnittdreiecks ist.

Das V des Minimaltetraeders geht über in $\frac{9}{2}\,xyz\sin\gamma\sin i$.

Beispiele.

1. Die Fläche $\varphi = C$ sei das auf zugeordnete Durchmesser bezogene Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hier ist $xD_x\varphi = \frac{x^2}{a^2}$, $yD_y\varphi = \frac{y^2}{b^2}$, $zD_z\varphi = \frac{z^2}{c^2}$,* also

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3},$$

$$x = x_0 = a\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad y = y_0 = b\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad z = z_0 = c\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Minimal-Tangentialebene:

$$\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + \frac{\zeta}{c} = \sqrt{3}.$$

Volumen des Minimaltetraeders:

$$= \tfrac{1}{2} abc\sqrt{3} \sin\gamma \sin i.$$

(Ist leicht auf die Kugel zu übertragen.)

2. Die Fläche sei das Hyperboloid

$$axy + bxz + cyz = d^2.$$

Dann ist

$$xD_x\varphi = axy + bxz, \quad yD_y\varphi = axy + cyz, \quad zD_z\varphi = bxz + cyz;$$

also:

$$bx = cy, \quad ax = cz, \quad ay = bz$$

und sodann

$$x = x_0 = d\sqrt{\frac{c}{3ab}}, \quad y = y_0 = d\sqrt{\frac{b}{3ac}}, \quad z = z_0 = d\sqrt{\frac{a}{3bc}}.$$

Minimal-Tangentialebene:

$$\frac{\xi}{\sqrt{\frac{c}{ab}}} + \frac{\eta}{\sqrt{\frac{b}{ac}}} + \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{a}{bc}}} = d\sqrt{3}.$$

Volumen des Minimaltetraeders:

$$\frac{1}{2}\frac{d^3\sqrt{3} \sin\gamma \sin i}{\sqrt{abc}}.$$

---

* Hier sind $D_x q$ oder $D_y p = D_x r$ oder $D_z p = D_y r$ oder $D_z q = 0$. Wo dies stattfindet, gestaltet sich die obige Rechnung sehr einfach. Die Gleichungen 2) reduciren sich dann nämlich auf

$$r^2 D_x p = p^2 D_z r, \quad r^2 D_y q = q^2 D_z r$$

und die drei letzten Gleichungen 3) auf

$$D_x p = \frac{-p}{x}, \quad D_y q = \frac{-q}{y}, \quad D_z r = \frac{-r}{z},$$

wodurch erstere übergehen in

$$\frac{r}{x} = \frac{p}{z}, \quad \frac{r}{y} = \frac{q}{z} \text{ oder } \psi = \chi = \varrho.$$

3. Die Flächengleichung sei:

$$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}=d,$$

$$xD_x\varphi=\frac{a}{2}\sqrt{x} \text{ u. s. w.};$$

$$a\sqrt{x}=b\sqrt{y}=c\sqrt{z}=\frac{d}{3};$$

$$x=x_0=\frac{d^2}{9a^2}, \quad y=y_0=\frac{d^2}{9b^2}, \quad z=z_0=\frac{d^2}{9c^2}.$$

Minimal-Tangentialebene:

$$a^2\xi+b^2\eta+c^2\zeta=\frac{d^2}{3}.$$

Volumen des Minimaltetraeders:

$$\frac{d^6 \sin\gamma \sin i}{162\,a^2b^2c^2}.*$$

Auch für die durch einen festen Punkt gehenden Ebenen gilt der Satz, dass diejenige unter ihnen das Minimaltetraeder abschneidet, bei welcher jener feste Punkt zugleich der Schwerpunkt des Schnittdreiecks ist. Hier hat man, wenn $\frac{x}{t}+\frac{y}{u}+\frac{z}{v}-1=f$ gesetzt wird, und da $V=\frac{1}{6}tuv\sin\gamma\sin i$ ist, wegen

$$D_tV.D_vf-D_vV.D_tf=0, \quad D_uV.D_vf-D_vV.D_uf=0:$$

$$\frac{1}{6}uv\sin\gamma\sin i\cdot\frac{-z}{v^2}-\frac{1}{6}tu\sin\gamma\sin i\cdot\frac{-x}{t^2}=0$$

und

$$\frac{1}{6}tv\sin\gamma\sin i\cdot\frac{-z}{v^2}-\frac{1}{6}tu\sin\gamma\sin i\cdot\frac{-y}{u^2}=0$$

oder

$$xv-zt=0, \quad yv-zu=0$$

oder endlich

$$\frac{x}{t}=\frac{y}{u}=\frac{z}{v}.$$

Aus $f=0$ folgt dann

$$t=3x, \quad u=3y, \quad z=3v$$

oder

$$x_0=x, \quad y_0=y, \quad z_0=z.$$

---

* Bei der Fläche $\xi\eta\zeta=a^3$ wird die Rechnung resultatlos, indem hier $xD_x\varphi=yD_y\varphi=zD_z\varphi$ identisch x, y, z werden. Für diese Fläche existirt aber auch (vergl. Magnus, Aufgabensammlung aus der analyt. Geometrie des Raumes) kein Minimaltetraeder; vielmehr schneiden hier die Tangentialebenen Tetraeder von gleichem Volumen ab. Auch berühren bei derselben, wie ich im Programm 1874 des Gymnasiums zu Liegnitz S. 13 gezeigt habe, sämmtliche Tangentialebenen die Fläche in den Schwerpunkten der Schnittdreiecke des Trieders.

Liegnitz. Dr. O. Bermann.

IV. Bemerkungen zu Besser: „Ueber die Vertheilung der Elektricität auf einem Cylinder."

Die Literaturangaben in der Einleitung der Arbeit des Herrn Besser erwähnen nicht die werthvolle Arbeit von Karl Baer: „Die Function des parabolischen Cylinders" (Programm des Gymnasiums zu Cüstrin 1883), welche die Integration der Potentialgleichung für einen wulstförmigen Körper leistet, der durch Abbildung eines geraden parabolischen Cylinders mit Hilfe reciproker Radien oder auch dadurch entsteht, dass man vom Rückkehrpunkte einer Cardioide an diese alle Radienvectoren zieht und über denselben als Durchmesser Kreise senkrecht zur Ebene der Cardioide beschreibt. Herr Besser scheint diese Arbeit nicht gekannt zu haben; er würde sonst sicher nicht versäumt haben, durch eine leichte Verallgemeinerung der Baer'schen Arbeit dem Resultat auf S. 260 folgende Form zu geben:

„Die Differentialgleichung des Potentials $\Delta V = 0$ lässt sich bei Körpern, begrenzt von Cylinderflächen zweiten Grades und den aus diesen durch die Transformation mittels reciproker Radien entstehenden auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduciren."

Der Beweis für diesen Zusatz ist leicht zu führen.

Wird die Fläche $F(xyz) = 0$ vom Anfangspunkt der Coordinaten aus durch reciproke Radien abgebildet, so ist zu setzen:

$$x = \frac{c^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad y = \frac{c^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad z = \frac{c^2 \zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

$c = const.$ und $r . \varrho = c^2$, wenn

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

ist. Der Ausdruck ΔV, auf krummlinige orthogonale Coordinaten transformirt, ergiebt nach Lamé (Leçons sur les coordinées curvilignes, S. 22, Paris 1859):

$$\frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = h_1 . h_2 . h_3 \left\{ \frac{\partial \frac{h_1}{h_2 h_3} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \frac{h_2}{h_3 h_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial \frac{h_3}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho_3}}{\partial \varrho_3} \right\}.$$

Setzt man nun $\varrho_1 = \xi$, $\varrho_2 = \eta$, $\varrho_3 = \zeta$ und folglich $h_1 = h_2 = h_3 = \frac{\varrho^2}{c^2}$, so ist:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\varrho^6}{c^6} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{c^2}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{c^2}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{c^2}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) \right\}.$$

Führt man in die runden Klammern statt $\frac{c}{\varrho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi}$ das ihm gleiche $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{c}{\varrho} V \right) - c V \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi}$ und die analogen Ausdrücke ein und bedenkt, dass $\Delta \frac{1}{\varrho} = 0$ ist, so folgt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\varrho^5}{c^5}\cdot\left\{\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{c}{\varrho}V\right)+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{c}{\varrho}V\right)+\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(\frac{c}{\varrho}V\right)\right\}.$$

Ist demnach die linke Seite gleich 0, so ist es auch die Klammer auf der rechten Seite, d. h.: ist die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen für einen Körper, begrenzt von einer Cylinderfläche zweiten Grades mit der Gleichung $F(xyz)=0$, gelungen und ist das Potential $V(xyz)$, so gelingt sie auch für den von der inversen Fläche begrenzten Körper:

$$F\left(\frac{c^2\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\ \frac{c^2\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\ \frac{c^2\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)=0$$

und das Potential ist:

$$\frac{c}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\,V\left(\frac{c^2\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\ \frac{c^2\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\ \frac{c^2\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right).$$

Dem geraden elliptischen Cylinder:

$$\frac{y^2}{c^2.\cos^2 iu}+\frac{z^2}{c^2(\cos^2 iu-1)}=1$$

entspricht demnach die Fläche:

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2=\frac{\eta^2}{c^2.\cos^2 iu}+\frac{\zeta^2}{c^2(\cos^2 iu-1)},$$

welche die Einhüllende aller Kugeln ist, deren Mittelpunkte auf der Ellipse $4c^2\cos^2 iu.y^2+4c^2(\cos^2 iu-1)z^2=1$ liegen und deren Oberflächen durch den Mittelpunkt dieser Ellipse gehen (Schlömilch, Uebungsbuch, I, § 26 Aufg. 5).

Dem geraden hyperbolischen Cylinder:

$$\frac{y^2}{c^2\cos^2 t}-\frac{z^2}{c^2\sin^2 t}=1,$$

ist beigeordnet die Fläche:

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2=\frac{\eta^2}{c^2\cos^2 t}-\frac{\zeta^2}{c^2\sin^2 t},$$

welche in ähnlicher Weise erzeugt werden kann; dem geraden parabolischen Cylinder:

$$y^2=-4c^3z+4c^4,$$

die Fläche:

$$\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\frac{\zeta}{2c^3}\right)^2=\frac{1}{4c^4}(\eta^2+\zeta^2)$$

(Programmabhandlung des Herrn Karl Baer); endlich dem Kreiscylinder:

$$y^2+z^2=c^2,$$

der Kreiswulst:

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2=\frac{1}{c^2}(\eta^2+\zeta^2).$$

Duisburg. Dr. Haentzschel.

V. Synthetische Theorie der Krümmung der Flächen zweiter Ordnung.

(Hierzu Taf. I Fig. 10—15.)

Der Zweck der folgenden Arbeit ist, die hauptsächlichsten Sätze über die Krümmung der Flächen zweiter Ordnung auf geometrischer Grundlage, ohne Zuhilfenahme von kinematischen Betrachtungen* oder von Linienelementen zu entwickeln.

Für die Curven zweiter Ordnung ist durch den Satz von Steiner** und die Arbeit von Herrn Pelz*** eine synthetische Ableitung der Sätze über Krümmung vollständig geleistet; Herr Pelz hat gezeigt, dass in dem Satze von Steiner sämmtliche bisher bekannte Krümmungshalbmesserconstructionen der Kegelschnitte enthalten sind. In analoger Weise soll im Folgenden versucht werden, die Sätze über die Krümmung der Flächen und deren Zusammenhang mit der Indicatrice durch synthetisch-geometrische Ueberlegungen einfach herzuleiten.

Es möge ein Satz über Flächen 2. Ordnung vorausgeschickt werden.

Man denke sich eine Fläche zweiter Ordnung, in einem Punkte P derselben (Fig. 10) eine feste Tangente PT und durch diese Tangente alle möglichen Ebenen gelegt, welche die Fläche nach Curven zweiter Ordnung $PQ_1A_1B_1$, $PQ_2A_2B_2$ etc. mit der gemeinschaftlichen Tangente PT schneiden und ausserdem senkrecht zur Tangente PT eine Schnittebene $PA_1A_2\ldots$, welche die zu P gehörigen Normalen PN_1A_1, PN_2A_2 etc. und folglich auch die Krümmungsmittelpunkte aller dieser Schnittcurven enthalten wird.

Die Mittelpunkte M_1, M_2, ... aller dieser Schnittcurven werden zunächst in einer Ebene $PB_1B_2\ldots$ liegen — der zu der Richtung PT gehörigen Diametralebene der Fläche zweiter Ordnung, der Polarebene des unendlich fernen Punktes der Richtung PT.

Ferner wird behauptet, dass die Quadrate derjenigen Halbdurchmesser M_1Q_1, M_2Q_2, ... der verschiedenen Schnitte, welche alle der Tangente PT parallel sind, sich verhalten wie die Abstände d_1, d_2, ... der Mittelpunkte M_1, M_2, ... von der Tangentialebene in P.

Um dies einzusehen, betrachte man zunächst die Curve zweiter Ordnung Fig. 11, in welcher PS eine Tangente in P ist; durch P ist eine Sehne gezogen mit dem Mittelpunkte M_2 und durch den Mittelpunkt M_1 der Curve der zu PM_2 parallele Halbmesser M_1P_1. Hier verhalten sich die Quadrate von

---

* Mannheim, Géométrie descriptive, p. 276.

** Schröter, Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften, 2. Abschn. letzter Artikel.

*** Pelz, Die Krümmungshalbmesser-Constructionen der Kegelschnitte als Corollarien eines Steiner'schen Satzes. Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch., April 1879.

M_1P_1 und M_2P wie $M_1S:M_2S$* oder auch wie die Abstände e_1 und e_2 der Punkte M_1 und M_2 von der Tangente in P. Denkt man sich die Ebene dieser Curve gegen eine die Curve in P berührende Ebene E unter dem Winkel γ geneigt (Fig. 12), so verhält sich auch $M_1P_1^2:M_2P^2$ wie die Abstände d_1 und d_2 der Punkte M_1 und M_2 von der Ebene E, da $d_1:d_2 = e_1 \sin\gamma : e_2 \sin\gamma$.

Dies vorausgeschickt, kehre man zur Fig. 10 zurück. Es handle sich um die beiden Schnitte $PQ_1A_1B_1$ und $PQ_2A_2B_2$, wovon der erstere durch den Mittelpunkt M_1 der Fläche gelegt sei. Alle Schnitte der Fläche parallel der Ebene des Schnittes $PQ_2A_2B_2$ sind ähnlich und ähnlich gelegen; denkt man sich also noch durch M_1 eine Parallele M_1P_1 zu M_2P gezogen, welche die Fläche in P_1 schneidet (und in der Diametralebene $PM_1M_2B_1B_2$ enthalten ist), so ist $M_1Q_1:M_2Q_2 = M_1P_1:M_2P$, und nach dem Vorhergehenden verhält sich also $M_1Q_1^2:M_2Q_2^2$ wie die Abstände $d_1:d_2$ der Punkte M_1 und M_2 von der Tangentialebene in P, womit die obige Behauptung erwiesen ist. Alles zusammengefasst, hat man also folgendes Resultat:

Satz. Legt man durch eine feste Tangente PT, welche in einem Punkte P einer Fläche zweiter Ordnung gezogen ist, alle möglichen Schnittebenen, so liegen die Mittelpunkte aller der Schnittcurven zweiter Ordnung in derselben Ebene; die Abstände dieser Mittelpunkte von der Tangentialebene in P verhalten sich wie die Quadrate der zu PT parallelen Halbdurchmesser der einzelnen Schnitte.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich der Satz von Meunier und aus diesem der Satz von Euler in Verbindung mit den Beziehungen zur Indicatrice folgendermassen leicht ableiten.

1.

Es liege wiederum eine Fläche zweiter Ordnung vor. Auf derselben denke man sich einen Punkt P und eine Tangente PT in diesem Punkte fixirt, lege durch diese Tangente alle möglichen Schnitte und stelle sich die Aufgabe, die gegenseitige Lage der zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkte dieser Schnittcurven zweiter Ordnung zu untersuchen.

Die Bezeichnungen seien dieselben wie oben Fig. 10; M_1 der Mittelpunkt der Fläche. Die Krümmungsmittelpunkte der einzelnen Schnittcurven $PQ_1A_1B_1M_1$, $PQ_2A_2B_2M_2$ etc. liegen, innerhalb der zu PT senkrechten Ebene $PA_1A_2\ldots$, bezüglich auf den Normalen PA_1. PA_2 etc.

Nun ist bekanntlich der Krümmungsradius ϱ_1 einer Curve zweiter Ordnung $PQ_1A_1B_1$ gleich dem Quadrat des zur Tangente PT parallelen Halbdurchmessers M_1Q_1, dividirt durch die Senkrechte PN_1 von P auf diesen

* Ueber die geometrische Ableitung vergl. Chasles, Sections coniques, Nr. 192, p. 125.

Halbdurchmesser.* Die Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 der zwei Schnitte durch PT verhalten sich somit wie $M_1 Q_1^2 . PN_2 : M_2 Q_2^2 . PN_1$. Aber nach obigem Hilfssatze ist $M_1 Q_1^2 : M_2 Q_2^2 = d_1 : d_2$ (d_1 und d_2 wie bisher die Abstände der Punkte M_1 und M_2 von der Tangentialebene in P); oder auch $= PN_1 . cos(N_1 PN) : PN_2 . cos(N_2 PN)$, falls PN die Normale zur Tangentialebene in P darstellt. Somit ist das zunächst erhaltene Resultat, dass die Krümmungshalbmesser ϱ_1, ϱ_2, ... der einzelnen Schnitte sich verhalten wie die Cosinus der Winkel α_1, α_2, ... zwischen den Normalen PN_1, PN_2, ... und der zur Tangentialebene senkrechten PN, oder auch, dass das Verhältniss $\varrho : cos\,\alpha$ für alle Schnitte eine Constante ist. In Fig. 13 ist die Ebene $PA_1 A_2$... für sich herausgezeichnet; man sieht, dass das erwähnte Resultat geometrisch nichts Anderes bedeutet, als dass die Krümmungsmittelpunkte R_1, R_2, ... auf einem Kreise liegen; die Constante ist der Durchmesser dieses Kreises. Die Ebene des Kreises steht senkrecht zur Tangente PT und dieser berührt die Tangentialebene in P.

Damit ist der *Meunier'sche Satz* abgeleitet:**

Der Krümmungsradius eines beliebigen Schnittes, welcher durch eine Tangente PT einer Fläche zweiter Ordnung geführt ist, ist die Projection des Krümmungsradius des zugehörigen Normalschnittes auf die Ebene des schiefen Schnittes.

2.

Daraus folgt ohne Schwierigkeit der *Euler'sche Satz* mit den Beziehungen der Krümmungshalbmesser zu den Durchmessern der Indicatricencurve.

Durch die Normale PC, welche in einem gegebenen Punkte der Fläche zweiter Ordnung construirt ist, denke man sich alle möglichen Schnittebenen gelegt. Als Zeichenebene sei die Schnittebene durch den Mittelpunkt O der Fläche gewählt. (Fig. 14.) Eine beliebige andere ist die zur Tangente PT gehörige Schnittebene $PABC$ oder K_1, C der Schnittpunkt der Flächennormalen PC mit der Durchmesserebene $OABC$ oder K_3, welche parallel zur Tangentialebene im Punkte P gelegt ist. Es handelt sich darum, ein Gesetz für die Lagen der Krümmungsmittelpunkte der Schnittcurven zu finden, welche alle die Normale PC gemeinschaftlich haben. Die Untersuchung des Krümmungshalbmessers des beliebigen Normalschnittes $PABC$ oder K_1 kann mittels des schon bewiesenen Meunier'schen Satzes auf die-

* Geometrisch abgeleitet von Herrn Pelz, *l. c.* S. 28, aus dem Steiner'schen Satze, und in einer andern Weise von Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, § 31 S. 280.

** Die Ableitung des Hilfssatzes und damit des Meunier'schen Satzes kann mit geringer Aenderung auch auf den Fall angewendet werden, wo der Mittelpunkt der Fläche im Unendlichen liegt. Das Princip des Beweises ist dasselbe; vergl. übrigens den Schluss der Abhandlung.

jenige für den schiefen Schnitt $PEOF$ oder K_2 zurückgeführt werden, welcher durch dieselbe Tangente PT und durch den Flächenmittelpunkt O gelegt ist. Denn sind A, B und E, F die Schnittpunkte der Curven zweiter Ordnung K_1 resp. K_2 mit der erwähnten Durchmesserebene $OABC$ oder K_3 (so dass $EF \| PT$) und CD das Loth von C auf den Durchmesser EF von K_3 mit dem Fusspunkt D, wobei $PD \perp EF$, so ist der zu P gehörige Krümmungshalbmesser ϱ des Normalschnittes K_1 gleich demjenigen ϱ_1 des schiefen Schnittes K_2, dividirt durch den Cosinus des Neigungswinkels der beiden Ebenen K_1 und K_2 oder multiplicirt mit dem Quotienten aus PD und PC.

Andererseits ist der Krümmungshalbmesser ϱ_1 einer Curve zweiter Ordnung PEF für einen Curvenpunkt P gleich dem Quadrat des zur Tangente PT parallelen Halbdurchmessers OF, dividirt durch das Loth PD von P auf letzteren. Somit ist

$$\varrho = \frac{OF^2}{PD} \cdot \frac{PD}{PC} = \frac{OF^2}{PC}.$$

Dreht sich die Schnittebene K_1 um die Normale PC, so bleibt PC dasselbe. Die Schnittcurve K_3 ist parallel der Berührungsebene des Punktes P, um den es sich handelt. Alle zu K_3 parallelen Schnitte der Fläche sind ferner ähnlich und ähnlich gelegen; ein beliebiger derselben, etwa K_3 selbst, stellt somit die Indicatrice der Fläche zweiter Ordnung in Beziehung auf P dar (die sich bei einer Fläche beliebigen Grades auf den Schnitt mit einer der Tangentialebene unendlich nahen Ebene reducirt), und wir haben somit das Resultat:

Werden durch eine feste, in einem Punkte P construirte Normale einer Fläche zweiter Ordnung Normalschnitte gelegt, so ist der Krümmungshalbmesser eines zu einer bestimmten Tangente in P gehörigen Normalschnittes proportional dem Quadrat des der Tangente parallelen Halbdurchmessers der Indicatricencurve.

In der Ebene der Indicatricencurve zweiter Ordnung K_3 seien (Fig. 15) OM und ON zwei conjugirte Durchmesser, OQ ein beliebiger anderer Durchmesser, welcher gegen sie um die Winkel β resp. α geneigt ist. Zu jedem Durchmesser einer Curve zweiter Ordnung gehört eine bestimmte Potenz der Involution. P_m, P_n, P_q seien die entsprechenden Potenzen der den Durchmessern OM, ON, OQ zugehörigen Involutionen; zwischen ihnen bestehen die Beziehungen:*

$$\frac{\sin^2\alpha}{P_m} + \frac{\sin^2\beta}{P_n} = \frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{P_q}, \quad P_m + P_n = const., \quad P_m . P_n . \sin(\alpha+\beta) = const.$$

Diese Involutionspotenzen sind gleich den Quadraten der entsprechenden Halbdurchmesser; letztere Quadrate aber sind nach dem Obigen proportional

* Vergl. Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Gebilde, 1880, S. 521 f.

den zugehörigen Krümmungshalbmessern der Normalschnitte. Bezeichnen also R_1, R_2, R', R'', ϱ die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte von P, welche durch die Tangenten PT_1, PT_2, PT', PT'', PT parallel den conjugirten Halbdurchmessern OM, ON, den beiden Hauptaxen und dem beliebigen Halbdurchmesser OQ der Indicatrice, geführt sind, so hat man

$$1)\qquad \frac{\sin^2\alpha}{R_1}+\frac{\sin^2\beta}{R_2}=\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\varrho},$$

und speciell für die Hauptnormalschnitte ($\alpha+\beta=90^0$), welche entsprechend den Hauptaxen der Indicatrice auf einander senkrecht stehen und ein Maximum R' und Minimum R'' für den Krümmungshalbmesser liefern,

$$2)\qquad \frac{\sin^2\alpha}{R'}+\frac{\cos^2\alpha}{R''}=\frac{1}{\varrho},$$

was den *Euler'schen Satz* herstellt.

Zugleich folgt noch

$$3)\qquad R_1+R_2=const.=R'+R'',$$

d. h.: Die Summe der Krümmungshalbmesser je zweier Normalschnitte, welche zu zwei conjugirten Halbdurchmessern der Indicatrice (oder zu zwei conjugirten Tangenten in der Berührungsebene) gehören, ist constant und gleich der Summe der Hauptkrümmungshalbmesser.

Setzt man endlich in 2) $\alpha=45^0$, wofür $\varrho=R_0$, und $\alpha=45^0+\vartheta$, $\alpha=45^0-\vartheta$, wofür ϱ gleich resp. r_1 und r_2 sein möge, so findet man

$$\frac{2}{R_0}=\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''},$$

$$\frac{1}{r_1}=\frac{\sin^2(45+\vartheta)}{R'}+\frac{\cos^2(45+\vartheta)}{R''},\quad \frac{1}{r_2}=\frac{\cos^2(45+\vartheta)}{R'}+\frac{\sin^2(45+\vartheta)}{R''},$$

woraus

$$4)\qquad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''},$$

d. h.: Die Summe der reciproken Werthe von zwei Krümmungshalbmessern, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen, ist constant und folglich gleich der Summe der reciproken Hauptkrümmungshalbmesser, und auf der Normalen bilden die Krümmungsmittelpunkte von zwei solchen aufeinander senkrechten Normalschnitten mit dem Flächenpunkte und mit dem Krümmungsmittelpunkte desjenigen Normalschnittes, der gegen die Hauptaxen der Indicatrice um 45^0 geneigt ist, jedesmal vier harmonische Punkte, so dass auf der Normalen eine Involution entsteht. Alles zusammengefasst, ist somit das Ergebniss folgendes:

Dreht sich ein Normalschnitt um eine feste Normale PC eines Punktes P einer Fläche zweiter Ordnung, so gehört zu jedem Normalschnitt ein bestimmter Krümmungshalbmesser desselben, der proportional dem Quadrat des entsprechenden Halbdurchmessers der Indicatrice ist. Die Summe der Krüm-

mungsradien je zweier conjugirten Normalschnitte ist constant und gleich der Summe der Hauptkrümmungshalbmesser. Die Hauptnormalschnitte stehen aufeinander senkrecht und geben ein Maximum und Minimum aller Krümmungshalbmesser. Der Krümmungsradius eines beliebigen Normalschnittes hängt mit denjenigen zweier conjugirter Normalschnitte und speciell mit den beiden Hauptkrümmungshalbmessern durch die Gleichungen 1) und 2) zusammen. Die Summe der reciproken Werthe je zweier Krümmungsradien, deren Ebenen auf einander senkrecht stehen, ist constant. Die Gesammtheit der Krümmungsmittelpunkte der aufeinander senkrechten Normalschnitte bilden auf der Flächennormale eine Involution, deren Doppelpunkte der Flächenpunkt P und der Krümmungsmittelpunkt desjenigen Normalschnittes ist, dessen Ebene den Winkel der Hauptnormalschnitte halbirt.

Dass diese Ableitung auch auf den Fall anwendbar ist, wo der Mittelpunkt der Fläche im Unendlichen liegt, sieht man durch eine leichte Ueberlegung, indem man die Untersuchung des Normalschnittes K_1 auf diejenige eines schiefen Winkels K_2 reducirt, welcher durch dieselbe Tangente und den unendlich fernen Punkt geht, ferner statt der Durchmesserebene K_3 eine im Endlichen liegende, der Tangentialebene parallele Schnittebene K_3 wählt und die hierher gehörigen Modificationen für die Parabel einführt.

Ferner dürfte es nicht schwer sein, auch von anderen Krümmungshalbmessser-Constructionen ausgehend den Meunier'schen Satz abzuleiten.

Es möge erlaubt sein, auf dieses Weitere, sowie auf die Unterscheidung der einzelnen Flächen zweiter Ordnung und auf die Krümmungsverhältnisse in den besonderen Punkten (Scheitel-, Kreispunkte) an dieser Stelle nicht näher einzugehen, da der Verfasser beabsichtigt, die synthetische Theorie der Krümmung der Curven und Flächen zweiter Ordnung im Zusammenhang eingehender darzustellen.

Stuttgart, October 1885.

Dr. C. Cranz,
Repetent am Polytechnikum.

VI. Ueber zwei einander gleichzeitig ein- und umbeschriebene Fünfecke.

(Hierzu Taf. I Fig. 16.)

Nachdem Möbius zuerst auf die eigenthümliche Lage zweier Tetraeder, welche einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben sind, hingewiesen hat, liegt die Frage nahe, ob nicht in der Ebene ein Analogon zu dieser räumlichen Figur existire. In der That kann eine längst bekannte, von Desargues herrührende Figur als zwei einfache Fünfecke aufgefasst wer-

den, welche einander ein- und umbeschrieben sind. Denkt man sich nämlich fünf beliebige Punkte im Raume 1, 2, 3, 4, 5, so giebt es zwischen denselben zehn Verbindungslinien und ebensoviel Verbindungsebenen. Der Schein dieser räumlichen Figur in einer Transversalebene ist eine Configuration von zehn Punkten und zehn Geraden derart, dass durch jeden Punkt drei Gerade gehen und auf jeder Geraden drei Punkte liegen. Bedeutet nun (ik) die Spur der Geraden $|ik|$, und $|ikl|$ die Spur der Ebene $[ikl]$ in der Transversalebene, so haben die beiden Fünfecke:

$$(12)\,(23)\,(34)\,(45)\,51)$$

und

$$(13)\,(35)\,(52)\,(24)(\,41)$$

die obenererwähnte besondere Lage. Denn auf den Seiten

$$|123|,\quad |234|,\quad |345|,\quad |451|,\quad |512|$$

des ersten Fünfecks liegen bezw. die Ecken

$$(13),\quad (24),\quad (35),\quad (41),\quad (52)$$

des zweiten Fünfecks. Aber gleichzeitig findet auch das Umgekehrte statt: die Seiten

$$|135|,\quad |352|,\quad |524|,\quad |241|,\quad |413|$$

des zweiten Fünfecks enthalten die Ecken

$$(51),\quad (23),\quad (45),\quad (12),\quad (34)$$

des ersten Fünfecks.

(Die beigegebene Zeichnung, Fig. 16, stellt die beschriebene ebene Configuration dar, und zwar sind die beiden Fünfecke dadurch unterschieden, dass die Seiten des einen, $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_5$, stark, die des andern, $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_4\,\mathfrak{b}_5$, schwach ausgezogen sind.)

Die beiden ebenen Fünfecke ergaben sich als die Spuren der Seiten zweier räumlichen Fünfecke 12345 und 13524. Nun können fünf Punkte des Raumes auf $\frac{5!}{2.5} = 12$ Arten zu einem einfachen Fünfeck verbunden werden; diese zwölf Fünfecke ordnen sich in sechs Gruppen zu je zweien, so dass ein und dieselbe ebene Configuration auf sechs verschiedene Arten als zwei einander ein- und umbeschriebene Fünfecke aufgefasst werden kann.

Ist ein ebenes Fünfeck $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ beliebig gegeben, so kann man (und zwar auf unendlich viele Arten) zu demselben ein zweites construiren, so dass beide zusammen wieder die in Rede stehende Figur bilden. Zu diesem Zwecke ziehe man durch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ bezw. die Geraden $a_1 a_2 a_3 a_4$ so, dass je zwei auf einander folgende einander im Raume begegnen, und durch $\mathfrak{a}_5$ die einzige Gerade a_5, welche gleichzeitig a_1 und a_4 trifft. Dann ergiebt sich ein räumliches Fünfseit $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$. dessen Ecken 1, 2, 3, 4, 5

heissen mögen. Verbindet man dieselben in der veränderten Reihenfolge 13524 zu einem zweiten Fünfseit, so treffen die Seiten desselben die Ebene der α in den Ecken des gesuchten Fünfecks.

Breslau, im November 1885. MAX KLOSE.

VII. Ein Rechenfehler von J. Bernoulli.

In den „Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des sciences et belles lettres. Berlin, Année 1771" finden sich zwei Aufsätze von J. Bernoulli, die in einem gewissen Zusammenhange stehen; sie tragen die Aufschriften: „Sur les fractions décimales périodiques" und „Recherches sur les diviseurs de quelques nombres très grands compris dans la somme de la progression géometrique $1 + 10^1 + 10^2 + \ldots + 10^t = S$".

In dem letztern kommt ein Rechenfehler vor, den Bernoulli übersehen hat, und infolge dessen fand er denn auch trotz angewandter Mühe kein Resultat. Das Ganze ist aber um so auffälliger, als B. in der von ihm erhaltenen falschen Zahl nicht wahrnahm, dass diese den Divisor 3 enthielt.

Um ganz verständlich zu sein, ist es nöthig, dass ich die betreffende Stelle ganz wiedergebe.

> (S. 325.) „*Soit* t = 11, *nous voyons d'abord que* $10^{11}+1$ *a outre le diviseur* 11 *le diviseur* 23; *c'est donc du nombre* 395256927 *qu'il nous à chercher les diviseurs; j'ai pour cet effet appliqué à la Table II* la remarque du § 9 en cherchant d'abord au moyen de la façon ordinaire de reconnaître si un nombre est divisible par* 11, *quels nombres de cette Table étaient en même temps de la forme* 22m + 1; *je n'ai trouvé que les suivants* 23, 89, 331, 397, 463, 727, 859, 881, 1013, 1277, 1321, 1453, 1783, 2069, 2179, 2333, 2531, 2663, 2861, 2971, 3037; *j'ai essayé tous ces nombres sans trouver de diviseurs; mais je n'ai pas eu la patience de pousser cette recherche plus loin; ainsi tout ce que je crois pouvoir assurer c'est que* 395256927 *n'a pas de diviseur au-dessous de* 3000."

Hierzu ist zu bemerken, dass die vorletzte Ziffer der Zahl 1 statt 2 sein muss; es findet sich dann zunächst, wie es sein muss, noch ein zweiter Factor 11 und der sich dann ergebende Factor 35932447 ist gleich 4093.8779, also $10^{11}+1 = 11^2.23.4093.8779$.

Die Factoren von $35932447 = N$ fand ich aus den Darstellungen

$$5.75650^2 - 97.5943^2 = 701.N \quad \text{und} \quad 5.147559^2 - 97.82404^2 = -15301\,N.$$

SEELHOFF.

* Enthält die Primfactoren für $a^2 + 10b^2$ bis 3000.

VIII. Ueber die Abstände eines Punktes von drei Geraden.

Bezeichnet man mit P einen im Innern des Dreiecks ABC beliebig gewählten Punkt und mit u, v, w dessen Abstände von den Seiten BC, CA, AB, so kann man nach dem Spielraume fragen, auf welchen P beschränkt werden muss, wenn es möglich sein soll, aus u, v, w ein neues Dreieck zu construiren.

Das letztere ist nun reell, eine Gerade oder imaginär, je nachdem

$$(u+v+w)(v+w-u)(w+u-v)(u+v-w)$$

positiv, Null oder negativ ist. Der erste Factor bleibt von selbst positiv, das Dreieck wird also zu einer Geraden in den drei Fällen

$$v+w-u=0, \quad w+u-v=0, \quad u+v-w=0.$$

Werden u, v, w als die homogenen Coordinaten von P betrachtet, so charakterisiren diese Gleichungen drei Gerade, welche man dadurch erhält, dass man die Punkte A', B', C', in welchen die Winkelhalbirenden von A, B, C den Gegenseiten begegnen, geradlinig verbindet. Wie sich hiernach leicht ergiebt, ist das Dreieck aus u, v, w reell, eine Gerade oder imaginär, je nachdem P im Innern, auf dem Umfange oder ausserhalb des Dreiecks $A'B'C'$ liegt.

Analoge Resultate erhält man für den Fall, dass P ausserhalb des Dreiecks ABC angenommen wird; es sind dann, weil nur die absoluten Werthe der Abstände in Frage kommen, die Vorzeichen von u, v, w gehörig zu ändern. Dies möge dem Leser überlassen bleiben.

Diese Sätze dürften neu sein und ein hübsches Beispiel für den Gebrauch homogener Coordinaten darbieten.

Schlömilch.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

31. Jahrgang. 2. Heft.

Ausgegeben am 25. März 1886.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1886.

V.

Die Berechnung der reellen Wurzeln der quartinomischen Gleichungen.

Von

ALFRED WIENER,

Stud. elektrotechn. in Darmstadt.

Auszug aus einer preisgekrönten Bearbeitung der von Herrn Prof. Dr. S. GUNDELFINGER in Darmstadt gestellten mathematischen Preisaufgabe:

„Gauss hat in seiner Abhandlung „Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen" [Werke, Bd. III S. 85 – 102] die Wurzeln der trinomischen Gleichungen durch eine indirecte Methode rasch und sicher berechnen gelehrt. Das hierbei zu Grunde gelegte Princip soll auf Gleichungen mit vier Gliedern ausgedehnt und für die numerische Bestimmung ihrer reellen Wurzeln nutzbar gemacht werden."

Herr Prof. Dr. Gundelfinger hat in seinen Vorträgen das Grundprincip der Lösung dahin angegeben, dass man zur Aufsuchung der positiven Wurzeln irgend einer Gleichung diese letztere durch Division mit irgend einem Gliede auf die Form

$$x^2 \pm y^2 \pm z^2 \pm \ldots = 1$$

zu bringen habe, und speciell zur Vergleichung die unten aufgeführten Formeln 5) und 6) mit Anwendung der Gauss'schen Logarithmen empfohlen. — Der Verfasser dieser Arbeit hat daraufhin unter anderen die folgende Formel 7) verwerthet und darauf eine neue Berechnungsweise,

„direct und auf sehr einfache Weise die Wurzeln der quartinomischen Gleichungen zu bestimmen",

begründet, was vorerst den Gegenstand folgender Abhandlung bildet.

Erste Abtheilung.

Die verschiedenen Formen der quartinomischen Gleichungen.

Sämmtliche algebraische Gleichungen mit vier Gliedern und mit einer Unbekannten sind durch die Gleichung

1) $$x^{m+n+p} \pm f x^{m+n} \pm g x^m \pm h = 0$$

ausgedrückt. In derselben bedeuten m, n, p und f, g, h gegebene positive Grössen. Die Gleichung 1) umfasst folgende acht verschiedene Fälle:

1) $x^{m+n+p} + fx^{m+n} + gx^{m} + h = 0,$
2) $x^{m+n+p} - fx^{m+n} + gx^{m} + h = 0,$
3) $x^{m+n+p} + fx^{m+n} - gx^{m} + h = 0,$
4) $x^{m+n+p} + fx^{m+n} + gx^{m} - h = 0,$
5) $x^{m+n+p} - fx^{m+n} - gx^{m} - h = 0,$
6) $x^{m+n+p} + fx^{m+n} - gx^{m} - h = 0,$
7) $x^{m+n+p} - fx^{m+n} + gx^{m} - h = 0,$
8) $x^{m+n+p} - fx^{m+n} - gx^{m} + h = 0.$

Die Exponenten m, n und p sind prim unter sich angenommen, denn hätten sie einen gemeinschaftlichen Theiler k, so würde eine solche Gleichung durch Einführung des Werthes

2) $$y = x^k$$

auf einen der aufgeführten Fälle zurückgeführt.

Die erste Form

3) $$x^{m+n+p} + fx^{m+n} + gx^{m} + h = 0$$

hat keine positive Wurzel und ist zur Berechnung ihrer negativen Wurzeln auf eine der übrigen Gleichungsformen durch Einführung von

4) $$x = -y$$

zu transformiren.

Zur Berechnung der reellen Wurzeln der quartinomischen Gleichungen lassen sich auf sehr verschiedene Weise Formeln ermitteln. Hier sollen nur vier Methoden erwähnt und die dritte vollständig ausgeführt werden.

1. Mit Hilfe der von Herrn Prof. Dr. Gundelfinger zuerst empfohlenen goniometrischen Formeln (Polarcoordinaten)

5) $$\sin^2 u \cos^2 t + \sin^2 u \sin^2 t + \cos^2 u = 1,$$

6) $$\left(\frac{\cos t}{\cos u}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{\cos u}\right)^2 - tg^2 u = 1,$$

2. mit Hilfe der goniometrischen Formel

$$1 + tg^2 u = sec^2 u.$$

3. Mit Hilfe der trigonometrischen Formel

7) $$tg\,\alpha\, tg\,\beta + tg\,\alpha\, tg\,\gamma + tg\,\beta\, tg\,\gamma = 1, \text{ wobei } \alpha + \beta + \gamma = 90^0\ (R),$$

lassen sich sämmtliche quartinomische Gleichungen der 2., 3., 4. und 5. Form auflösen und für $m = p$ vollständig discutiren.

4. Nach den neuesten Untersuchungen des Herrn Prof. Dr. Gundelfinger kann unter Benutzung der in der Theorie der Gauss'schen Logarithmen auftretenden algebraischen Gleichung

8) $$10^B = 1 + 10^A\ *$$

jede Gleichung vom n^{ten} Grade reducirt werden auf die Behandlung von Gleichungen vom $(n-1)^{ten}$ Grade.

* Nach einer mir gewordenen mündlichen Mittheilung will Herr Prof. Dr. Gundelfinger diese Methode vollständig auch für alle höheren Gleichungen bearbeitet demnächst im Drucke erscheinen lassen.

Die Theorie und Berechnung der Gauss'schen Logarithmen nach 8) findet sich in den Logarithmentafeln von Prof. Dr. Nell (fünfstellig), von Dr. C. Bremiker (sechsstellig) und von Prof. Theodor Wittstein in Hannover (siebenstellig). Die Octantenbestimmung bei der Berechnung der Wurzeln der trinomischen Gleichungen von Gauss (siehe dessen Werke, Bd. III S. 85—102) zur Lageermittelung des von ihm eingeführten Hilfswinkels φ ist durch die Anordnung der genannten Logarithmentafeln unnöthig geworden, wodurch sich daher auch die Berechnung der Wurzeln bedeutend vereinfacht. In diesen Logarithmentafeln ist nämlich zusammengestellt

$A = \log tg^2 \varphi$ und $B = \log sec^2 \varphi$ berechnet für alle Werthe von φ von 0° bis 90°, so dass A alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ und B „ „ „ 0 „ $+\infty$ annehmen kann.

Zur Berechnung der Wurzeln nach 7) sind nur Brigg'sche und zur Berechnung der Wurzeln nach den übrigen angeführten Methoden sind sowohl Brigg'sche, als auch die genauere Resultate ergebenden Gauss'schen Logarithmen anwendbar.

Die hier ausgeführte Auflösungsmethode kann für die Auflösung der vollständigen Gleichungen höherer Grade verwendet werden. Auch zur Trennung und Berechnung nahezu gleicher Wurzeln, die bis auf eine Anzahl Decimalstellen übereinstimmen, bietet diese Methode bedeutende Vortheile.

Zweite Abtheilung.

Bestimmung der Grenzen und Anzahl der reellen Wurzeln einer quartinomischen Gleichung.

Ehe die numerische Berechnung der Wurzeln einer Gleichung vorgenommen werden kann, ist es nothwendig, die einzelnen Wurzeln von einander zu trennen, d. h. zwei Grenzen anzugeben, zwischen welchen jede einzelne Wurzel liegt.

Die Grenzen und Anzahl der Wurzeln einer quartinomischen Gleichung sind zu bestimmen:

1. direct aus den nach dieser Methode entwickelten Bestimmungsgleichungen, wie dies in diesem Auszuge ausgeführt ist, und unter anderen noch (weitere Methoden werden in der nächsten Abhandlung mitgetheilt)
2. durch den Sturm'schen Lehrsatz, welcher jedoch bei Gleichungen höherer Grade praktisch wenig Werth hat.

Wie schon Gauss bewiesen, hat eine trinomische Gleichung von der Form

9) $$x^{n+p} \pm Fx^n \pm G = 0,$$

höchstens zwei positive *reelle* Wurzeln, also nicht mehr als drei reelle Wurzeln (wenn n und p keinen gemeinschaftlichen Divisor haben), und daher auch die quartinomische Gleichung 1) höchstens drei positive *reelle*

Wurzeln, und wenn m, n und p prim unter sich sind, höchstens fünf *reelle* Wurzeln.

Mit Hilfe des Satzes:

„Enthält eine Gleichung lauter gerade Potenzen der Unbekannten, so sind die Wurzeln derselben paarweise gleich, aber entgegengesetzt" kann speciell bewiesen werden, dass eine quartinomische Gleichung höchstens sechs reelle Wurzeln hat.

Setzt man nämlich in der gegebenen quartinomischen Gleichung

$$x^6 - ax^4 + bx^2 - c = 0$$

für x^2 den Werth y, so erhält man die vollständige cubische Gleichung

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0,$$

welche höchstens drei reelle Wurzeln hat; daher kann die gegebene quartinomische Gleichung sechs reelle Wurzeln haben.

Dritte Abtheilung.

Auflösung der quartinomischen Gleichungen von der zweiten, dritten, vierten und fünften Form.

Mit Hilfe der trigonometrischen Formel 7) lassen sich die hier aufgeführten Gleichungsformen der quartinomischen Gleichungen, bei denen die Exponenten $m = p$, vollständig auflösen, ganz bestimmte Kriterien zur Berechnung der einzelnen positiven und negativen Wurzeln aufstellen und einfach nachweisen, in welchem Falle diese Gleichungen nur imaginäre Wurzeln haben.

Erster Abschnitt.

Auflösung der zweiten Form.

10) $$x^{m+n+p} - fx^{m+n} + gx^m + h = 0.$$

Hier ist zunächst

$$x^{m+n+p} + gx^m + h = fx^{m+n}$$

oder

11) $$\frac{x^p}{f} + \frac{g}{fx^n} + \frac{h}{fx^{m+n}} = 1.$$

Die Vergleichung der Gleichung 11) mit der trigonometrischen Formel 7)

$$tg\,\alpha\, tg\,\beta + tg\,\alpha\, tg\,\gamma + tg\,\beta\, tg\,\gamma = 1,$$

bei welcher $\alpha + \beta + \gamma = 90^0$ ist, ergiebt die zur Berechnung der Hilfswinkel und der Wurzeln nöthigen Bestimmungsgleichungen, als:

I. $x^p = f \,.\, tg\,\alpha\, tg\,\beta$, II. $x^n = \dfrac{g}{f\, tg\,\alpha\, tg\,\gamma}$ und III. $x^{m+n} = \dfrac{h}{f\, tg\,\beta\, tg\,\gamma}$.

Die Operation I.III : II liefert

12) IV. $$x^{m+p} = \frac{fh}{g}\, tg^2\alpha,$$

die Operation I.II : III liefert

13) V. $$x^{p-m} = \frac{fg}{h}\, tg^2\beta$$

und die Operation I.II.III liefert

$$\text{VI.} \quad x^{m+2n+p} = \frac{gh}{f \cdot tg^2 \gamma}.$$

Aus IV, V und VI ist x zu eliminiren, indem man zunächst

$$\text{IV}^{p-m} = \text{V}^{p+m}$$

setzt und erhält

14) $$tg^{m-p}\alpha \,.\, tg^{m+p}\beta = \frac{h^p}{f^m g^p}.$$

Ferner ergiebt die Gleichsetzung

$$\text{IV}^{m+2n+p} = \text{VI}^{m+p}$$

noch

15) $$tg^{m+2n+p}\alpha \,.\, tg^{m+p}\gamma = \frac{g^{m+n+p}}{f^{m+n+p}h^n}.$$

Aus 14) und 15) sind nun die Hilfswinkel α, β und γ mit Zuhilfenahme der Relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^0 (1R)$$

zu berechnen.

Die Gleichung 14), sowie auch 13) liefert den $\angle\beta$, sobald $m = p$ wird, direct. Es zerfallen daher die quartinomischen Gleichungen von der Form 10) bezüglich ihrer Auflösung in zwei verschiedene Arten und zwar:

1. in solche, bei denen die Exponenten $m = p$, und
2. „ „ „ „ „ „ $m \lesseqgtr p$ sind.

Zu der ersten Sorte gehören:

1. die vollständigen cubischen Gleichungen,
2. die Gleichungen vom IV. Grade, bei denen das Glied x^2 fehlt,
3. „ „ „ V. „ „ „ die Glieder x^2 und x^3 oder x „ x^4 fehlen,
4. „ „ „ VI. „ „ „ „ „ x, x^3 u. x^5 oder x^2, x^3 u. x^4 fehlen,
5. „ „ „ VII. „ „ „ „ „ x^2, x^3, x^4 u. x^5 od. x, x^3, x^4 u x^6 od. x, x^2, x^5 u. x^6 fehlen

u. s. w.

Die allgemeine cubische Gleichung,
„ einfach reducirte Gleichung vom IV. Grade,
„ zweifach „ „ „ V. „
„ dreifach „ „ „ VI. „
„ vierfach „ „ „ VII. „ u. s. w.

können hiernach allgemein und vollständig aufgelöst werden.

Für alle diese Gleichungen der ersten Art ist aus 13)

16) $$tg\beta = \sqrt{\frac{h}{fg}},$$

also $\angle\beta$ direct bestimmt, und folglich ist auch die Summe der Winkel

$$\alpha + \gamma = 90 - \beta = s$$

bekannt. Aus 15) lassen sich daher die Winkel α und γ und dann am bequemsten vermittelst 12) die Werthe der Unbekannten x berechnen.

Setzt man in 15) den Werth für $\gamma = s - \alpha$, so wird die linke Seite dieser Gleichung

17) $$tg^{m+2n+p}\alpha . tg^{m+p}(s-\alpha),$$

als Function einer variabeln Grösse α betrachtet, sowohl für $\alpha = 0$ als für $\alpha = s$ verschwinden. Zwischen diesen Grenzen muss daher ein grösster Werth, ein Maximum, liegen, dessen Werth sich mit Hilfe der Differentialrechnung ermitteln lässt. Bezeichnet man nämlich den ersten Differentialquotienten mit y', so ist

$$y = tg^{m+2n+p}\alpha . tg^{m+p}(s-\alpha)$$

und zu den natürlichen Logarithmen übergegangen

$$ly = (m+2n+p)\, ltg\,\alpha + (m+p)\, ltg(s-\alpha),$$

folglich, diese Gleichung in Bezug auf α differentiirt,

$$\frac{y'}{y} = \frac{2(m+2n+p)}{sin 2\alpha} - \frac{2(m+p)}{sin^2(s-\alpha)}$$

oder

18) $$y' = 2y\left\{\frac{m+2n+p}{sin 2\alpha} - \frac{m+p}{sin 2(s-\alpha)}\right\}.$$

Der Ausdruck 17) wird für den Werth von α zu einem Maximum M, der sich ergiebt, wenn man $y' = 0$ setzt. Für diesen Fall ist jedoch nur die Klammergrösse von 18) in Betracht zu ziehen.

Man erhält also diesen bestimmten Werth für α aus folgender goniometrischen Gleichung:

$$\frac{m+2n+p}{sin 2\alpha} - \frac{m+p}{sin 2(s-\alpha)} = 0,$$

woraus folgt

19) $$cot 2\alpha = \frac{\frac{m+p}{m+2n+p}\left(1 + \frac{m+2n+p}{m+p} cos 2s\right)}{sin 2s}.$$

Dieser Ausdruck wird logarithmisch brauchbar, wenn man für $2s < 90^0$ setzt

20) $$tg^2\varphi = \frac{m+2n+p}{m+p} \cdot cos 2s.$$

Dann ist

21) $$cot 2\alpha = \frac{\frac{m+p}{m+2n+p}}{sin 2s . cos^2\varphi}.$$

Für $2s > 90^0$ wird, da $2s = 180 - (180 - 2s)$ ist,

$$cos 2s = cos[180 - (180 - 2s)] = - cos(180 - 2s)$$

und

$$sin 2s = sin[180 - (180 - 2s)] = + sin(180 - 2s).$$

Diese Werthe in 19) und noch

22) $$sin^2\varphi = \frac{m+2n+p}{m+p} \cdot cos(180 - 2s)$$

gesetzt, ergiebt

23) $$cot 2\alpha = \frac{\frac{m+p}{m+2n+p} cos^2\varphi}{sin(180 - 2s)}.$$

Ist nun der Werth der rechten Seite der Gleichung 15) grösser, gleich oder kleiner als M, d. h., ist

24) $$\frac{g^{m+n+p}}{f^{m+n+p}h^n} \gtreqless M,$$

so erhält man aus 15) für α entweder keinen, einen oder zwei Werthe.

Im ersten Falle hat die quartinomische Gleichung 10) gar keine positive reelle Wurzel, im letzten Falle zwei positive reelle Wurzeln und im zweiten Falle, weil diese beiden Lösungen zusammenfallen, zwei gleiche positive reelle Wurzeln.

Für die Gleichungen der zweiten Sorte, bei denen $m \lesseqgtr p$, ist zunächst vermittelst 9) die Existenz reeller Wurzeln nachzuweisen. — Zur Berechnung der Hilfswinkel ergiebt sich aus 14), sobald $m+p=r$ gesetzt wird:

25) $$tg\,\beta = \sqrt[r]{\frac{h^p}{f^m g^p}} \cdot \sqrt[r]{\frac{1}{tg^{m-p}\alpha}}$$

und aus 15)

26) $$tg\,\gamma = \sqrt[r]{\frac{g^{m+n+p}}{f^{m+n+p}h^n}} \cdot \sqrt[r]{\frac{1}{tg^{m+2n+p}\alpha}}.$$

Durch Annahme von α wird aus 25) der $\angle\beta$ und aus 26) der $\angle\gamma$ derart berechnet, dass die erhaltenen Werthe mit dem angenommenen Werthe von α zusammen 90^0 betragen.

Um die Winkel β und γ rasch zu erhalten, bestimmt man mit den genäherten Wurzeln aus 12) die genäherten Werthe von α. Diese indirecte Berechnung wird mit Logarithmen ausgeführt und besteht daher nur in einigen Additionen und Subtractionen.

Aus 25) und 26) lassen sich meist direct die Grenzen von α ermitteln.

Zweiter Abschnitt.

Auflösung der dritten Form.

27) $$x^{m+n+p} + f x^{m+n} - g x^m + h = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich in

$$x^{m+n+p} + f x^{m+n} + h = g x^m,$$

folglich ist

28) $$\frac{x^{n+p}}{g} + \frac{f x^n}{g} + \frac{h}{g x^m} = 1.$$

Die Gleichung 28), mit der trigonometrischen Formel 7) verglichen, ergiebt

I. $x^{n+p} = g\,tg\,\alpha\,tg\,\beta$, II. $x^n = \frac{g}{f}\,tg\,\alpha\,tg\,\gamma$ und III. $x^m = \frac{h}{g\,tg\,\beta\,tg\,\gamma}$.

Die Multiplication I.II.III liefert

29) $$\text{IV.}\quad x^{m+2n+p} = \frac{gh}{f}\,tg^2\alpha,$$

die Operation II.III:I liefert

30) $$\text{V.}\quad x^{p-m} = \frac{fg}{h}\,tg^2\beta,$$

und die Operation I.III:II liefert

$$\text{VI.} \quad x^{m+p} = \frac{fh}{g\, tg^2 \gamma}.$$

Aus IV, V und VI ist nun x zu eliminiren. Die Gleichsetzung von

$$\text{IV}^{p-m} = \text{V}^{m+2n+p}$$

ergiebt

31) $$tg^{m-p}\alpha \,.\, tg^{m+2n+p}\beta = \frac{h^{n+p}}{f^{n+p} g^{m+n}}$$

und

$$\text{IV}^{m+p} = \text{VI}^{m+2n+p}$$

gesetzt, liefert

32) $$tg^{m+p}\alpha \,.\, tg^{m+2n+p}\gamma = \frac{f^{m+n+p} h^n}{g^{m+n+p}}.$$

Das, was aus 13) und 14) bezüglich der Zerlegung dieser quartinomischen Gleichungen in zwei Sorten geschlossen wurde, gilt auch für 30) und 31).

Wird nämlich $m = p$, so erhält man aus 30)

33) $$tg\beta = \sqrt{\frac{h}{fg}}$$

und es ist dann die Summe

$$s = \alpha + \gamma = 90 - \beta, \quad \text{also} \quad \gamma = s - \alpha.$$

Da 33) mit 16) genau übereinstimmt, so müssen die linken Seiten der Gleichungen 15) und 32) genau dieselben Werthe liefern.

Das Maximum M, welches die linke Seite von 32:

$$tg^{m+p}\alpha \,.\, tg^{m+2n+p}\gamma$$

oder

34) $$tg^{m+p}\alpha \,.\, tg^{m+2n+p}(s-\alpha)$$

liefert, muss daher auch denselben Werth haben, als das Maximum, welches der Ausdruck 17) hat.

Wird nämlich [wie 17)] der Ausdruck 34) als Function y einer variabelen Grösse α betrachtet, so verschwindet 34) sowohl für $\alpha = 0^0$, als auch für $\alpha = 90^0$, d. h. es können zwei Werthe für α der Gleichung 32) genügen.

Um den Werth von α, für welchen 34), also

$$y = tg^{m+p}\alpha \,.\, tg^{m+2n+p}(s-\alpha),$$

ein Maximum M wird, zu erhalten, geht man zu den natürlichen Logarithmen über, als

$$ly = (m+p)\, l\, tg\alpha + (m+2n+p)\, l\, tg(s-\alpha),$$

und differentiirt, so ergiebt sich

$$\frac{y'}{y} = \frac{2(m+p)}{sin 2\alpha} - \frac{2(m+2n+p)}{sin 2(s-\alpha)} \quad \text{oder} \quad y' = 2y\left\{\frac{m+p}{sin 2\alpha} - \frac{m+2n+p}{sin 2(s-\alpha)}\right\}.$$

Die Klammergrösse von $y' = 0$ gesetzt, liefert eine goniometrische Gleichung, aus der sich der gesuchte Werth von α ermitteln lässt. Man erhält daraus

$$cot 2\alpha = \frac{\frac{m+2n+p}{m+p}\left(1 + \frac{m+p}{m+2n+p} cos 2s\right)}{sin 2s}.$$

Um α logarithmisch berechnen zu können, setzt man, wenn $2s > 90^0$,

35) $$sin^2\varphi = \frac{m+p}{m+2n+p} cos(180 - 2s)$$

und erhält

$$36)\qquad \cot 2\alpha = \frac{\frac{m+2n+p}{m+p}\cos^2\varphi}{\sin(180-2s)}.$$

Für $2s < 90^0$ ist

$$37)\qquad tg^2\varphi = \frac{m+p}{m+2n+p}\cos 2s$$

einzuführen und man findet dann

$$38)\qquad \cot 2\alpha = \frac{\frac{m+2n+p}{m+p}}{\sin 2s . \cos^2\varphi}.$$

Mit Hilfe dieses gefundenen Werthes von α wird aus 34) das Maximum M berechnet und ist die rechte Seite der Gleichung 32) grösser, gleich oder kleiner als dieser Werth M, als

$$39)\qquad \frac{f^{m+n+p}h^n}{g^{m+n+p}} \gtreqless M,$$

so liefert 32) für α entweder keinen, einen oder zwei Werthe und 29) die entsprechenden Wurzeln.

Die Gleichung 27) hat daher entweder

1. zwei imaginäre Wurzeln,
2. zwei gleiche *reelle* positive Wurzeln oder
3. zwei verschiedene *reelle* positive Wurzeln.

Da, wie bereits nachgewiesen, die Ausdrücke 17) und 34) ein und denselben Maximalwerth ergeben, so haben die quartinomischen Gleichungen von der zweiten Form 10) und der dritten Form 27) für $m=p$

1. sobald $(m+n+p)$ gerade, dagegen $(m+n)$ und m ungerade, und wenn nach 15) und 32)

$$g^{m+n+p} = f^{m+n+p}h^n$$

zwei gleiche positive und *zwei gleiche negative* Wurzeln, und wenn

$$40)\qquad g^{m+n+p} \gtrless f^{m+n+p}h^n,$$

höchstens *zwei reelle positive* Wurzeln oder nur *zwei reelle negative* Wurzeln;

2. sobald aber $(m+n+p)$ und $(m+n)$, als auch m ungerade, so können diese quartinomischen Gleichungen von der zweiten und dritten Form *fünf reelle* Wurzeln haben.

Ist in den Gleichungen von der Form 27)

$$m \lesseqgtr p,$$

so werden vermittelst des ersten Differentialquotienten und den Wurzeln der entsprechenden trinomischen Gleichung 9) die Grenzen der reellen positiven Wurzeln ermittelt. Hierauf liefert 29) angenäherte Werthe von α und die entsprechenden Werthe von β und γ, welche drei Winkel zusammen 90^0 betragen müssen, erhält man dann aus 31) und 32), wenn $m+2n+p=q$ gesetzt wird:

41) $$tg\,\beta = \sqrt[q]{\frac{h^{n+p}}{f^{n+p}\,g^{m+n}}}\cdot\sqrt[q]{cot^{m-p}\,\alpha}$$

und

42) $$tg\,\gamma = \sqrt[q]{\frac{f^{m+n+p}\,h^{n}}{g^{m+n+p}}}\cdot\sqrt[q]{cot^{m+p}\,\alpha}.$$

Aus 41) und 42) können die Grenzen von α auch direct bestimmt werden, was bei den Beispielen gezeigt wird.

Dritter Abschnitt.

Auflösung der vierten Form.

43) $$x^{m+n+p} + f x^{m+n} + g x^{m} - h = 0.$$

Hier wird

$$x^{m+n+p} + f x^{m+n} + g x^{m} = h$$

gesetzt, so dass man durch Division von h die zur Vergleichung nöthige Form erhält

44) $$\frac{x^{m+n+p}}{h} + \frac{f x^{m+n}}{h} + \frac{g x^{m}}{h} = 1.$$

Die Gleichung 44) muss nun Glied für Glied mit 7) übereinstimmen, wodurch folgende Bestimmungsgleichungen entstehen:

I. $x^{m+n+p} = h\,tg\,\alpha\,tg\,\beta$, II. $x^{m+n} = \frac{h}{f}\,tg\,\alpha\,.\,tg\,\gamma$ und III. $x^{m} = \frac{h}{g}\,tg\,\beta\,tg\,\gamma$.

Die Operation I.II:III liefert

45) $$\text{IV.}\quad x^{m+2n+p} = \frac{gh}{f}\,tg^2\,\alpha,$$

die Operation I.III:II liefert:

46) $$\text{V.}\quad x^{m+p} = \frac{fh}{g}\,tg^2\,\beta$$

und die Operation II.III:I liefert:

47) $$\text{VI.}\quad x^{m-p} = \frac{h}{fg}\,tg^2\,\gamma.$$

Die Gleichsetzung von

$$\text{IV}^{m-p} = \text{VI}^{m+2n+p}$$

giebt

48) $$tg^{p-m}\,\alpha\,.\,tg^{m+2n+p}\,\gamma = \frac{f^{n+p}\,g^{m+n}}{h^{n+p}}$$

und die Gleichsetzung von

$$\text{IV}^{m+p} = \text{V}^{m+2n+p}$$

liefert

49) $$\frac{tg^{m+p}\,\alpha}{tg^{m+2n+p}\,\beta} = \frac{f^{m+n+p}\,h^{n}}{g^{m+n+p}}.$$

Nach 47) und 48) lassen sich auch diese quartinomischen Gleichungen von der Form 43) in Bezug auf ihre Auflösung in zwei Arten zerlegen.

Für die **erste Art**, deren $m = p$, erhält man aus 47) direct

50) $$tg\,\gamma = \sqrt{\frac{fg}{h}}.$$

Vergleicht man 50) mit 16) und 33), so ersieht man, dass, wenn der dort berechnete Winkel mit β' bezeichnet wird,

51) $$tg\,\gamma = cot\,\beta'$$

ist, d. h. der dort berechnete Winkel β' ergänzt den hier zu berechnenden Winkel γ zu 90^0. Diese Eigenschaft erleichtert die Rechnung ungemein, sobald bei der Berechnung negativer Wurzeln eine quartinomische Gleichung der zweiten oder dritten Form sich in eine Gleichung der vierten Form oder umgekehrt verwandelt.

Sobald aus 50) der Winkel γ bestimmt ist, wird die Summe s der beiden anderen Winkel

$$s = \alpha + \beta = 90 - \gamma.$$

Setzt man in 49) nun für $\beta = s - \alpha$, so giebt die linke Seite dieser Gleichung

52) $$\frac{tg^{m+p}\,\alpha}{tg^{m+2n+p}(s-\alpha)},$$

einen Ausdruck, als Function einer veränderlichen Grösse α betrachtet, der von 0 bis ∞ wächst, wenn α alle Werthe von s^0 bis 0^0 nach und nach annimmt. Es kann daher aus 49) nur ein Werth für α gefunden werden, d. h.: die Gleichung 43) hat ganz bestimmt nur eine reelle positive Wurzel.

Sobald aus 49) der eine Werth für α gefunden, wird aus 45) die also unter allen Umständen vorhandene *eine* positive *reelle* Wurzel berechnet.

Die zweite Art von Gleichungen der vierten Form, deren

$$m \gtrless p$$

ist, werden gelöst, indem zuerst ein genäherter Werth von α aus 45) und dann der genaue Werth von α aus 48) und 49) berechnet wird. Diese geben nämlich, in Bezug auf β und γ aufgelöst und $m + 2n + p = q$ gesetzt,

53) $$tg\,\beta = \sqrt[q]{\frac{g^{m+n+p}}{f^{m+n+p}\,h^n}} \cdot \sqrt[q]{tg^{m+p}\,\alpha}$$

und

54) $$tg\,\gamma = \sqrt[q]{\frac{f^{n+p}\,g^{m+n}}{h^{n+p}}} \cdot \sqrt[q]{cot^{m-p}\,\alpha}.$$

Aus 53) und 54) ergeben sich die Grenzwerthe von α sehr rasch.

Vierter Abschnitt.

Auflösung der fünften Form.

55) $$x^{m+n+p} - f x^{m+n} - g x^m - h = 0.$$

Hier ist

$$f x^{m+n} + g x^m + h = x^{m+n+p}$$

zu setzen, dann wird durch Division mit x^{m+n+p} die auf 1 reducirte brauchbare Gleichung

56) $$\frac{f}{x^p}+\frac{g}{x^{n+p}}+\frac{h}{x^{m+n+p}}=1$$

erhalten, welche mit 7) verglichen, ergiebt

$$\text{I. } x^p=\frac{f}{tg\,\alpha\, tg\,\beta},\quad \text{II. } x^{n+p}=\frac{g}{tg\,\alpha\, tg\,\beta}\quad \text{und}\quad \text{III. } x^{m+n+p}=\frac{h}{tg\,\beta\, tg\,\gamma}.$$

Die Operation I.II:III ergiebt

57) $$\text{IV. } x^{m-p}=\frac{h}{fg}\,tg^2\alpha,$$

die Operation I.III:II ergiebt

58) $$\text{V. } x^{m+p}=\frac{fh}{g\,tg^2\beta}$$

und die Operation II.III:I ergiebt

$$\text{VI. } x^{m+2n+p}=\frac{gh}{f\,tg^2\gamma}.$$

Zur Elimination von x setzt man

$$\text{IV}^{m+p}=\text{V}^{m-p}$$

und erhält

59) $$tg^{m+p}\alpha\,.\,tg^{m-p}\beta=\frac{f^m g^p}{h^p};$$

wird ferner

$$\text{V}^{m+2n+p}=\text{VI}^{m+p}$$

gesetzt, so ergiebt sich

60) $$\frac{tg^{m+2n+p}\beta}{tg^{m+p}\gamma}=\frac{f^{m+n+p}h^n}{g^{m+n+p}}.$$

Die erste Art dieser Gleichungen, bei denen $m=p$, lassen sich direct auflösen. Aus 57) ist nämlich

61) $$tg\,\alpha=\sqrt{\frac{fg}{h}},$$

welcher Werth mit 50) übereinstimmt; d. h.: wenn der dort berechnete Winkel mit γ' bezeichnet wird, ist $\alpha=\gamma'$. In diesem Falle ist ferner die Summe der Winkel β und γ bekannt als

$$s=\beta+\gamma=90^0-\alpha,\ \text{daher ist}\ \gamma=s-\beta.$$

Diesen Werth in 60) gesetzt, ergiebt für die linke Seite dieser Gleichung

62) $$\frac{tg^{m+2n+p}\beta}{tg^{m+p}(s-\beta)},$$

einen Ausdruck, welcher von 0 bis ∞ wächst, sobald β alle Werthe von 0^0 bis s^0 annimmt. Daher erhält man nur einen Werth für β, welcher 60) zu genügen vermag, d. h.: die Gleichung 55) hat unter allen Umständen eine reelle positive Wurzel. Aus 60) ist β und aus 58) ist die *eine positive reelle* Wurzel x zu berechnen.

Da 50) und 52) dieselben Werthe wie 61) und 62) liefern, so können die quartinomischen Gleichungen von der zweiten [10)] und dritten Form [27)],

63) wenn $(m+n+p)$ sowie m ungerade und zugleich $(m+n)$ gerade ist,
drei reelle Wurzeln und zwar zwei positive und eine negative Wurzel haben.

Das Umgekehrte findet bei den quartinomischen Gleichungen von der vierten [43)] und fünften [55)] Form statt, welche,

wenn $(m+n+p)$, sowie m ungerade und $(m+n)$ gerade ist, eine positive reelle und zwei negative reelle Wurzeln haben können.

Ist

$$g^{m+n+p} = f^{m+n+p} h^n,$$

so haben genannte quartinomische Gleichungsformen zwei gleiche reelle Wurzeln.

Sind aber $(m+n+p)$ sowie $(m+n)$ gerade, dagegen m ungerade, so können diese quartinomischen Gleichungen vier reelle Wurzeln haben.

Für die zweite Art dieser Gleichungen, bei denen

$$m \lessgtr p,$$

wird aus 58) ein angenäherter Werth von β dadurch berechnet, dass man dazu einen genäherten Wurzelwerth, der nach 9) bestimmt wird, benutzt. Den genaueren Werth von β erhält man aus 59) und 60), indem man diese nach α und γ auflöst und $m+p=r$ setzt:

64) $$tg\,\alpha = \sqrt[r]{\frac{f^m g^p}{h^p}} \cdot \sqrt[r]{cot^{m-p}\beta}$$

und

65) $$tg\,\gamma = \sqrt[r]{\frac{g^{m+n+p}}{f^{m+n+p} h^n}} \cdot \sqrt[r]{tg^{m+2n+p}\beta}.$$

Ist β gefunden, wird die eine reelle positive Wurzel der Gleichung 55) aus 58) berechnet.

Vierte Abtheilung.

Numerische Berechnung der reellen Wurzeln der besprochenen quartinomischen Gleichungen.

Die bei der Auflösung der quartinomischen Gleichungen gefundenen Formeln für die Berechnung der nöthigen Hilfswinkel zeigen, dass dieselben sich sehr einfach mit Logarithmen indirect bestimmen lassen. Zur indirecten Berechnung der Hilfswinkel nach den in voriger Abtheilung entwickelten Formeln werden die Brigg'schen Logarithmen, die fast jedem Rechner zur Hand, angewandt.

Die Berechnung einer jeden Wurzel erfordert zwei Operationen. Zuerst ist indirect ein Hilfswinkel und dann direct die Wurzel zu berechnen.

Bei der ersten Operation, die annäherungsweise vollzogen wird, ist es oft vortheilhaft, zuerst das dreistellige Logarithmenblatt der goniometrischen Functionen von Professor Dr. Nell (in dessen Tafel S. 85), dann dessen fünfstellige und zuletzt, wenn man nicht mehr als sieben Decimalstellen haben will, die Vega'sche oder irgend eine andere Logarithmentafel zu benutzen.

Für genauere Resultate hat man nur Tafeln mit mehr als sieben Decimalstellen anzuwenden. Solche sind von Vega, Gillibrand, Brigg, Adrian Vlacq, Callet und Anderen berechnet worden.

Diese indirecte Berechnung lässt sich noch dadurch erleichtern, dass man beim Gebrauch der fünf- und siebenstelligen Logarithmentafel Zeiger zwischen die Seiten der Tafel, die man zu benutzen hat, legt, so dass man jedesmal nur einmal umzudrehen hat. Bei einiger Uebung im Logarithmenaufschlagen lässt sich dann eine Wurzel auf sieben Decimalstellen genau in ganz kurzer Zeit berechnen.

Immer ist es nicht nothwendig, für die stufenweise Annäherung Tafeln mit 3-, 5-, 7- und mehrstelligen Logarithmen anzuwenden; oft ist es sogar praktisch, von 3stelligen direct auf 7stellige Logarithmen überzugehen. — Meist ergeben sich für jede specielle Berechnung besondere Vereinfachungen. So zeigt es sich unter Anderem, dass für die Berechnung der negativen Wurzeln meist dieselben Winkel und Logarithmen zur Verwendung kommen müssen, wie bei der Berechnung der positiven Wurzeln.

Um das Zeichen des Fehlers einheitlich festzustellen, wird die zur Vergleichung nöthige Zahl immer abgezogen, so dass sie, wenn positiv, mit dem Minuszeichen, und wenn negativ, mit dem Pluszeichen erscheint. Für die Berechnung des Fehlers ist also meist die algebraische Summe zu suchen. Der Uebergang des Fehlers von + in − oder von − in + zeigt das Vorhandensein der Wurzeln an.

Erstes Beispiel.

$$x^{10} - 271\,x^7 + 580\,x^3 + 7895 = 0.$$

Diese Gleichung ist von der zweiten Form 10) und es ist

$$m = 3,\quad n = 4,\quad p = 3,\quad \text{ferner } f = 271,\quad g = 580 \text{ und } h = 7895.$$

Zur Untersuchung, ob die Gleichung positive reelle Wurzeln hat, ist nach 24) der Maximalwerth M des Ausdrucks 17) wie folgt zu bestimmen.

Aus 16) ist

$$tg\beta = \sqrt{\frac{7895}{271\,.\,580}},\quad \text{also}\quad \beta = 12^{0}\,37'\,56{,}257'',$$

und

$$\text{I.}\quad s = \alpha + \gamma = 90 - \beta = 77^{0}\,22'\,3{,}743'';$$

daher aus 22) und 23) der Werth

$$\log\cot(180 - 2\alpha) = 0{,}0471783,$$

folglich

$$\alpha = 69^{0}\,3'\,10{,}75'' \text{ und } s - \alpha = 8^{0}\,18'\,52{,}993'',$$

welche Werthe 17) zu einem Maximum machen als

$$M = tg^{14}(69^0\,3'\,10{,}75'').tg^6(8^0\,18'\,52{,}993'') = 6{,}7153954.$$

Nach 15) ist aber

$$\text{II.}\quad tg^{14}\alpha\, tg^6(s-\alpha) = \frac{580^{10}}{271^{10}.7895^4} = 0{,}00000000000051901\ldots$$

Da also $M > 0{,}00000000000051901\ldots$, so hat nach 24) die gegebene Gleichung **zwei positive Wurzeln**; und da $580^{10} < 271^{10}.7895^4$ ist, so hat die gegebene Gleichung nach 40) ***nur*** **zwei positive *reelle*** und **acht *imaginäre*** Wurzeln.

Berechnung der positiven Wurzeln.

Um diese zu erhalten, sind aus II die entsprechenden Werthe von α, wovon der eine klein und der andere nahe an $77^0\,22'$ liegen muss, zu berechnen. Aus II ist zunächst

$$tg^7\alpha.tg^3(77^0\,22'\,3{,}743''-\alpha) = \frac{580^5}{271^5.7895^2}$$

oder

$$\text{III.}\quad 7\,log\,tg\,\alpha + 3\,log\,tg(77^0\,22'\,3{,}743''-\alpha) = -6{,}1424107.$$

Die Grenzen von α ergeben sich mit dreiziffrigen Logarithmen aus folgender Zusammenstellung sofort.

Bei der Annahme von $\alpha_1 = 4^0$ ist aus I der Werth $\gamma = 73^0$. Nach III ist nun $7\,log\,tg\,4^0$ und $3\,log\,tg\,73'$ direct der Logarithmentafel zu entnehmen und deren Summe mit $-6{,}142$ zu vergleichen.

Berechnung von $7\,log\,tg\,\alpha_1 + 3\,log\,tg\,\gamma_1$ nach III.	Berechnung des Fehlers.	Correctur.
$7\,log\,tg\,4^0 = 0{,}915-9$	$-6{,}540$	
$+3\,log\,tg\,73^0 = 1{,}545$	$+6{,}142$	
$0{,}460-7 = -6{,}540$	$-0{,}398$	
$7\,log\,tg\,5^0 = 0{,}594-8$	$+6{,}142$	$\frac{2.60'}{5} = 24'$,
$1{,}464$	$-5{,}942$	
$0{,}058-6 = -5{,}942$	$+0{,}200$	also $\alpha_1 = 5^0 - 24'$
		$= 4^0\,36'$
Der Genauigkeit halber ist nun gleich mit siebenstelligen Logarithmen zu rechnen.		
$7\,log\,tg\,4^0\,36' = 0{,}3389879-8$	$+6{,}1424107$	
$+3\,log\,tg\,72^0\,46'\,3{,}743 = 1{,}5252028_4$	$-6{,}1358093$	
$0{,}8641907_4 - 7 = -6{,}1358093$	$+0{,}0066014$	$\frac{31.60''}{97} = 20''$,
$7\,log\,tg\,4^0\,35' = 0{,}3279062-8$	$-6{,}1455508$	
$+3\,log\,tg\,72^0\,47'\,3{,}743'' = 1{,}5265430_4$	$+6{,}1424107$	also $\alpha_1 = 4^0\,35'\,20''$
$0{,}8544492_4 - 7 = -6{,}1455508$	$-0{,}0031409$	
$7\,log\,tg\,4^0\,35'\,20'' = 0{,}3316043-8$	$+6{,}1424107$	$\frac{1109.20''}{32510} = 0{,}69''$,
$+3\,log\,tg\,72^0\,46'\,43{,}743'' = 1{,}5260959_4$	$-6{,}1422998$	also
$0{,}8577002-7 = -6{,}1422998$	$+0{,}0001109$	$\alpha_1 = 4^0\,35'\,19{,}31''$

Berechnung von $7\,log\,tg\,\alpha_1 + 3\,log\,tg\,\gamma_1$ nach III.	Berechnung des Fehlers.	Correctur.
Probe:	$-6,1424119$	$\frac{12.0,69''}{1121} = 0,007''$
$7\,log\,tg\,4^\circ 35' 19,31'' = 0,3814768-8$	$+6,1424107$	
$+3\,log\,tg\,72^\circ 46' 44,433'' = 1,5261113$	$-0,0000012$	also
$0,8575881-7 = -6,1424119$		$\alpha_1 = 4^\circ 35' 19,317''$
		auf tausendstel
		Secunde genau.

Der Werth von $log\,tg\,\alpha_1 = log\,tg\,4^\circ\,35'\,19,317'' = 0,9044168_6 - 2$ in 12) ergiebt, da

$$x^6 = \frac{271.7895}{580} \cdot tg^2\alpha \quad \text{oder IV.} \quad log\,x = log\sqrt[6]{\frac{271.7895}{580}} + \tfrac{1}{3}\,log\,tg\,\alpha$$

ist:

$$log\,x_1 = 0,5944322_3 + 0,6348322_9 - 1 = 0,2293145_2,$$

also:

$$x_1 = 1,69556531\ \ldots$$

Für die Berechnung der **zweiten positiven** Wurzel, da α_2 sehr nahe s^0 erreicht, benutzt man am bequemsten direct siebenstellige Logarithmen. Die Annahme von $\alpha_2 = 77^\circ\,21'$ ergiebt aus I den Werth für $\gamma = 1'\,3,743''$. Durch folgende Zusammenstellung ergiebt sich der genaue Werth von α_2.

Berechnung von $7\,log\,tg\,\alpha_2 + 3\,log\,tg\,\gamma_2$ nach III.	Berechnung des Fehlers.	Correctur.
$7\,log\,tg\,77^\circ 21' = 4,5422587$	$+6,1424107$	
$+3\,log\,tg\,1' 3,743'' = 0,4699914-11$	$-5,9877499$	
$0,0122501-6 = -5,9877499$	$+0,1546608$	$\frac{67.10''}{222} = 3'',$
$7\,log\,tg\,77^\circ 21' 10'' = 4,5429482$	$-6,2094517$	
$+3\,log\,tg\,53,743'' = 0,2476001-11$	$+6,1424107$	also
$0,7905483-7 = -6,2094517$	$-0,0670410$	$\alpha_2 = 77^\circ 21' 7''$
$7\,log\,tg\,77^\circ 21' 7'' = 4,5427413_5$	$+6,1424107$	$\frac{357.3''}{7061} = 0,152'',$
$+3\,log\,tg\,56,743'' = 0,3184226-11$	$-6,1388360._5$	also
$0,8611639_5-7 = -6,1388360_5$	$+0,0035746._5$	$\alpha_2 = 77^\circ 21' 7,152''$
Probe:		
$7\,log\,tg\,77^\circ 21' 7,152'' = 4,5427518_3$	$+6,1424107$	$\frac{799.2,848''}{671209} = 0,003''$
$+3\,log\,tg\,56,591'' = 0,3149174-11$	$-6,1423308$	
$0,8576692_3-7 = -6,1423307_7$	$+0,0000799$	also
		$\alpha_2 = 77^\circ 21' 7,155$
		auf tausendstel
		Secunde genau.

Der Werth von $\log tg\, \alpha_2 = \log tg\, 77^0 21' 7,155'' = 0,6489645_{768}$ in IV liefert:

$$\log x_2 = 0,5944822_3 + 0,2163215_{256} = 0,8108037_{556},$$

demnach

$$x_2 = 6,46850232\ldots$$

auf acht Decimalstellen genau.

Die zwei positiven *reellen* Wurzeln der Gleichung

$$x^{10} - 271 x^7 + 580 x^3 + 7895 = 0$$

sind also

$$x_1 = 1,69556531\ldots \text{ und } x_2 = 6,46850232\ldots$$

Nach 40) hat hiernach die Gleichung

$$x^{10} + 271 x^7 - 580 x^3 + 7895 = 0$$

acht imaginäre Wurzeln und nur folgende *zwei negative reelle* Wurzeln:

$$x_1 = -1,69556531\ldots \text{ und } x_2 = -6,46850232\ldots$$

Zweites Beispiel.

$$x^3 + 11 x^2 - 102 x + 181 = 0.$$

An diesem Beispiel soll gezeigt werden, welchen Vortheil diese Methode bei der Aufsuchung von Wurzeln, welche bis auf eine Anzahl Decimalstellen übereinstimmen, bietet. Die Gleichung gehört zur dritten Form 27) und hat nach 39) und 63), wenn

$$M > \frac{11^3 . 181}{102^3}, \text{ d. h. } > 0,22701581\ldots$$

ist, zwei positive und eine negative reelle Wurzel.

Aus 33) ist

$$tg\,\beta = \sqrt{\frac{181}{11.102}}, \text{ also } \beta = 21^0 52' 57,5''.$$

Daher ist

$$s = \alpha + \gamma = 90 - \beta = 68^0 7' 2,5'' \text{ und } 180 - 2s = 43^0 45' 55''.$$

Nach 35) ist nun

$$\log \sin \varphi = 9,7788076 - 10 \text{ und } \varphi = 36^0 56' 5,71'',$$

folglich aus 36)

$$\log \cot 2\alpha = 0,2665484_{56} \text{ und } \alpha = 14^0 12' 49,38'',$$

also

$$s - \alpha = 53^0 54' 13,12''.$$

Dies in 34) giebt

$$M = tg^2 (14^0 12' 49,38'') . tg^4 (53^0 54' 13,12'') = 0,22702109\ldots$$

Da aber $\frac{11^3 . 181}{102^3} = 0,22701581\ldots$, der Werth der rechten Seite der Gleichung 32) hiernach kleiner, aber beinahe bis zur fünften Decimalstelle mit M übereinstimmt, so hat die Gleichung zwei positive Wurzeln, welche auf mehrere Decimalstellen miteinander übereinstimmen. Sind beide Werthe

gleich, so sind die zwei positiven Wurzeln gleich oder haben mindestens sieben Decimalstellen gemein.

Die Werthe von α können daher hier auch nur einige Minuten von $14^0\,12'49{,}38''$ differiren, und ist α_1 um ungefähr dieselbe Anzahl Minuten kleiner, als α_2 grösser.

Zur Berechnung dieser Werthe sind hier natürlich gleich siebenstellige Logarithmen zu benutzen.

Aus 29) und 32) erhält man die zur Rechnung nöthigen Formeln, als

$$\text{I.}\quad \log x = 0{,}8062215_{25} + \tfrac{1}{2}\log tg\,\alpha$$

und

$$\text{II.}\quad \log tg\,\alpha + 2\log tg(68^0\,7'\,2{,}5'' - \alpha) = -0{,}3219719_5.$$

Berechnung der ersten positiven Wurzel.

Berechnung von $\log tg\alpha + 2\log tg(s-\alpha)$ nach II.	Berechnung des Fehlers.	Correctur.
$\log tg\,14^0\,8' = 9{,}4010578 - 10$	$-0{,}3219734_5$	
$+2\log tg\,53^0\,59'\,2{,}5'' = 0{,}2769687_5$	$+0{,}3219719_5$	
$9{,}6780265_5 - 10 = -0{,}3219734_5$	$-0{,}0000015$	$\frac{15.60''}{20} = 45''$,
$\log tg\,14^0\,9' = 9{,}4015910 - 10$	$+0{,}3219719_5$	also
$+2\log tg\,53^0\,58'\,2{,}5'' = 0{,}2764375_5$	$-0{,}3219714_5$	$\alpha_1 = 14^0 8' 45''$
$9{,}6780285_5 - 10 = -0{,}3219714_5$	$+0{,}0000005$	$\frac{15.45''}{17} = 39{,}7''$,
$\log tg\,14^0\,8'\,45'' = 9{,}4014578 - 10$		also
$+2\log tg\,53^0\,58'\,17{,}5'' = 0{,}2765704_5$		$\alpha_1 = 14^0 8' 39{,}7''$
$9{,}6780282_5 - 10 = -0{,}3219717_5$	$+0{,}0000002$	$\frac{35.39{,}7''}{1535} = 0{,}9''$,
$\log tg\,14^0\,8'\,39{,}7'' = 9{,}4014107_{33} - 10$		also
$+2\log tg\,53^0\,58'\,22{,}8'' = 0{,}2766173_{52}$		$\alpha_1 = 14^0 8' 38{,}8''$
$9{,}6780280_{85} - 10 = -0{,}3219719_{15}$	$+0{,}0000000_{35}$	$\frac{10.0{,}9''}{46} = 0{,}196''$,
$\log tg\,14^0\,8'\,38{,}8'' = 9{,}4014027_{32} - 10$		also
$+2\log tg\,53^0\,58'\,23{,}7'' = 0{,}2766253_{08}$		
$9{,}6780280_4 - 10 = -0{,}3219719_6$	$-0{,}0000000_1$	$\alpha_1 = 14^0 8' 38{,}996''$

Daher $\log tg\,\alpha_1 = 9{,}4014044_{74} - 10$. Dies in I giebt:

$$\log x_1 = 0{,}5069273_{62},\quad \text{also}\quad x_1 = 3{,}213096014\ldots$$

Berechnung der zweiten positiven Wurzel.

Berechnung von $\log tg\alpha + 2\log tg(s-\alpha)$ nach II.	Berechnung des Fehlers.	Correctur.
$\log tg\,14^0\,16' = 9{,}4053076 - 10$ $+2\log tg\,53^0\,21'\,2{,}5'' = 0{,}2727221$ $\} = -0{,}3219703$	$+0{,}0000016_5$	$\frac{5.60''}{170} = 1{,}764''$,
$\log tg\,14^0\,17' + 2\log tg\,53^0\,50'\,2{,}5'' = -0{,}3219720$	$-0{,}0000000_5$	$\alpha_2 = 14^0 16' 58{,}236''$

Demnach $\log tg\, \alpha_2 = 9{,}405827_{5916} - 10$; aus I ist dann

$$\log x_2 = 0{,}5091319_{0458} \text{ und } x_2 = 3{,}229474849\ldots$$

Da der Coefficient des zweiten Gliedes einer vollständigen Gleichung gleich ist der Summe der Wurzeln mit entgegengesetztem Zeichen genommen, so sind hiernach die drei reellen Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0:$$

$$x_1 = +\ 3{,}213096014\ldots,$$
$$x_2 = +\ 3{,}229474849\ldots$$
$$\text{und } x_3 = -\ 17{,}442570863\ldots$$

Nach 63) hat die cubische Gleichung $x^3 - 11x^2 - 102x - 181 = 0$ eine positive und zwei negative reelle Wurzeln als

$$x_1 = +\ 17{,}442570863\ldots,$$
$$x_2 = -\ 3{,}213096014\ldots$$
$$\text{und } x_3 = -\ 3{,}229474849\ldots$$

Drittes Beispiel.

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 52 = 0.$$

a) Bestimmung der positiven Wurzeln.

Diese Gleichung ist von der vierten Form 43) und hat nach 52) nur eine positive *reelle* Wurzel. Hier ist $f = 2$, $g = 3$, $h = 52$ und $m = n = p = 1$, daher aus 47)

$$tg\gamma = \sqrt{\frac{2.3}{52}} = \sqrt{\frac{3}{26}},$$

also

$$\log tg\gamma = 9{,}5310740 - 10 \text{ oder } \gamma = 18^0\, 45'\, 42{,}3'',$$

folglich

$$\alpha + \beta = 90 - \gamma = 71^0\, 14'\, 17{,}7'' \text{ oder } \beta = 71^0\, 14'\, 17{,}7'' - \alpha.$$

Dies in 49) giebt

$$\text{I. } \log tg\,\alpha - 2 \log tg (71^0\, 14'\, 17{,}7'' - \alpha) = 0{,}5938647_5.$$

Hieraus wird nun der gesuchte Werth für α wie folgt erhalten:

α.	Berechnung nach I. $\log tg\alpha - 2 \log tg\beta$.	Fehler.	Correctur.
45^0	0,624	+ 0,031	$\frac{37.60'}{68} = 33'$,
44^0	0,556	− 0,037	also $\alpha_1 = 44^0\, 33'$
$44^0\, 33'$	0,59076	− 0,00310	$\frac{310.4'}{353} = 3{,}5'$,
$44^0\, 37'$	0,59429	+ 0,00043	also $\alpha = 44^0\, 36'\, 30''$
$44^0\, 36'\, 30''$	0,5936661	− 0,0001986	$\frac{1986.15''}{2207} = 13{,}5''$,
$44^0\, 36'\, 45''$	$0{,}5938868_1$	+ 0,0000221	also $\alpha = 44^0\, 36'\, 43{,}5''$
$44^0\, 36'\, 43{,}5''$	$0{,}5938647_5$	+ 0,00000000	bis zur achten Decimalstelle genau.

Aus 45) ist

$$x^4 = \frac{3.52}{2} tg^2 \alpha \quad \text{oder} \quad log x = \tfrac{1}{2} log tg \alpha + \tfrac{1}{4} log 78.$$

Da nun

$$log tg \alpha = log tg 44^0 36' 43,5'' = 0,9941191_8 - 1,$$

so ist hiernach

$$log x_1 = 0,47008321 \quad \text{und} \quad x_1 = 2,9517749 \ldots$$

b) Bestimmung der negativen reellen Wurzeln.

Um diese zu erhalten, hat man in die gegebene Gleichung $x = -y$ zu setzen und die positiven reellen Wurzeln der Gleichung

$$y^3 - 2y^2 + 3y + 52 = 0$$

zu bestimmen. Nach 51) ist nun

$$\beta' = 71^0 14' 17,7'' \quad \text{und} \quad s' = 18^0 45' 42,3'';$$

der Werth von α'_1, welcher den Ausdruck 17) zu einem Maximum macht, ist hiernach aus 20) und 21) zu berechnen. Man findet $\alpha_1 = 12^0 36' 39,07''$ und das Maximum M aus 17)

$$M = tg^4(12^0 36' 39,07'') . tg^2(6^0 9' 3,23'') = 0,00002909687 \ldots;$$

der Werth von 17) ist aber nach 15)

$$\frac{3^3}{2^3.52} = \frac{27}{416} = 0,06490385 \ldots$$

Da nun $M < 0,06490385 \ldots$, so hat die gegebene Gleichung nach 24) gar keine *negative reelle* Wurzel, d. h. die beiden anderen Wurzeln sind imaginär *(complex)* und müssen *conjugirt* sein.

c) Die Berechnung des conjugirten Wurzelpaares.

Die imaginären und reellen Theile eines conjugirten Wurzelpaares müssen numerisch gleich sein, weil nur dann durch Multiplication, sowie durch Addition der imaginäre Theil wegfällt, und nur dann das Zahlenglied (Product der Wurzeln) und der Coefficient des zweiten Gliedes der Gleichung (die Summe aller Wurzeln mit entgegengesetztem Zeichen) reelle Grössen werden können. Diese Wurzeln haben also die Form $y + iz$ und $y - iz$.

Die *imaginären* Wurzeln können auf demselben hier angegebenen Wege berechnet werden. Man braucht nur in die gegebene Gleichung $y + iz$ für x einzuführen und dann das Reelle vom Imaginären zu trennen. Es entstehen zwei Gleichungen, die nach z geordnet, folgende Gestalt annehmen:

$$\text{I.} \quad z^2(3y+1) - (y^3 + 2y^2 + 3y - 52) = 0$$

und

$$\text{II.} \quad z\{z^2 - (3y^2 + 4y + 3)\} = 0.$$

Da z *ex hyp.* nie den Werth 0 annehmen kann — denn sonst wäre der imaginäre Theil der Wurzel $= 0$ —, so wird aus II die Gleichung

$$\text{III.}\quad z^2 = 3y^2 + 4y + 3,$$

was in I eingeführt

$$y^3 + \tfrac{13}{8}y^2 + \tfrac{10}{8}y + \tfrac{55}{8} = 0$$

liefert, welche Gleichung die Werthe von y ergiebt. Diese lassen sich jedoch oft einfacher dadurch bestimmen, dass man die Eigenschaft der auf 0 reducirten algebraischen Gleichung, deren erstes Glied den Coefficienten 1 hat, anwendet; als:

„Der Coefficient des zweiten Gliedes ist gleich der Summe aller Wurzeln mit entgegengesetztem Zeichen genommen.“

Da ferner der imaginäre Theil der conjugirten Wurzeln beim Addiren sich aufhebt, so ist der Coefficient 2 des zweiten Gliedes der gegebenen Gleichung gleich der entgegengesetzten Summe der gefundenen positiven Wurzel und der reellen Theile des conjugirten Wurzelpaares, d. h. es ist

$$-2{,}9517749 + 2(-y) = 2, \quad \text{also} \quad y = -2{,}4758874\ldots,$$

und aus III ist dann

$$z = \pm\sqrt{3.\overline{2{,}4758874}^2 - 4.2{,}4758874 + 3} = \pm 3{,}3829293\ldots$$

Die sämmtlichen drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 52 = 0$$

sind somit:

$$x_1 = +2{,}9517749\ldots$$
$$x_2 = -2{,}4758874 + 3{,}3829293.i$$
$$\text{und}\quad x_3 = -2{,}4758874 - 3{,}3829293.i.$$

Viertes Beispiel.

$$x^3 - 2x^2 - 30x - 39 = 0.$$

a) Auffindung der positiven reellen Wurzel.

Diese Gleichung gehört zur fünften Form 55) und hat nach 62) unter allen Umständen *eine* positive *reelle* Wurzel.

Aus 61) erhält man

$$\alpha = 51^0\, 7'\, 24{,}06'', \quad \text{daher ist} \quad \gamma = 38^0\, 52'\, 35{,}94'' - \beta$$

und aus 60) ist

$$\text{I.}\quad log\,tg\,\gamma - 2\,log\,tg\,\beta = 0{,}9686045_5$$

und aus 58) ist

$$\text{II.}\quad log\,x = 0{,}2074866_5 - log\,tg\,\beta.$$

Aus I ist, wie folgt, $log\,tg\,\beta$ nach und nach zu bestimmen und dann aus II die Wurzel x.

β.	Berechnung von $\log tg\,\gamma - 2 \log tg\,\beta$ nach I.	Fehler.	Correctur.
13^0 12^0	0,962 1,053	− 0,006 + 0,085	$\frac{6.60'}{91} = 4'$, also $\beta = 13^0 - 4' = 12^0\,56'$
$12^0\,56'$ $12^0\,52'\,35,94''$	0,9649843 0,9700228	− 0,0036202 + 0,0014183	$\frac{14.(4'\,35,94'')}{50} = 1'\,17,26''$, also $\beta = 12^0\,53'\,53,2''$
$12^0\,53'\,53,2''$ $12^0\,53'\,33,33''$	0,9681133 $0,9686045_7$	− 0,0004912 $+ 0,0000000_2$	$\frac{14183.(1'\,17,26'')}{19095} = 57,39''$, $\beta = 12^0\,53'\,33,33''$ also bis zur achten Decimalstelle genau.

Da nun $\log tg\,\beta = \log tg\,12^0\,53'\,33,33'' = 9,3596352_{34} - 10$, so ist aus II

$$\log x_1 = 0,8478514_{16}, \quad \text{also} \quad x_1 = 7,04451993\ldots$$

b) Auffindung der negativen reellen Wurzeln.

Diese werden erhalten, wenn man in die gegebene Gleichung $x = -y$ setzt und die positiven reellen Wurzeln der Gleichung von der dritten Form 27)

$$y^3 + 2y^2 - 30y + 39 = 0$$

bestimmt. Nach 39) hat dieselbe zwei positive reelle Wurzeln, sobald

$$M > \frac{2^3.39}{30^3}.$$

Die Vergleichung von 33) mit 61) ergiebt, dass

$$\beta' = 90 - \alpha = 38^0\,52'\,35,94'',$$

folglich ist

$$\gamma' = 90 - \beta' - \alpha' = 51^0\,7'\,24,06'' - \alpha_1.$$

Aus 35) und 36) entsteht nun

$$\alpha' = 14^0\,19'\,50,655'' \quad \text{und} \quad \gamma' = 36^0\,47'\,33,41'',$$

welche Werthe 34) zu einem Maximum

$$M = tg^2(14^0\,19'\,50,65'').tg^4(36^0\,47'\,33,41'') = 0,02041913\ldots$$

machen. Da nun $\frac{2^3.39}{30^3} = \frac{39}{15^3} = 0,01155556\ldots$, so ist $M > \frac{2^3.39}{30^3}$ und die gegebene Gleichung hat zwei positive reelle Wurzeln, für welche die entsprechenden Werthe für α' über und unter 14^0 liegen müssen.

Aus 29) oder aus

$$\text{III.} \quad \log y = 0,6917890 + \tfrac{1}{2} \log tg\,\alpha'$$

wird y berechnet, sobald die genauen Werthe von α' aus 32) oder aus

$$\text{IV.} \quad \log tg\,\alpha_1 + 2 \log tg\,\gamma' (= 51^0\,7'\,24,06'' - \alpha_1) = -0,9686045_5$$

wie folgt bestimmt worden sind.

Bestimmung des ersten Werthes von α', also α'_1.

α'_1.	Berechnung von $\log tg\,\alpha'_1 + 2 \log tg\,\gamma'_1$ nach IV.	Fehler.	Correctur.
6^0	$-0{,}978$	$-0{,}010$	$\frac{10.60'}{37} = 16'$
7^0	$-0{,}941$	$+0{,}027$	
mit 7stell. Logar.			
6^0	$-0{,}9746398$	$-0{,}0060353$	$\frac{60.16'}{109} = 8'\,50''$
$6^0\,16'$	$-0{,}9636946$	$+0{,}0049099$	
$6^0\,8'\,50''$	$-0{,}9684966$	$+0{,}0001079$	$\frac{1079.580''}{61432} = 9{,}31''$
$6^0\,8'\,40{,}69''$	$-0{,}9686024$	$+0{,}0000021$	
$6^0\,8'\,40{,}51''$	$-0{,}9686044$	$+0{,}0000001$	$\frac{21.520{,}69''}{60374} = 0{,}18''$, also in der 7. Stelle genau

Bestimmung des zweiten Werthes von α', also α'_2.

α'_2.	Berechnung von $\log tg\,\alpha'_2 + 2 \log tg\,\gamma'_2$ nach IV.	Fehler.	Correctur.
25^0	$-0{,}955$	$+0{,}013$	$\frac{5.60'}{18} = 16'$
26^0	$-0{,}973$	$-0{,}005$	also $\alpha'_2 = 26^0 - 16' = 25^0\,44'$
$25^0\,44'$	$-0{,}9642726$	$+0{,}0043319$	$\frac{10.44'}{53} = 8'\,18''$
26^0	$-0{,}9695998$	$-0{,}0009953$	
$25^0\,51'\,42''$	$-0{,}9668215$	$+0{,}0017880$	$\frac{17830.8'\,18''}{27783} = 5'\,20''$
$25^0\,57'\,02''$	$-0{,}9686032$	$+0{,}0000013$	
$25^0\,57'\,02{,}23''$	$-0{,}9686044_5$	$+0{,}0000001$	$\frac{13.2'\,58''}{9966} = 0{,}23''$ genau bis zur 7. Stelle

Hiernach ist also

$$\log tg\,\alpha'_1 = \log tg\, 6^0\,8'\,40{,}51'' = 9{,}0320395 - 10$$

und

$$\log tg\,\alpha'_2 = \log tg\, 25^0\,57'\,02{,}23'' = 9{,}6872311_3 - 10.$$

Diese Werthe in III ergeben

$$\log y_1 = 0{,}2078087_5, \text{ folglich } y_1 = 1{,}61364777\ldots,$$

und

$$\log y_2 = 0{,}5354045_6, \quad \text{„} \quad y_2 = 3{,}43087213\ldots$$

Die drei reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 30x - 39 = 0$$

sind somit:

$$x_1 = +\,7{,}04451993\ldots$$

$$x_2 = -\,1{,}61364777\ldots$$

und $x_3 = -\,3{,}43087213\ldots$

deren Summe $= -\,2{,}00000003$ bis auf sieben Decimalstellen genau mit dem wahren Werthe (= dem Coefficienten des zweiten Gliedes der Gleichung mit entgegengesetztem Zeichen genommen) übereinstimmt, welches Resultat der Genauigkeit der siebenstelligen Logarithmen entspricht.

VI.

Zusammenstellung von Constructionen an Curven höherer Ordnung.

Von

RICHARD HEGER

in Dresden.

Die folgenden, grösstentheils linearen Constructionen beziehen sich theils auf Herstellung fehlender Schnittpunkte, theils auf Erzeugung von Curven; es sind zumeist nur im Einzelnen durchgeführte Anwendungen bekannter Methoden. Der Vollständigkeit wegen sind einige allgemein bekannte Constructionen vorausgeschickt. Wird mit 1^m ausgedrückt, dass eine gewisse Curve den gegebenen Punkt 1 als m-fachen Punkt besitzen soll, und wird durch das Zeichen $\begin{cases} C_m \\ \Gamma_n \end{cases}$ angedeutet, dass es sich um die Construction der noch fehlenden Schnittpunkte der Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung C_m und Γ_n handelt, so enthält diese Zusammenstellung die Lösung folgender Aufgaben:

1) $\begin{cases} C_3 \ldots 1^2\,2\;3\;4\;5\;6\;7, \\ \Gamma_3 \ldots 1^2\,2\;3\;4\;5\;8\;9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} C_3 \ldots 1^2\,2\;3\;4\;5\;6\;7, \\ \Gamma_3 \ldots 1\;2^2\,3\;4\;5\;6\;8; \end{cases}$

3) $C_4 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4\;5\;6\;7\;8;$

4) $\begin{cases} C_4 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4\;5\;6\;7\;8, \\ \Gamma_4 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4\;5\;6\;9\;10; \end{cases}$

5) $C_6 \ldots 1^3\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\;8\;9;$

6) $C_5 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\;8;$

7) $C_8 \ldots 1^4\,2^4\,3^4\,4^2\,5^2\,6^2\,7\;8\;9\;10\;11;$

8) $C_6 \ldots 1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5\;6\;7\;8\;9\;10;$

9) $\begin{cases} C_6 \ldots 1^3\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\;8\;9, \\ \Gamma_6 \ldots 1^3\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\;10\;11; \end{cases}$

10) $\begin{cases} C_5 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\;8, \\ C_4 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4\;5\;6\;7\;9; \end{cases}$

11) $C_9 \ldots 1^4\,2^4\,3^4\,4^3\,5^3\,6^3\,7^2\,8\;9\;10;$

12) $C_7 \ldots 1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^2\,6^2\,7^2\,8\;9;$

13) $\begin{cases} C_5 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\;\;8, \\ \Gamma_5 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,9\;10; \end{cases}$

14) $C_{10} \ldots 1^4\,2^4\,3^4\,4^4\,5^4\,6^4\,7\;\;8\;\;9\;10\;11;$

15) $C_8 \ldots 1^4\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,7\;\;8\;\;9\;10;$

16) $C_{10} \ldots 1^4\,2^4\,3^4\,4^4\,5^4\,6^3\,7^3\,8\;\;9\;10;$

17) $\begin{cases} C_6 \ldots 1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5\;\;6\;\;7\;\;8\;\;9\;10, \\ \Gamma_6 \ldots 1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5\;\;6\;\;7\;\;8\;11\;12; \end{cases}$

18) $C_{12} \ldots 1^6\,2^6\,3^6\,4^4\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2\,9\;10\;11\;12\;13;$

19) $C_8 \ldots 1^4\,2^4\,3^4\,4^3\,5\;\;6\;\;7\;\;8\;\;9\;10\;11\;12;$

20) $C_4 \ldots 1^3\,2\;\;3\;\;4\;\;5\;\;6\;\;7\;\;8\;\;9;$

21) $\begin{cases} C_4 \ldots 1^3\,2\;\;3\;\;4\;\;5\;\;6\;\;7\;\;8\;\;9, \\ \Gamma_4 \ldots 1^3\,2\;\;3\;\;4\;\;5\;\;6\;\;7\;10\;11; \end{cases}$

22) $C_8 \ldots 1^6\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8\;\;9\;10\;11\;12;$

23) $C_5 \ldots 1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\;\;6\;\;7\;\;8\;\;9;$

24) $\begin{cases} C_5 \ldots 1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\;\;6\;\;7\;\;8\;\;9, \\ \Gamma_5 \ldots 1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\;\;6\;\;7\;10\;11; \end{cases}$

25) $C_{10} \ldots 1^6\,2^4\,3^4\,4^4\,5^2\,6^2\,7^2\,8\;\;9\;10\;11\;12;$

26) $C_5 \ldots 1^4\,2\;\;3\;\;4\;\;5\;\;6\;\;7\;\;8\;\;9\;10\;11;$

27) $\begin{cases} C_5 \ldots 1^4\,2\;\;3\;\;4\;\;5\;\;6\;\;7\;\;8\;\;9\;10\;11, \\ \Gamma_5 \ldots 1^4\,2\;\;3\;\;4\;\;5\;\;6\;\;7\;\;8\;\;9\;12\;13; \end{cases}$

28) $C_{10} \ldots 1^8\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2\,9^2\,10\;11\;12\;13\;14;$

29) $C_6 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8\;8'\;9\;9'\;10\;10'\;11\;11'\;12\;12'$ (besondere Curve);

30) $C_5 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8$ (Rohn's Constr.),

31) $C_8 \ldots 1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,7^3\,8\,9;$

$\begin{cases} C_8 \ldots 1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,7^3\,8\,9, \\ \Gamma_8 \ldots 1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,7^3\,10\,11; \end{cases}$

32) $C_6 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\;\;8\;\;9\;10\;11\;12\;13\;14\;15;$

33) $C_6 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8\;\;9\;10\;11\;12\;13\ldots$ (Jacobi'sche Curve eines Netzes von Curven III. Ordnung mit 7 gemeinsamen Punkten).

34) bis 37) Constructionen besonderer Curven IV., V., VI. u. VIII. Ordn., sowie einer Curve III. O. aus 2 correspondirenden und 6 weiteren Punkten.

$$1.\quad \begin{cases} C_3 \ldots 1^2\,2\;3\;4\;5\;6\;7 \\ \Gamma_3 \ldots 1^2\,2\;3\;4\;5\;8\;9 \end{cases} \quad \text{(linear).}$$

Aus 1^2 und 2 projicirt man durch Strahlen die 3 4 5, durchschneidet 13), 14), 15) mit einer durch 3 gezogenen Geraden a in $3'4'5'$ und projicirt $3'4'5'$ von einem auf 2 3 gewählten Punkte P aus. Jede Curve

III. Ordnung, welche $1^2\,2\,3\,4\,5$ enthält, wird durch eine Strahlinvolution 1^2 und durch ein projectives Büschel 2 erzeugt, welche nach 3, 4, 5 entsprechende Elemente senden. Mit der Involution 1^2 ist eine Involution P rücksichtlich a perspectiv, also mit 2 projectiv. Da nun hierbei $P2$ sich selbst entspricht, so sind P und 2 in reducirter Lage, erzeugen daher einen Kegelschnitt $\varkappa$, der $P\,4\,5$ enthält. Die beiden so erzeugten Kegelschnitte, die zu C_3 und Γ_3 gehören, haben somit $P\,4\,5$ gemein; der vierte Schnittpunkt x' bestimmt ein Elementenpaar der 1^2 und der 2, die einander entsprechen, sowohl, wenn man sie zu den Gebilden rechnet, welche C_3, als zu denen, welche Γ_3 erzeugen; daher bestimmen dieselben den fehlenden Punkt $C_3\,\Gamma_3$.

$$2.\quad \begin{cases} C_3 \ldots 1^2\,2\;\,3\,4\,5\,6\,7 \\ \Gamma_3 \ldots 1\;\,2^2\,3\,4\,5\,6\,8 \end{cases} \quad \text{(linear).}$$

Man erhält C_3 durch das Kegelschnittbüschel

[1 2 3 4] (5 6 7...)

und das projective Strahlbüschel

[1] (5 6 7...);

die andere Curve Γ_3 entsteht durch das Kegelschnittbüschel

[1 2 3 4] (5 6 8...)

und das projective Strahlbüschel

[2] (5 6 8...).

Der gesuchte Punkt ist daher auf dem Kegelschnitte $\varkappa$ enthalten, den die beiden Strahlbüschel erzeugen.

Man kann aber C_3 und Γ_3 auch aus dem Kegelschnittbüschel

[1 2 3 5] (4 6 7 8...)

in Verbindung mit den projectiven Strahlbüscheln

[1] (4 6 7...) bez. [2] (4 6.8...)

erzeugen; folglich ist der gesuchte Punkt X auch auf dem Kegelschnitte λ enthalten, den diese beiden Strahlbüschel ergeben. Daher ist X der vierte Schnittpunkt von $\varkappa$ und λ.

$$3.\quad C_4 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8^* \quad \text{(linear).}$$

Die projectiven Kegelschnittbüschel

[1 2 3 4] (6 7 8...) und [1 2 3 5] (6 7 8...)

erzeugen diese Curve. Mit Hilfe der Tangentenbüschel, welche zu den beiden Büscheln in zwei verschiedenen Trägern construirt werden, wird die Curve eindeutig auf einen Kegelschnitt abgebildet.

---

* Nr. 3) und 4) behandelt u. A. Kortum: Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades, Bonn 1869, S. 34flg.

$$4.\quad \begin{cases} C_4 \ldots 1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\; 5\; 6\; 7\; 8 \\ \Gamma_4 \ldots 1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\; 5\; 6\; 9\; 10 \end{cases} \quad \text{(linear)}.$$

Wenn man die in Nr. 3) erwähnten Tangentenbüschel z. B. in 1 und 2 construirt, so erhält man das Tangentenbüschel 1 in doppelter Weise projectiv bezogen auf das Büschel 2, nämlich rücksichtlich C_4 sowohl, als rücksichtlich Γ_4. Die beiden Kegelschnitte, auf welche C_4 und Γ_4 dadurch abgebildet werden, haben die gemeinsamen Punkte 1 2 und das Bild von 6; ihr vierter Schnittpunkt X ist das Bild des gesuchten Punktes.

$$5.\quad C_6 \ldots 1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8\; 9 \quad \text{(linear)}.$$

Diese Curve erzeugt man durch die beiden Büschel von rationalen Curven III. Ordnung

$$[1^2\, 2\; 3\; 4\; 5\; 6]\,(7\; 8\; 9 \ldots) \;\overline{\wedge}\; [1\; 2^2\, 3\; 4\; 5\; 6]\,(7\; 8\; 9 \ldots),$$

für welche die Ergänzung und die Construction des fehlenden Schnittpunktes entsprechender Curven [Nr. 2)] in bekannter Weise linear erfolgt.

$$6.\quad C_5 \ldots 1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8 \quad \text{(linear)}.$$

Man richtet zwei Büschel rationaler cubischer Curven ebenso ein, wie in Nr. 5), und setzt ausser den nach 7 und 8 gehenden Curven noch die beiden zerfallenden Curven einander entsprechend, welche aus der Geraden 12 und den Kegelschnitten 1 3 4 5 6 bez. 23456 bestehen. Diese beiden entsprechenden Büschelcurven haben alsdann 1 2 entsprechend gemein; die Büschel erzeugen daher ausser 1 2 die C_5, welche $1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8$ enthält.

$$7.\quad C_8 \ldots 1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8\; 9\; 10\; 11 \quad \text{(linear)}.$$

Man erhält diese Curve durch zwei projective Büschel von rationalen Curven IV. Ordnung

$$[1^3\, 2^3\, 3^3\, 4\; 5\; 6\; 7]\,(9\; 10\; 11 \ldots) \;\overline{\wedge}\; [1^3\, 2^3\, 3^3\, 4\; 5\; 6\; 8]\,(9\; 10\; 11 \ldots).$$

Der bewegliche Schnittpunkt entsprechender Curven wird nach Nr. 4) gefunden.

$$8.\quad C_6 \ldots 1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5\; 6\; 7\; 8\; 9\; 10 \quad \text{(linear)}.$$

Wenn man bei der vorigen Construction 11 weglässt und dafür die beiden Curven IV. Ordnung entsprechend setzt, welche in die Kegelschnitte 12356 und 1 2 3 4 7 bez. 1 2 3 4 8 zerfallen, so besteht die erzeugte Curve aus 1 2 3 5 6 und aus der gesuchten C_6.

$$9.\quad \begin{cases} C_6 \ldots 1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8\; 9 \\ \Gamma_6 \ldots 1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 10\; 11 \end{cases} \quad \text{(linear)}.$$

Die Tangentenbüschel, in 2 und 1 an die Curvenbüschel III. Ordnung gelegt, welche C_6 und Γ_6 erzeugen, bestimmen zwei Kegelschnitte $\varkappa$ und λ, auf welche die Curven C_6 und Γ_6 eindeutig abgebildet sind; beide haben 1 2 und das Bild von 7 gemein; der vierte Schnittpunkt ist das Bild des gesuchten Punktes.

10. $\begin{cases} C_5 \ldots 1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8 \\ C_4 \ldots 1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\; 5\; 6\; 7\; 9 \end{cases}$ (linear).

Die C_5 giebt in Verbindung mit der Geraden 1 2 eine C_6, und die C_4 in Verbindung mit dem Kegelschnitte 1 2 4 5 6 eine Γ_6, auf welche die Construction Nr. 9) angewendet werden kann; dabei ist nur zu bemerken, dass der für C_6 noch nöthige Punkt auf 1 2, und der für Γ_6 noch nöthige auf 1 2 4 5 6 anzunehmen sind.

11. $C_9 \ldots 1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^3\, 5^3\, 6^3\, 7^2\, 8\; 9\; 10$ (linear).

Diese Curve erzeugt man durch ein Büschel V. Ordnung

$[1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7]\,(8\; 9\; 10\ldots)$

und ein projectives IV. Ordnung

$[1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\; 5\; 6\; 7]\,(8\; 9\; 10\ldots)$.

12. $C_7 \ldots 1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8\; 9$ (linear).

Zu dem in Nr. 11) verwandten Büschel V. Ordnung gehört die zerfallende Curve, welche aus dem Kegelschnitte $C_2 \ldots 1\; 2\; 3\; 5\; 6$ und aus der $C_3 \ldots 1\; 2\; 3\; 4^2\, 5\; 6\; 7$ besteht; zu dem andern Büschel gehört die aus C_2 und aus dem Kegelschnitte 1 2 3 4 7 bestehende Curve. Werden nun diese Curven einander entsprechend gesetzt, und lässt man dafür 10 weg, so erzeugen die Büschel eine C_9, welche aus 1 2 3 5 6 und der gesuchten C_7 besteht.

13. $\begin{cases} C_5 \ldots 1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8 \\ \Gamma_5 \ldots 1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 9\; 10 \end{cases}$ (linear).

Man verfährt wie in Nr. 9), indem man C_6 aus C_5 und 1 2, Γ_6 aus Γ_5 und 1 2 bestehen lässt; die noch fehlenden zwei Bestimmungspunkte sind auf 12 anzunehmen.

14. $C_{10} \ldots 1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^4\, 5^4\, 6^4\, 7\; 8\; 9\; 10\; 11$ (linear).

Man erzeugt C_{10} aus den beiden Curvenbüscheln V. Ordnung

$[1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7]\,(9\; 10\; 11\ldots) \barwedge [1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 8]\,(9\; 10\; 11\ldots)$.

15. $C_8 \ldots 1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^3\, 6^3\, 7\; 8\; 9\; 10$ (linear).

Bei den beiden Büscheln V. Ordnung [Nr. 14)] setzt man die Curven einander entsprechend, welche aus dem Kegelschnitte 2 3 4 5 6 und aus der

$C_3 \ldots 1^2\, 2\; 3\; 4\; 5\; 6\; 7$ bez. $\Gamma_3 \ldots 1^2\, 2\; 3\; 4\; 5\; 6\; 8$

bestehen, und lässt dafür 11 weg.

16. $C_{10} \ldots 1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^4\, 5^4\, 6^3\, 7^3\, 8\; 9\; 10$ (linear).

Man legt die beiden projectiven Büschel V. Ordnung zu Grunde

$[1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7]\,(8\; 9\; 10\ldots) \barwedge [1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6\; 7^2]\,(8\; 9\; 10\ldots)$.

$$17. \quad \begin{cases} C_6 \ldots 1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5\;6\;7\;8\;9\;10 \\ \Gamma_6 \ldots 1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5\;6\;7\;8\;11\;12 \end{cases} \quad \text{(linear)}.$$

Zwei Tangentenbüschel, welche in 1 und 2 an die erzeugenden Curvenbüschel IV. Ordnung construirt werden, bilden die beiden Curven auf zwei Kegelschnitte ab, welche 1 2 und das Bild von 8 gemein haben; der vierte Schnittpunkt ist das Bild des gesuchten Punktes.

$$18. \quad C_{12} \ldots 1^6\,2^6\,3^6\,4^4\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2\,9\;10\;11\;12\;13 \quad \text{(linear)}.$$

Die erzeugenden Curvenbüschel sind VI. Ordnung, nämlich

$$[1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5\;6\;7\;8\;9]\,(11\;12\;13\ldots) \barwedge [1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5\;6\;7\;8\;10]\,(11\;12\;13\ldots).$$

$$19. \quad C_8 \ldots 1^4\,2^4\,3^4\,4^3\,5\;6\;7\;8\;9\;10\;11\;12 \quad \text{(linear)}.$$

Man ordnet bei den projectiven Büscheln der vorigen Construction die beiden Curven VI. Ordnung einander zu, die in die

$$C_4 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4\;5\;6\;7\;8$$

und in die Kegelschnitte 1 2 3 4 9 bez. 1 2 3 4 10 zerfallen, und lässt dafür 13 weg.

Es ist klar, wie diese linearen Constructionen unbeschränkt fortgesetzt werden können, immer im Bereiche rationaler Curven; es würde nur erwünscht sein, im Allgemeinen angeben zu können, wie viele mehrfache Punkte dabei Verwendung finden können; insbesondere, ob es gelingt, solche Combinationen von rationalen Büscheln herzustellen, dass jede rationale Curve erzeugt wird, deren mehrfache Punkte unabhängig von einander angenommen werden können. —

Zunächst soll gezeigt werden, dass eine Reihe von bis hierher noch nicht aufgeführten linearen Constructionen mit Hilfe von quadratischen Strahl- und Curveninvolutionen erledigt werden kann.

$$20. \quad C_4 \ldots 1^3\,2\;3\;4\;5\;6\;7\;8\;9 \quad \text{(linear)}.$$

Man richtet eine quadratische Strahlinvolution 1^2 ein und ein dazu projectives Kegelschnittbüschel 1 2 3 4, so dass dieselben entsprechende Elemente durch 5 6 7 8 9 senden. Zu diesem Zwecke durchschneidet man 1 2 3 4 durch die Gerade 4 5; man erhält eine mit 1 2 3 4 projective Punktreihe $5\,6'\,7'\,8'\,9'$. Diesen Querschnitt nimmt man von einem Punkte A der 1 5 auf. Alsdann hat man in A ein zu 1^2 projectives Strahlbüschel, das zu 1^2 in reducirter Lage ist, da 1 5 sich selbst entspricht. Daher erzeugen 1^2 und A einen Kegelschnitt $\varkappa$; diesen kann man construiren, da man 5 Punkte desselben kennt, nämlich 1 und die Schnittpunkte von 1 (6 7 8 9) mit $A\,(6'\,7'\,8'\,9')$. Auf diesen Kegelschnitt $\varkappa$ sind die Punkte der C_4 abgebildet. Die Vervollständigung von 1^2 und A erfolgt linear, wenn man immer von einem Strahle von 1^2 ausgeht; man bestimmt zunächst dessen Schnittpunkt S mit $\varkappa$, hierauf den Durchschnitt Σ von AS und $\varkappa$, und erhält so das zu AS entsprechende Involutionspaar $1S$ und

1Σ. Hierauf bemerke man den Punkt S_0, in welchem 45 von AS getroffen wird. Die Punkte, in denen der Kegelschnitt $1\,2\,3\,4\,S_0$ von $1S$ und 1Σ getroffen wird, liegen auf der gesuchten Curve und sind in S und Σ abgebildet.

$$21.\quad \begin{cases} C_4 \ldots 1^3\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ \Gamma_4 \ldots 1^3\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,10\,11 \end{cases} \quad \text{(linear).}$$

Verfolgt man die vorige Construction soweit als möglich mit Hilfe der gemeinsamen Punkte, so sind von den Kegelschnitten $\varkappa$ und $\varkappa_1$, welche zur Construction von C_4 und Γ_4 dienen, drei gemeinsame Punkte bekannt, nämlich 1 und die Bilder von 6 und 7. Der vierte Schnittpunkt X von $\varkappa$ und $\varkappa_1$ bestimmt durch Vermittelung von A und 45 einen Kegelschnitt N des Büschels $1\,2\,3\,4$, sowie zwei betreffs C_4 und Γ_4 demselben entsprechende Strahlenpaare der beiden zu $1\,2\,3\,4$ projectiven Involutionen 1^2, und diese beiden Strahlenpaare haben einen gemeinsamen Strahl, nämlich $1X$. Der Schnitt von $1X$ mit N ist der gesuchte Punkt.

$$22.\quad C_8 \ldots 1^6\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8\,9\,10\,11\,12 \quad \text{(linear).}$$

Man benutzt die beiden projectiven Büschel IV. Ordnung

$$[1^3\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8]\,(10\,11\,12\ldots) \;\overline{\wedge}\; [1^3\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,9]\,(10\,11\,12\ldots).$$

$$23.\quad C_5 \ldots 1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9 \quad \text{(linear).}$$

Man bildet eine quadratische Kegelschnittinvolution $1\,2\,3\,4$ und ein dazu projectives Strahlbüschel 1, so dass die durch die fünf Pnnkte $5\,6\,7\,8\,9$ gehenden Elemente einander entsprechen, in bekannter Weise [vgl. Nr. 20)].

$$24.\quad \begin{cases} C_5 \ldots 1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9 \\ \Gamma_5 \ldots 1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,10\,11 \end{cases} \quad \text{(linear).}$$

Verfolgt man die vorige Construction soweit als möglich für beide Curven mit denselben gegebenen Punkten, so erhält man C_5 und Γ_5 auf Kegelschnitte abgebildet, welche 1 und die Bilder von 6 und 7 gemein haben; ihr vierter Schnittpunkt bestimmt den gesuchten.

$$25.\quad C_{10} \ldots 1^6\,2^4\,3^4\,4^4\,5^2\,6^2\,7^2\,8\,9\,10\,11\,12 \quad \text{(linear).}$$

Hierzu nimmt man die beiden projectiven Büschel V. Ordnung

$$[1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8]\,(10\,11\,12\ldots) \;\overline{\wedge}\; [1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,9]\,(10\,11\,12\ldots).$$

$$26.\quad C_5 \ldots 1^4\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11 \quad \text{(linear).}$$

So wie bei einigen der vorhergehenden Constructionen, hat man auch hier mehr als einen Weg zum Ziele. Man benutzt entweder eine Strahleninvolution 1^2 und ein Curvenbüschel III. Ordnung $1^2\,2\,3\,4\,5\,6$, so dass [Nr. 20)]

$$\{1^2\}\,(7\,8\,9\,10\,11\ldots) \;\overline{\wedge}\; [1^2\,2\,3\,4\,5\,6]\,(7\,8\,9\,10\,11\ldots),$$

wobei durch das Zeichen $\{\}$ die Involution angedeutet sein soll, oder man construirt ein Büschel IV. Ordnung und ein projectives Strahlbüschel

$$[1^3 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8]\ (9\ 10\ 11\ldots)\ \overline{\wedge}\ [1]\ (9\ 10\ 11\ldots),$$

wobei die Aufgabe, den fehlenden Schnittpunkt einer Curve IV. Ordnung mit einem durch den dreifachen Punkt 1^3 gehenden Strahle zu construiren, leicht gelöst werden kann.

$$27.\quad \begin{cases} C_5 \ldots 1^4 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11 \\ \Gamma_5 \ldots 1^4 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 12\ 13 \end{cases} \quad \text{(linear).}$$

Je nach der Construction, die man zur Erzeugung der beiden Curven zu Grunde gelegt denkt, ergiebt sich der fehlende Schnittpunkt nach der Methode Nr. 21) oder Nr. 4).

$$28.\quad C_{10} \ldots 1^8 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9^2\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14 \quad \text{(linear).}$$

Hierzu dienen die beiden projectiven Büschel V. Ordnung

$$[1^4 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10]\ (12\ 13\ 14\ldots)\ \overline{\wedge}\ [1^4 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 11]\ (12\ 13\ 14\ldots).$$

---

29. Die Curven III. Ordnung, welche 7 gemeinsame Punkte $1\ 2 \ldots 7$ haben, bilden ein Netz, das zu den Geraden einer Ebene in projective Beziehung gesetzt werden kann. Denn sind $u_1\, u_2\, u_3$ drei Curven des Netzes S, so ist in Bezug auf ein beliebig gewähltes Coordinatensystem in der Ebene Σ ein Punkt Π durch die Proportion eindeutig bestimmt

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = u_1 : u_2 : u_3.$$

Der Netzcurve

$$a_u \equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$$

entspricht die Gerade

$$a_\xi \equiv a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 = 0.$$

Dem Curvenbüschel

$$a_u - \lambda b_u = 0$$

entspricht das projective Strahlbüschel

$$a_\xi - \lambda b_\xi = 0.$$

Die Beziehung ΣS ist ein-zweideutig; denn dem Schnittpunkte Π der Geraden

$$a_\xi = 0, \quad b_\xi = 0$$

entspricht das Punktpaar PP', in welchem sich die Curven

$$a_u = 0, \quad b_u = 0$$

neben den 7 Netzgrundpunkten noch schneiden. In Rücksicht hierauf sollen die Punkte in S immer paarweise aufgefasst werden, so dass zu jedem P immer der andere P' des Paares mit hinzugedacht wird.

Die Beziehung ist eindeutig bestimmt, wenn die Curven $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ geometrisch gegeben sind, welche den Geraden $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ entsprechen, und wenn ausserdem ein Punktpaar $A_4 A'_4$ einem beliebigen Punkte A_4 in Σ entsprechend gesetzt wird, oder wenn, was auf dasselbe hinauskommt, vier Paare $A_1 A'_1$, $A_2 A'_2$, $A_3 A'_3$, $A_4 A'_4$ in S beliebig gewählten Punkten $\mathsf{A}_1\, \mathsf{A}_2\, \mathsf{A}_3\, \mathsf{A}_4$ in Σ entsprechen.

Zu jedem Punkte P (bez. Paare) in S kann der entsprechende Π in Σ linear construirt werden. Man construirt die Tangenten in A_1 an die Netz-

curven A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1P und in Σ das projective Strahlbüschel A_1 ($\mathsf{A}_2\mathsf{A}_3\mathsf{A}_4\mathsf{M}$); ferner in S die Tangenten in A_2 an die Netzcurven A_2A_1, A_2A_3, A_2A_4, A_2P und in Σ die projectiv entsprechenden Strahlen A_2 ($\mathsf{A}_1\mathsf{A}_3\mathsf{A}_4\mathsf{N}$). Der Schnitt von $\mathsf{A}_1\mathsf{M}$ und $\mathsf{A}_2\mathsf{N}$ ist Π. Die umgekehrte Construction ist quadratisch.

Dem Kegelschnitte (symbolisch geschrieben) $a_\xi^2 = 0$ entspricht die Curve VI. Ordnung $a_u^2 = 0$. Dieselbe hat die Doppelpunkte 1...7 und enthält noch 5 willkürliche Punktpaare in S, durch deren 5 entsprechende Punkte in Σ die a_ξ^2 bestimmt wird. Die a_u^2 wird quadratisch construirt, indem man zu jedem Punkte der a_ξ^2 das entsprechende Paar herstellt.

Daher folgt: 7 willkürliche Punkte 1...7 und 5 Punktpaare 88′, 99′, 1010′, 1111′, 1212′, derart, dass jedes dieser Paare mit 1...7 zusammen ein System von Schnittpunkten zweier Curven III. Ordnung bildet, sind auf einer Curve VI. Ordnung enthalten, welche die Punkte 1...7 zu Doppelpunkten hat. Ferner: Die Punkte 1...7 nebst 4 Paaren 88′, 99′, 1010′, 1111′ der angegebenen Art bilden ein vollständiges System von Schnittpunkten zweier Curven VI. Ordnung, welche 1...7 zu Doppelpunkten haben.

30. Diese Verwandtschaft ist von Herrn Rohn (Math. Ann., Bd. 24) behandelt und zu Constructionen verwerthet worden, unter denen die einer rationalen Curve V. Ordnung ($1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7\ 8$) bemerkenswerth einfach ist.

Einer Geraden in S, die 2 Grundpunkte enthält, entspricht eine Gerade in Σ. Denn sind $x_1x_2x_3$ und $y_1y_2y_3$ die Coordinaten zweier Punkte $Q\,R$, so hat irgend ein Punkt P von QR die Coordinaten $\lambda x_x + \mu y_x$. Setzt man dies für x_x in den symbolischen Cubus $u_x^3 \equiv (u'x_1 + u''x_2 + u'''x_3)^3$ ein, so erhält man

$$1)\qquad \lambda^3 u_x^3 + 3\lambda^2\mu\, u_x^2 u_y + 3\lambda\mu^2 u_x u_y^2 + \mu^3 u_y^3.$$

Sind nun P und Q Grundpunkte, so ist $u_x^3 = u_y^3 = 0$, und 1) vereinfacht sich zu

$$3\lambda\mu\,(\lambda u_x^2 u_y + \mu u_x u_y^2).$$

Der Punkt Π, der P entspricht, bestimmt sich daher aus

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = (\lambda u_{1x}^2 u_{1y} + \mu u_{1x} u_{1y}^2) : (\lambda u_{2x}^2 u_{2y} + \mu u_{2x} u_{2y}^2) \\ : (\lambda u_{3x}^2 u_{3y} + \mu u_{3x} u_{3y}^2).$$

Daher genügen die ξ der Gleichung

$$2)\qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ u_{1x}^2 u_{1y} & u_{2x}^2 u_{2y} & u_{3x}^2 u_{3y} \\ u_{1x}\ u_{1y}^2 & u_{2x}\ u_{2y}^2 & u_{3x}\ u_{3y}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Curve III. Ordnung, welche der Geraden 2) nach der allgemeinen Regel entspricht, zerfällt daher in diesem besondern Falle in die 2 Grundpunkte enthaltende Gerade PQ und in den durch die übrigen 5 Grund-

punkte bestimmten Kegelschnitt. Beschreibt daher ein Punkt in S die Gerade zweier Grundpunkte, so beschreibt der zugehörige Punkt den Kegelschnitt der 5 anderen Grundpunkte.

Wenn nur Q, nicht auch R, Grundpunkt ist, so vereinfacht sich 1) zu

$$3\lambda^2\mu u_x^2 u_y + 3\lambda\mu^2 u_x u_y^2 + \mu^3 u_y^3;$$

für den P entsprechenden Punkt Π hat man daher

$$\begin{aligned}\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = & (3\lambda^2 u_{1x}^2 u_{1y} + 3\lambda\mu u_{1x} u_{1y}^2 + \mu^2 u_{1y}^3)\\ & : (3\lambda^2 u_{2x}^2 u_{2y} + 3\lambda\mu u_{2x} u_{2y}^2 + \mu^2 u_{2y}^3)\\ & : (3\lambda^2 u_{3x}^2 u_{3y} + 3\lambda\mu u_{3x} u_{3y}^2 + \mu^2 u_{3y}^3).\end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$3\lambda^2 u_{ix}^2 u_{iy} + 3\lambda\mu u_{ix} u_{iy}^2 + \mu^2 u_{iy}^3 = \lambda^2 a_i + \lambda\mu b_i + \mu^2 c_i,$$

so hat man, wenn ϱ einen gewissen, von ι und $\varkappa$ nicht abhängigen Proportionalitätsfactor bezeichnet,

$$\begin{aligned}\varrho\cdot\xi_\iota\xi_\varkappa = & \lambda^4 a_\iota a_\varkappa + \lambda^3\mu\,(a_\iota b_\varkappa + a_\varkappa b_\iota) + \lambda^2\mu^2\,(a_\iota c_\varkappa + b_\iota b_\varkappa + a_\varkappa c_\iota)\\ & + \lambda\mu^3\,(b_\iota c_\varkappa + b_\varkappa c_\iota) + \mu^4 c_\iota c_\varkappa.\end{aligned}$$

Die Coordinaten ξ erfüllen daher die Gleichung

$$3)\qquad \begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 & \xi_2^2 & \xi_2\xi_3 & \xi_3^2 \\ a_1^2 & a_1 a_2 & . & . & . & . \\ 2a_1 b_1 & a_1 b_2 + a_2 b_1 & . & . & . & . \\ 2a_1 c_1 + b_1^2 & a_1 c_2 + b_1 b_2 + a_2 c_1 & . & . & . & . \\ 2b_1 c_1 & b_1 c_2 + b_2 c_1 & . & . & . & . \\ c_1^2 & c_1 c_2 & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0.$$

Einer Geraden eines Grundpunktes Q entspricht somit ein Kegelschnitt in Σ. Da nun aber einem Kegelschnitte in Σ im Allgemeinen eine specielle Curve VI. Ordnung in S entspricht, so folgt, dass die dem besonderen Kegelschnitte 3) entsprechende Curve VI. Ordnung in die Gerade des Grundpunktes Q und eine C_5 zerfällt, welche die anderen 6 Grundpunkte zu Doppelpunkten, Q zum einfachen Punkte hat.

Beschreibt daher ein Punkt in S einen Strahl, der 7 mit dem zu irgend einem Punkte 8 gehörigen 8' verbindet, so beschreibt der zugehörige die rationale $C_5\,(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8)$.

31. Einer beliebigen Geraden in S entspricht in Σ eine Curve, deren Gleichung aus Nr. 30, 1) durch Elimination von λ und μ gewonnen wird. Ersetzt man die erwähnte Gleichung durch

$$a_i\lambda^3 + b_i\lambda^2\mu + c_i\lambda\mu^2 + d_i\mu^3,$$

so erhält man zunächst

$$\xi_1 = \frac{a_1\lambda^3 + \cdots}{a\lambda^3 + \cdots},\quad \xi_2 = \frac{a_2\lambda^3 + \cdots}{a\lambda^3 + \cdots},$$

wobei sich $a\,b\,c\,d$ aus $a_i\,b_i\,c_i\,d_i$ und den Constanten des Coordinatensystems zusammensetzen.

Aus 1) folgt weiter

$$(a\xi_1 - a_1)\lambda^3 + (b\xi_1 - b_1)\lambda^2\mu + \cdots = 0,$$
$$(a\xi_2 - a_2)\lambda^3 + (b\xi_2 - b_2)\lambda^2\mu + \cdots = 0.$$

Die Elimination von λ und μ führt zu

$$\begin{vmatrix} a\xi_1 - a_1 & b\xi_1 - b_1 & c\xi_1 - c_1 & d\xi_1 - d_1 & . & . \\ . & a\xi_1 - a_1 & b\xi_1 - b_1 & c\xi_1 - c_1 & d\xi_1 - d_1 & . \\ . & . & a\xi_1 - a_1 & b\xi_1 - b_1 & c\xi_1 - c_1 & d\xi_1 - d_1 \\ a\xi_2 - a_2 & b\xi_2 - b_2 & c\xi_2 - c_2 & d\xi_2 - d_2 & . & . \\ . & a\xi_2 - a_2 & b\xi_2 - b_2 & c\xi_2 - c_2 & d\xi_2 - d_2 & . \\ . & . & a\xi_2 - a_2 & b\xi_2 - b_2 & c\xi_2 - c_2 & d\xi_2 - d_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man diese Determinante mit leicht verständlicher Symbolik mit

14, 25, 36, 17, 28, 39

bezeichnet, so erkennt man, dass sie in 32 Determinanten zerfällt, die man mit

(a, b, c, d, e)

bezeichnen kann, wenn a, b, c, d, e Zahlen sind, deren jede der Reihe nach aus den 6 Paaren 14, 25, ... genommen ist. Von diesen 32 verschwinden alle Determinanten, in deren Symbol zwei gleiche Zahlen vorkommen. Hieraus folgt, dass die obige Gleichung vom III. Grade in $\xi_1\,\xi_2$ ist. Einer beliebigen Geraden in S entspricht daher eine Curve III. Ordnung in Σ.

Dieser Curve entspricht in S eine Curve IX. Ordnung, die in eine Gerade und eine Curve VIII. Ordnung zerfällt. Letztere hat die Grundpunkte zu dreifachen Punkten und enthält noch ausserdem zwei beliebige Punkte, nämlich die zugehörigen zu zwei Punkten der zugehörigen Geraden.

Hierdurch sind folgende lineare Constructionen erledigt:

$C_8 \ldots 1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,7^3\,8\,9;$

$\begin{cases} C_8 \ldots 1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,7^3\,8\,9, \\ \Gamma_8 \ldots 1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,7^3\,10\,11. \end{cases}$

32. $C_6 \ldots 1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15.$

Man richtet zwischen der Ebene S, welche die Curve enthalten soll, und einer anderen Ebene Σ zwei Verwandtschaften nach Nr. 29) ein; in der einen sind 1 2 3 4 5 6 7 die Grundpunkte, in der andern 1 2 3 4 5 6 8. Ferner construirt man die zu 9 10 11 12 13 14 15 gemäss beider Verwandtschaften entsprechenden Punkte

$9_1\,10_1\,11_1\,12_1\,13_1\,14_1\,15_1$ bez. $9_2\,10_2\,11_2\,13_2\,14_2\,15_2$.

Durch eine bekannte Construction kann man in Σ drei Punktpaare $X_1\,\xi_2$, $Y_1\,\eta_2$, $Z_1\,\zeta_2$ erhalten, so dass

$$\mathsf{X}_1\,(9_1\,10_1\ldots 15_1)\;\overline{\wedge}\;\xi_2\,(9_2\,10_2\ldots 15_2),$$
$$\mathsf{Y}_1\,(9_1\,10_1\ldots 15_1)\;\overline{\wedge}\;\eta_2\,(9_2\,10_2\ldots 15_2),$$
$$\mathsf{Z}_1\,(9_1\,10_1\ldots 15_1)\;\overline{\wedge}\;\zeta_2\,(9_2\,10_2\ldots 15_2).$$

Construirt man nun zu $\mathsf{X}_1\,\mathsf{Y}_1\,\mathsf{Z}_1$, sowie zu $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$ die entsprechenden Punktpaare in S gemäss der ersten und zweiten Verwandtschaft, so erhält man 3 Paare von Punktpaaren:

1\. Paar . . . . . XX' und xx',
2\. " . . . . . . YY' " yy',
3\. " . . . . . . ZZ' " zz'.

Alsdann ist

$$[1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,XX']\,(9\ldots 15)\;\overline{\wedge}\;[1\,2\,3\,4\,5\,6\,8\,xx']\,(9\ldots 15),$$
$$[1\,.\,.\,.\,.\,.\,7\,YY']\,(9\ldots 15)\;\overline{\wedge}\;[1\,.\,.\,.\,.\,6\,8\,yy']\,(9\ldots 15),$$
$$[1\,.\,.\,.\,.\,.\,7\,ZZ']\,(9\ldots 15)\;\overline{\wedge}\;[1\,.\,.\,.\,.\,6\,8\,zz']\,(9\ldots 15).$$

Da nun aber, wenn $1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,a$ ein System von Schnittpunkten zweier Curven III. Ordnung bilden, identisch

$$[1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,a]\,(9\ldots 15)\;\overline{\wedge}\;[1\,2\,3\,4\,5\,6\,8\,7\,a]\,(9\ldots 15),$$

so folgt, dass eines der 3 Doppelpaare, sagen wir das letzte, mit $8a$ und $7a$ identisch ist, dass daher Z_1 mit 8_1 und ζ_2 mit 7_2 zusammenfallen. Die beiden Punkte $\mathsf{X}_1\,\mathsf{Y}_1$ werden daher quadratisch gefunden, nämlich durch 2 cubische Curven, die 7 bekannte Schnittpunkte haben, und dasselbe gilt von $\xi_2\,\eta_2$.

Diese ganze Construction der C_6 ist, wie man sieht, quadratisch.

33\. Construction der Jacobi'schen Curve eines Curvennetzes III. Ordnung mit 7 Grundpunkten 1 2 . . . 7.

Zu dem Netze gehören die 21 zerfallenden Curven, welche aus dem Kegelschnitte von 5 der gegebenen Punkte und der Geraden der beiden übrigen bestehen. Die Doppelpunkte dieser 21 besonderen Netzcurven sind auf der gesuchten Jacobi'schen Curve enthalten. Man hat durch diese 42 Punkte zusammen mit den gegebenen Doppelpunkten $1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2$ überreichliches Material, um die gesuchte Curve als Curve VI. Ordnung mit 6 Doppelpunkten (z. B. $1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2$) und einer genügenden Anzahl einfacher Punkte (7 und dazu acht von den Doppelpunkten der zerfallenden Netzcurven) zu construiren.

34\. Eine Kegelschnittinvolution und ein dazu projectives Strahlbüschel erzeugen im Allgemeinen eine Curve V. Ordnung, welche die Träger der Involution zu Doppelpunkten hat.

Umgekehrt: Hat eine Curve V. Ordnung 4 Doppelpunkte und lassen sich durch dieselben 2 Kegelschnitte legen, deren weitere Schnittpunkte mit der Curve auf einer Geraden liegen, so kann die Curve durch eine Kegelschnittinvolution

und ein projectives Strahlbüschel erzeugt werden. Sind nämlich 1 2 3 4 die Doppelpunkte und K_0 und K'_0 2 Kegelschnitte des Büschels 1 2 3 4, deren weitere Schnitte $A_0 B_0$ und $A'_0 B'_0$ mit der C_5 auf der Geraden T_0 liegen, so construire man durch den fünften Schnittpunkt M von T_0 und C_5 einen Strahl T_1 und durch zwei $A_1 A'_1$ von den übrigen Schnittpunkten von T_1 und C_5, die mit 1 2 3 4 nicht auf demselben Kegelschnitte liegen, zwei Kegelschnitte

$$K_1 \equiv 1234 A_1, \quad K'_1 \equiv 1234 A'_1.$$

Die drei Curven V. Ordnung

$$C_5, \quad K_0 K'_0 T_1, \quad K_1 K'_1 T_0$$

haben gemeinsam $M\, 1^2 2^2 3^2 4^2 A_0 B_0 A'_0 B'_0 A_1 A'_1$, d. i. 23 Schnittpunkte, folglich bilden sie ein Büschel; auf T_1 liegen daher auch die Punkte $B_1 B'_1$, in denen K_1 und K'_1 die C_5 noch treffen. Eine Curve Γ_5, welche durch die Involution $K_0 K'_0$, $K_1 K'_1$ und ein projectives Büschel $T_0 T_1$ erzeugt wird, gehört diesem Büschel an und ist durch einen weiteren Punkt bestimmt, durch den die projective Beziehung festgelegt wird. Nimmt man diesen Punkt auf C_5 an, so fallen Γ_5 und C_5 zusammen.

35. Eine C_5, welche durch eine Kegelschnittinvolution und ein dazu projectives Strahlbüschel erzeugt werden kann, ist durch die 4 Doppelpunkte und 7 weitere Punkte dreideutig bestimmt.

Man construirt die Kegelschnitte

$$(1234)\,(5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11),$$

an dieselben in 1 die Tangenten $T_5 \ldots T_{11}$. Ein beliebiger durch 1 gehender Kegelschnitt treffe dieselben in $5'6' \ldots 11'$. Alsdann kann man zu $5'6' \ldots 11'$ und $56 \ldots 11$ immer 3 Punktpaare $M'_1 M_1$, $M'_2 M_2$, $M'_3 M_3$ finden, so dass

$$M_i\,(567 \ldots 11) \barwedge M'_i\,(5'6'7' \ldots 11').*$$

Jeder Punkt M_i ist Träger eines Strahlbüschels $M_i\,(56 \ldots 11)$, welches mit einer projectiven Kegelschnittinvolution eine Curve bestimmt, die den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dabei wird von M_i aus mittels des Hilfskegelschnittes die zur Kegelschnittinvolution gehörige Involution der Tangenten in 1 hergestellt, und durch diese die Kegelschnittinvolution.

36. Zwei projective Strahlinvolutionen erzeugen eine Curve IV. Ordnung mit 2 Doppelpunkten, mit einer Besonderheit, die durch eine cubische Gleichung zwischen den Coefficienten ausgedrückt wird.** Die Curve ist daher durch die Doppelpunkte und 7 einfache Punkte dreideutig bestimmt. Von 2 gegebenen Trägern aus lassen sich folglich 3 Paare pro-

---

* Sturm, Das Problem der Projectivität, Math. Ann. S. 533, 1869. Heger, Die Construction der Fläche II. Ordnung aus 9 gegebenen Punkten, Leipzig 1881, S. XI.

** Diese Zeitschrift, Bd. 19, S. 170, 1874.

jectiver Strahlinvolutionen construiren, bei welchen entsprechende Strahlen durch 7 gegebene Punkte gehen.

Die Construction kann in folgender Weise geschehen: Von den Doppelpunkten A und B aus ziehe man Strahlen nach den 7 Punkten 1, 2 ... 7 und schneide dieselben durch einen A und B enthaltenden Kegelschnitt K in $1'2'\dots 7'$ und $1''2''\dots 7''$. Die Strahlinvolutionen erzeugen auf K zwei Punktinvolutionen, deren Paare auf Strahlbüscheln liegen, die mit den Involutionen, also auch untereinander, projectiv sind. Die Träger M, N der beiden Büschel sind daher 2 Punkte, von denen aus man die beiden Gruppen $1'2'\dots 7'$ und $1''2''\dots 7''$ durch 2 projective Büschel projiciren kann.

Hierdurch sind folgende Aufgaben erledigt:

Eine C_4 zu construiren, die durch 2 projective Strahlinvolutionen erzeugt werden kann, aus $1^2 2^2 3\,4\,5\,6\,7\,8\,9$.

Eine C_3 zu construiren aus 2 correspondirenden und 6 weiteren Punkten.

37. Construction einer C_8 aus

$$1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^2\, 5^2\, 6\; 7\; 8\; 9\; 10\; 11\; 12$$

— 43 Bedingungen —

zu construiren, welche (44. Bedingung) durch 2 projective Kegelschnittinvolutionen mit den Trägern 1234 und 1235 erzeugt werden kann.

Man construire die Kegelschnitte

$$(1\,2\,3\,4)\,(6\,7\,8\,9\,10\,11\,12)$$

und

$$(1\,2\,3\,5)\,(6\,7\,8\,9\,10\,11\,12),$$

sowie die Tangenten dazu, z. B. in 4 und 5. Diese ergeben 7 Schnittpunkte.

Die C_4, welche durch diese Schnittpunkte, sowie durch 4 und 5 als Träger zweier projectiven Involutionen bestimmt ist, wird auf C_8 eindeutig abgebildet.

Wenn in den Kegelschnittinvolutionen der Kegelschnitt 12345 sich selbst entspricht, so entsteht eine C_6 aus den einfachen Punkten 67...12 und 3 dreifachen Punkten $1^3\, 2^3\, 3^3$, die einer besonderen Bedingung unterworfen sind.

Die Bedingung für die C_8 ist, dass die beiden Kegelschnitte, die 1234 enthalten und mit C_8 in 4 drei zusammenfallende Punkte mit C_8 gemein haben, die C_8 noch ausserdem in 2 Punkten schneiden, die mit 1235 auf einem Kegelschnitte enthalten sind; woraus dann noch folgt, dass diese Eigenschaft bestehen bleibt, wenn man 4 mit 5 vertauscht.

Die Bedingung für die C_6 ist, dass die beiden Kegelschnitte 1234 bez. 1235, die in 4 bez. 5 die Curve berühren und damit bereits elf gegebene Punkte mit der Curve gemein haben, noch einen gemeinsamen Punkt auf der Curve besitzen.

VII.

Ueber die Auflösung gewisser algebraischer Gleichungen mittelst Integration von Differentialgleichungen.*

Von

WOLDEMAR HEYMANN

in Dresden.

Es ist ein interessanter Umstand, dass sich Differentialgleichungen, von welchen ein Integral in der Form

$$x = \varphi(y)$$

bekannt ist, bisweilen so integriren lassen, dass ihr allgemeines Integral in der geschlossenen Form

$$y = \psi(x)$$

auftritt, und zwar auch dann noch, wenn eine Auflösung der Gleichung $\varphi(y) = x$ in geschlossener Form auf anderem Wege ganz unmöglich zu sein scheint. — Durch geeignete Wahl der willkürlichen Constanten der Function ψ wird man es dann erreichen können, dass $y = \psi(x)$ die Auflösung der Gleichung $\varphi(y) = x$ darstellt.

In der vorliegenden Arbeit soll unter diesem Gesichtspunkte die algebraische Gleichung

$$y^n - ny - (n-1)x = 0$$

aufgelöst werden

---

§ 1.

Lineare Differentialgleichungen, welche befriedigt werden durch die Wurzeln der algebraischen Gleichungen

$$1)\quad y^n - ny - (n-1)x = 0; \qquad 2)\quad \eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0.$$

a) Alle Wurzeln der Gleichung 1) genügen der Differentialgleichung

$$3)\qquad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \alpha^{n-1}x^{2-n}\frac{d^{n-1}(x^{\alpha-1}y)}{d(x^{-\alpha})^{n-1}},$$

wenn $\alpha = \dfrac{n-1}{n}$ und $n > 2$.

---

*) Vergl. eine Arbeit des Verfassers, welche unter gleichem Titel in der Zeitschrift f. Mathematik u. Physik erschienen ist. XXIX. Jahrg. 5. Heft.

Um den Beweis dieser Behauptung zu vereinfachen, sei zunächst darauf hingewiesen, dass die Differentialgleichung 1) durch die Substitutionen

$$4)\qquad x = \xi^{-\frac{n}{n-1}},\quad y = \eta\,\xi^{-\frac{1}{n-1}},\quad \text{d. h. } x^{-\alpha} = \xi,\quad x^{\alpha-1}y = \eta$$

übergeht in die Gleichung

$$2)\qquad \eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0,$$

und dass daher der Differentialquotient

$\dfrac{d^{n-1}(x^{\alpha-1}y)}{d(x^{-\alpha})^{n-1}}$, gebildet für die Wurzeln der Gleichung 1),

auch so ermittelt werden kann, dass man den Quotienten

$\dfrac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}}$, gebildet für die Wurzeln der Gleichung 2),

aufstellt und schliesslich die ursprünglichen Variabelen restituirt. — Nun ist bekanntlich, wenn

$$\xi = \Phi(\eta) = \frac{\eta^n - (n-1)}{n\eta},$$

$$5)\qquad \frac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}} = D_\varrho^{\,n-2}\left\{\left(\frac{\varrho}{\Phi(\eta+\varrho)-\Phi(\eta)}\right)^{n-1}\right\}_{\varrho=0}$$

$$= D_\varrho^{\,n-2}\left\{\left(\frac{n\eta\varrho(\eta+\varrho)}{\eta(\eta+\varrho)^n - \eta^n(\eta+\varrho) + (n-1)\varrho}\right)^{n-1}\right\}_{\varrho=0},$$

oder, wenn rückwärts $\eta = x^{-\frac{1}{n}}y$ gesetzt und für ϱ eine neue Variabele σ mittelst

$$\varrho = x^{-\frac{1}{n}}\sigma$$

eingeführt wird,

$$\frac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}} = n^{n-1}x^{n-2}D_\sigma^{\,n-2}\left\{\left(\frac{y\sigma(y+\sigma)}{y\; y+\sigma)^n - y^n(y+\sigma) + (n-1)x\sigma}\right)^{n-1}\right\}_{\sigma=0}.$$

Weil zufolge der Gleichung 1)

$$(n-1)x = y^n - ny,$$

so erhält man

$$6)\qquad \frac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}} = \frac{d^{n-1}(x^{\alpha-1}y)}{d(x^{-\alpha})^{n-1}}$$

$$= n^{n-1}x^{n-2}D_\sigma^{\,n-2}\left\{\left(\frac{\sigma(y+\sigma)}{(y+\sigma)^n - y^n - n\sigma}\right)^{n-1}\right\}_{\sigma=0}.$$

Es ist nun weiter der Differentialquotient

$\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, gebildet für die Wurzeln der Gleichung 1),

aufzustellen. Benutzt man wieder die allgemeine Formel 5), so gelangt man zu einem Ausdruck, der mit 6) wohl die grösste Aehnlichkeit hat, aber doch nicht so gebaut ist, dass die Differentialgleichung 3) identisch

befriedigt würde. Man kommt indessen zum Ziele, wenn man beachtet, dass durch Differentiation der Gleichung 1) die Beziehung

$$7)\qquad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1}\left(\frac{y^n}{n}\right)}{dx^{n-1}}$$

abgeleitet werden kann, vorausgesetzt, dass $n > 2$.

Nun ist allgemein*, wenn $x = \varphi(y)$,

$$8)\qquad \frac{d^{n-1}f(y)}{dx^{n-1}} = D_\sigma^{\,n-2}\left\{\left(\frac{\sigma}{\varphi(y+\sigma)-\varphi(y)}\right)^{n-1} f'(y+\sigma)\right\}_{\sigma=0},$$

folglich hat man für

$$f = \frac{y^n}{n} \quad \text{und} \quad x = \varphi(y) = \frac{y^n - ny}{n-1}:$$

$$\frac{d^{n-1}\left(\frac{y^n}{n}\right)}{dx^{n-1}} = D_\sigma^{\,n-2}\left\{\left(\frac{(n-1)\sigma}{(y+\sigma)^n - n(y+\sigma) - y^n + ny}\right)^{n-1}(y+\sigma)^{n-1}\right\}_{\sigma=0},$$

also, mit Rücksicht auf 7),

$$9)\qquad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = (n-1)^{n-1} D_\sigma^{\,n-2}\left\{\left(\frac{\sigma(y+\sigma)}{(y+\sigma)^n - y^n - n\sigma}\right)^{n-1}\right\}_{\sigma=0}.$$

Die Ausdrücke 6) und 9) befriedigen in der That die Differentialgleichung 3), denn man erhält nach Einsetzen derselben

$$(n-1)^{n-1} = \alpha^{n-1} n^{n-1}, \quad \text{d. h.} \quad \alpha = \frac{n-1}{n},$$

wie von vornherein angegeben worden ist.

Der Fall $n = 2$ bildet eine leicht zu erledigende Ausnahme; die Differentialgleichung 1) ist in diesem Falle nicht homogen, sie lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{d(x^{-\frac{1}{2}}y)}{d(x^{-\frac{1}{2}})} - \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad (1+x)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}.$$

Dem Integral der reducirten Gleichung ist hier noch additiv die Zahl 1 beizugeben; es lautet:

$$y = c\sqrt{1+x} + 1, \quad c = const. = \pm 1,$$

wie auch aus

$$y^2 - 2y - x = 0$$

unmittelbar erkannt wird.

b) Substituirt man in die Differentialgleichung 3)

$$4)\qquad x = \xi^{-\frac{n}{n-1}}, \quad y = \eta\,\xi^{-\frac{1}{n-1}},$$

so entsteht

$$10)\qquad \frac{d^{n-1}\left(\xi^{-\frac{1}{n-1}}\eta\right)}{d\left(\xi^{-\frac{n}{n-1}}\right)^{n-1}} = \alpha^{n-1}\,\xi^{\frac{(n-2)n}{n-1}}\,\frac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}},$$

und dieser müssen offenbar sämmtliche Wurzeln der Gleichung

---

* Bezüglich der Formeln 5) und 8) vergl. O. Schlömilch, Vorlesungen über höhere Analysis. Die höheren Differentialquotienten.

2) $$\eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0$$

genügen, weil Gleichung 2) aus 1) vermöge der Substitution 4) hervorgeht. — Im Falle $n = 2$ muss der rechten Seite der Gleichung 10) noch die Zahl $-\frac{1}{2}$ additiv beigegeben werden; sie lautet alsdann:

$$\frac{d(\xi^{-1}\eta)}{d(\xi^{-2})} = \frac{1}{2}\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad (1+\xi^2)\frac{d\eta}{d\xi} - \xi\eta = 1.$$

Dem Integral der reducirten Gleichung ist, wie leicht zu sehen, die Grösse ξ als Supplementintegral hinzuzufügen; man hat daher

$$\eta = c\sqrt{\xi^2+1} + \xi, \quad c = const. = \pm 1,$$

wie auch aus

$$\eta^2 - 2\xi\eta - 1 = 0$$

unmittelbar folgt.

Bisher sind die Differentialgleichungen 3) und 10) in einer eigenthümlichen concisen Form in Betracht gezogen worden, weil die Beweisführung, dass diese Gleichungen algebraische Integrale besitzen, ausserordentlich umständlich wird, sobald man die Differentialgleichungen umgestaltet. Für die allgemeine Integration ist es aber zweckmässig, wenn man diesen Gleichungen eine andere Gestalt verleiht. Hierzu dient folgende Formel: Es ist für beliebige p und q

11) $$\frac{d^m(x^p y)}{d(x^q)^m} = \frac{x^{\lambda_{m+1}}}{q^m}\left\{\frac{d^m y}{d(lx)^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{d(lx)^{m-1}} + \dots + a_1\frac{dy}{d(lx)} + a_0 y\right\},$$

wenn die a die Coefficienten einer Gleichung m^{ten} Grades

12) $$\lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} + a_{m-2}\lambda^{m-2} - \dots \pm a_1\lambda \mp a_0 = 0$$

bedeuten, deren Wurzeln folgendermassen lauten:

$$\lambda_k = p - (k-1)q, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

λ_{m+1}, welches mit der Gleichung 12) zunächst nichts zu thun hat, besitzt den Werth

$$\lambda_{m+1} = p - mq.$$

Um von dem eigentlichen Gegenstande der vorliegenden Untersuchung nicht abschweifen zu müssen, mögen Entwickelungen und Beweise, die sich beiläufig — an dieser und anderen Stellen — aufdrängen, in spätere Paragraphen verwiesen werden. Ueber die letzte Formel findet man Näheres in § 6.

c) Behufs Umgestaltung der Differentialgleichung

3) $$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \alpha^{n-1}x^{2-n}\frac{d^{n-1}(x^{\alpha-1}y)}{d(x^{-\alpha})^{n-1}}$$

entwickle man den Differentialquotienten der rechten Seite nach Formel 11). Hier ist

$$m = n-1, \quad p = \alpha - 1, \quad q = -\alpha; \quad \alpha = \frac{n-1}{n},$$

folglich

$$\lambda_k = k\frac{n-1}{n} - 1, \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1),$$

und also

$$\frac{d^{n-1}(x^{\alpha-1}y)}{d(x^{-\alpha})^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{\alpha^{n-1}}\sum_{i=n-1}^{i=0} a_i \frac{d^i y}{d(lx)^i} \quad (a_{n-1} = 1).$$

Die Wurzeln der Gleichung

1) $$y^n - ny - (n-1)x = 0$$

genügen sonach der Differentialgleichung

13) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\sum_{n-1}^{0}\alpha_i \frac{d^i y}{d(lx)^i}, \\ &\text{wobei} \\ &\sum_{n-1}^{0}(-1)^i a_i \lambda^i = 0, \quad \lambda_k = k\frac{n-1}{n} - 1, \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1). \end{aligned}\right.$$

d) Für die Differentialgleichung 10) ist

$$m = n-1, \quad p = -\frac{1}{n-1}, \quad q = -\frac{n}{n-1},$$

folglich

$$\lambda_k = \frac{(k-1)n-1}{n-1} = (k-2)\frac{n}{n-1} + 1, \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1),$$

und also

$$\frac{d^{n-1}\left(\xi^{-\frac{1}{n-1}}\eta\right)}{d\left(\xi^{-\frac{n}{n-1}}\right)^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{\xi^{\frac{(n-2)n}{n-1}+1}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}}\sum_{i=n-1}^{i=0} a_i \frac{d^i y}{d(lx)^i} \quad (a_{n-1} = 1).$$

Die Wurzeln der Gleichung

2) $$\eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0$$

genügen sonach der Differentialgleichung

14) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}} = (-1)^{n-1}\xi\sum_{n-1}^{0} a_i \frac{d^i \eta}{d(l\xi)^i}, \\ &\text{wobei} \\ &\sum_{n-1}^{0}(-1)^i a_i \lambda^i = 0, \quad \lambda_k = (k-2)\frac{n}{n-1} + 1, \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1). \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung 13) wesentlich dadurch, dass vor dem Summenzeichen die Variabele ξ vorkommt. Man kann aber diesen Unterschied beseitigen und auf diese Weise die weiteren Betrachtungen unter einen Gesichtspunkt bringen.

e) Differenzirt man die letzte Differentialgleichung einmal nach ξ, so entsteht

$$\frac{d^n \eta}{d\xi^n} = (-1)^{n-1}\left\{\frac{d^n \eta}{d(l\xi)^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}\eta}{d(l\xi)^{n-1}} + \ldots + b_1\frac{d\eta}{d(l\xi)} + b_0\eta\right\}.$$

Da hierbei von der Formel

$$\frac{d}{d\xi}\left\{\xi\frac{d^i\eta}{d(l\xi)^i}\right\}=\frac{d^{i+1}\eta}{d(l\xi)^{i+1}}+\frac{d^i\eta}{d(l\xi)^i}$$

Gebrauch gemacht worden ist, so hängen die Coefficienten der Gleichungen in der Weise zusammen, dass

$$b_{i+1}=a_{i+1}+a_i.$$

Ebenderselbe Coefficientenzusammenhang besteht bekanntlich für zwei algebraische Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r}\lambda^{n-1}-a_{n-2}\lambda^{n-2}+\ldots\pm a_1\lambda\mp a_0=0\\ \lambda^n-b_{n-1}\lambda^{n-1}+b_{n-2}\lambda^{n-2}-\ldots\mp b_1\lambda\pm b_0=0\end{array}\right\},$$

falls die letzte sämmtliche Wurzeln der ersten und ausserdem die Wurzel $+1$ besitzt.

Man gelangt daher zu folgendem Resultat:

Die Wurzeln der Gleichung

2) $$\eta^n-n\xi\eta-(n-1)=0$$

genügen der Differentialgleichung

15) $$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^ny}{d\xi^n}=(-1)^{n-1}\sum\limits_{i=n}^{i=0}b_i\dfrac{d^i\eta}{d(l\xi)^i},\\ \text{wobei}\\ \sum\limits_n^0(-1)^ib_i\lambda^i=0,\quad \lambda_k=(k-2)\dfrac{n}{n-1}+1,\quad k=1,2,\ldots,(n-1);\\ \lambda_n=+1.\end{array}\right.$$

Verlangt man, dass das allgemeine Integral der Gleichung 15) vollständig coincidire mit demjenigen der Gleichung 14), so hat man zwischen den n willkürlichen Constanten des erstgenannten Integrals eine Bedingung festzusetzen, welche sich dadurch ergiebt, dass $\eta^{(n-1)}$ mit ξ gleichzeitig verschwinden muss.

Anmerkung. Auf die Gleichung 1) kann leicht die allgemeinere Gleichung

$$\eta^n-a\xi^p\eta-b\xi^q=0$$

zurückgeführt werden; doch ist dies für algebraische Fragen unwesentlich. Unerlässlich ist es jedoch, dass man neben Gleichung 1) auch die Gleichung 2) in Betracht zieht, wie die Beweisführung unter a) im letzten Paragraphen zeigt und wie dies auch später bei dem Integrationsproblem deutlich hervortreten wird.

§ 2.

Auflösung der Gleichung

1) $$y^n-ny-(n-1)x=0.$$

Die linearen Differentialgleichungen 13) und 15), denen die Wurzeln der Gleichungen 1) resp. 2) genügten, stehen beide unter der Form

16) $$\frac{d^my}{dx^m}+\sum_{i=m}^{i=0}A_i\frac{d^iy}{d(lx)^i}=0,$$

und dieser letzten Differentialgleichung genügt, wie später in § 5 gezeigt wird, folgendes m-fache Integral:

$$17)\quad y = {}_m\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^m + u_2^m + \dots + u_m^m}{m}} u_1^{\lambda_1 - 1} u_2^{\lambda_2 - 1} \dots u_m^{\lambda_m - 1} S\, du_1\, du_2 \dots du_m .$$

Hier bedeutet

$$S = \sum_{k=1}^{k=m} C_k\, e^{\varepsilon_k u_1 u_2 \dots u_m x}, \quad C_k = const.;$$

λ_1 bis λ_m sind die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_{i=m}^{i=0} (-1)^i A_i \lambda^i = 0$$

und ε_1 bis ε_m diejenigen der Gleichung

$$\varepsilon^m + A_m = 0.$$

Die Zahlen λ_1 bis λ_m, wie sie im Speciellen bei der vorliegenden Untersuchung (vergl. § 1) in Betracht kommen, sind reelle Zahlen und **positiv**, ausgenommen λ_1, welches offenbar für ganze positive n immer ein negativer echter Bruch wird.* Da nun die Integralform 17) durchaus positive λ erfordert, so wird eine Umgestaltung derselben nothwendig.

Man überzeugt sich leicht, dass die Differentialgleichung 16) bei einmaliger Differentiation nach x und für $\frac{dy}{dx} = z$ ihre Grundform nicht ändert, dass aber sämmtliche Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$\sum_{i=m}^{i=0} (-1)^i A_i \lambda^i = 0$$

um die positive Einheit wachsen. Diese Eigenschaft der Differentialgleichung präsentirt sich an der Integralform 17) in folgender Weise. Es ist

$$18)\quad y = \int z\, dx = \int dx \cdot \left\{ {}_m\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^m + \dots + u_m^m}{m}} u_1^{\lambda_1} \dots u_m^{\lambda_m} S\, du_1 \dots du_m \right\}$$

und hier haben alle Grössen, wenn man sich ε_k in das willkürliche C_k eingehend denkt, genau die vorige Bedeutung; für die λ sind aber jetzt auch **negative echte Brüche** zulässig.

a) Es möge nun das Integral der Gleichung 13) aufgestellt werden. Man benutze den Ausdruck 18) und schreibe in Rücksicht auf spätere Entwickelungen $\lambda_k - 1$ an Stelle von λ_k. Das Resultat lautet:

* Diese Bemerkung trifft im Falle $n = 2$ und angewendet auf Gleichung 15) nicht zu, denn dort ist $\lambda_1 = -1$. Eine einfache Modification des Verfahrens führt indessen auch hier zum Ziele.

Der Differentialgleichung

$$
19)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1} \sum\limits_{n-1}^{0} a_i \dfrac{d^i y}{d(lx)^i}, \\ \text{wobei} \\ \sum\limits_{n-1}^{0} (-1)^i a_i (\lambda - 1)^i = 0, \quad \lambda_k = k\dfrac{n-1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1); \quad a_{n-1} = 1, \end{cases}
$$

genügt das Integral

$$
20)\quad y = {}_e\!\int dx. \left\{ {}_{n-1}\!\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^{n-1} + \dots + u_{n-1}^{n-1}}{n-1}} u_1^{\lambda_1 - 1} \dots u_{n-1}^{\lambda_{n-1} - 1} S\, du_1 \dots du_{n-1} \right\}.
$$

Hier bedeutet

$$
S = \sum_{k=1}^{k=n-1} C_k e^{\varepsilon_k u_1 \dots u_{n-1} x};
$$

die positiven Brüche λ_1 bis λ_{n-1} sind gegeben durch

$$
\lambda_k = k\frac{n-1}{n}
$$

und ε_1 bis ε_{n-1} sind die Wurzeln der Gleichung

$$
\varepsilon^{n-1} = (-1)^{n-1}.
$$

b) Da die Differentialgleichung 19) auch durch die Wurzeln der Gleichung

$$
1)\qquad y^n - ny - (n-1)x = 0
$$

befriedigt wurde, so wird der Ausdruck 20) eine Auflösung der letzten algebraischen Gleichung darstellen, wenn die willkürlichen Constanten entsprechend bestimmt werden.

Für $x = 0$ folgen nun aus 1) n Werthe für y, welche mit $(y_r)_0$, $r = 1, 2, \dots, n$ bezeichnet werden mögen; ausserdem kann man aus 1) die zugehörigen Werthe von $(y'_r)_0$, $(y''_r)_0$, $\dots$, $(y_r^{(n-1)})_0$ finden. Andererseits folgt aus der Integralform 20)

$$
(y^{(h+1)})_0 = {}_{n-1}\!\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^{n-1} + \dots + u_{n-1}^{n-1}}{n-1}} u_1^{h+\lambda_1 - 1} \dots u_{n-1}^{h+\lambda_{n-1} - 1} S\, du_1 \dots du_{n-1},
$$

$$
S = \sum_{k=1}^{k=n-1} C_k \varepsilon_k^h,
$$

und hier ist das $(n-1)$-fache Integral eine bestimmte Constante, welche mit P_h bezeichnet werden soll.

Durch Vergleichung der in zweifacher Weise gewonnenen Differentialquotienten gelangt man zu der Relation

$$
21)\qquad P_h \sum_{k=1}^{k=n-1} C_k \varepsilon_k^h = (y_r^{(h+1)})_0,
$$

und aus dieser entspringt für $h = 0, 1, \ldots, (n-2)$ ein lineares Gleichungssystem, aus welchem die Constanten C_1 bis C_{n-1} berechnet werden können.

Die willkürliche Constante, welche das unbestimmte Integral in 20) mit sich führt, ist so zu bestimmen, dass für $x = 0$ y die Werthe 0, resp. $\sqrt[n-1]{n}$ erlangt.

Bezüglich der Ermittelung von P_h beachte man, dass allgemein

$$22) \quad \overset{m}{\int_0^\infty} e^{-\frac{u_1^\nu + \ldots + u_m^\nu}{\nu}} u_1^{h+\lambda_1-1} \ldots u_m^{h+\lambda_m-1} \, du_1 \ldots du_m$$

$$= \nu^\omega \Gamma\left(\frac{h+\lambda_1}{\nu}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{h+\lambda_2}{\nu}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{h+\lambda_m}{\nu}\right),$$

wobei

$$\omega = \frac{1}{\nu} \{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m - m(\nu - h)\}.$$

Für $\nu = m = n-1$, und weil $\Sigma\lambda = \frac{(n-1)^2}{2}$, erhält man sonach

$$23) \quad P_h = (n-1)^\omega \Gamma\left(\frac{h+\lambda_1}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{h+\lambda_2}{n-1}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{h+\lambda_{n-1}}{2}\right), \quad \omega = h - \frac{n-1}{2}.$$

$$\lambda_k = k\frac{n-1}{n}.$$

Der Ausdruck für P_h lässt sich nach dem Theorem von Gauss über Gammafunctionen umgestalten; auch sei darauf hingewiesen, dass das Gleichungssystem 21) eine ganz eigenartige Behandlungsweise gestattet.*

c) Es bleibt noch übrig, das Bildungsgesetz von $(y_r^{(h+1)})_0$ aus der Gleichung

$$1) \quad y^n - ny - (n-1)x = 0$$

herzuleiten. Ist

$$x = \varphi(y) = \frac{y^n - ny}{n-1},$$

so hat man (vergl. § 1)

$$\frac{d^{h+1}y}{dx^{h+1}} = D_\varrho^h \left\{\left(\frac{\varrho}{\varphi(y+\varrho) - \varphi(y)}\right)^{h+1}\right\}_{\varrho=0}$$

$$= D_\varrho^h \left\{\left(\frac{(n-1)\varrho}{(y+\varrho)^n - n(y+\varrho) - y^n + ny}\right)^{h+1}\right\}_{\varrho=0}$$

oder, wenn $x = 0$, also $y^n - ny = 0$,

$$(y^{(h+1)})_0 = D_\varrho^h \left\{\left(\frac{(n-1)\varrho}{(y+\varrho)^{n-1} - n}\right)^{h+1} (y+\varrho)^{-(h+1)}\right\}_{\varrho=0}.$$

Schliesst man zunächst den Fall $y = 0$ aus, so ist

$$y^{n-1} - n = 0$$

und daher kann man auch schreiben

* Vergl. Baltzer, Determinanten, § 10 Abschnitt 12 und 13.

$$(y^{(h+1)})_0 = D_\varrho^h \left\{ \left(\frac{(n-1)\varrho}{(y+\varrho)^{n-1} - y^{n-1}} \right)^{h+1} (y+\varrho)^{-(h+1)} \right\}_{\varrho=0}.$$

Zu diesem Ausdrucke würde man auch gelangen, wenn man suchte

$$\left\{ \frac{d^{h+1}}{dx^{h+1}} \left(\frac{y^{-h}}{-h} \right) \right\}_{x=0},$$

gebildet für die Wurzeln der Gleichung

$$y^{n-1} - n - (n-1)x = 0;$$

denn es ist allgemein für $x = \psi(y)$

$$\frac{d^{h+1}}{dx^{h+1}} f(y) = D_\varrho^h \left\{ \left(\frac{\varrho}{\psi(y+\varrho) - \psi(y)} \right)^{h+1} f'(y+\varrho) \right\}_{\varrho=0}.$$

Es gilt sonach Folgendes:

Der Differentialquotient $(y^{(h+1)})_0$, gebildet für die Wurzeln der Gleichung 1), jedoch mit Ausschluss der Wurzel $y=0$, ist identisch mit dem Quotienten

$$\left\{ \frac{d^{h+1}}{dx^{h+1}} \left(\frac{y^{-h}}{-h} \right) \right\}_{x=0},$$

gebildet für die Wurzeln der Gleichung

$$y^{n-1} - n - (n-1)x = 0,$$

d. h., es ist

$$(y^{(h+1)})_0 = \left\{ \frac{d^{h+1}}{dx^{h+1}} (n + (n-1)x)^{-\frac{h}{n-1}} : (-h) \right\}_{x=0}$$

oder

$$24)\quad (y^{(h+1)})_0 = (-1)^h (h + (n-1))(h + 2(n-1)) \dots (h + h(n-1))\, n^{-\frac{h}{n-1} - (h+1)}.$$

Bestimmt man zweitens auch $y^{(h+1)}$ aus 1) für den Fall, in welchem y mit x gleichzeitig verschwindet, so ergiebt sich

$$(y^{(h+1)})_{\substack{x=0\\y=0}} = D^h \left\{ \left(\frac{(n-1)\varrho}{\varrho^n - n\varrho} \right)^{h+1} \right\}_{\varrho=0} = (n-1)^{h+1} D_\varrho \{ (\varrho^{n-1} - n)^{-(h+1)} \}_{\varrho=0},$$

und hieraus entwickelt man leicht, dass sämmtliche Ableitungen verschwinden, ausgenommen $(y')_{\substack{0\\0}}$, $(y^{(n)})_{\substack{0\\0}}$, $(y^{(2n-1)})_{\substack{0\\0}}$ etc. Hier kommt nur die erste in Betracht, und diese ist

$$25)\qquad (y')_{\substack{0\\0}} = -\frac{n-1}{n}.$$

d) Es mögen nun die Grössen C_k aus dem Gleichungssystem 21) ermittelt werden; man hat daher die rechten Seiten dieser Gleichungen näher zu bestimmen, welche lauten:

$$(y_r^{(h+1)})_0 : P_h; \quad h = 0, 1, \dots, (n-2).$$

Aus 23) folgt

$$P_h = (n-1)^w\, \Gamma\left(\frac{h}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{h}{n-1} + \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma\left(\frac{h}{n-1} + \frac{n-1}{n}\right)$$

oder, nach Anwendung des Theorems von Gauss,

$$P_h = (n-1)^{\omega}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-\frac{nh}{n-1}} \Gamma\left(\frac{nh}{n-1}\right) : \Gamma\left(\frac{h}{n-1}\right), \quad h > 0.$$

Nun ist

$$\Gamma\left(\frac{nh}{n-1}\right) = \Gamma\left(\frac{h}{n-1}+h\right) = \left(\frac{h}{n-1}\right)\left(\frac{h}{n-1}+1\right)\cdots\left(\frac{h}{n-1}+h-1\right)\Gamma\left(\frac{h}{n-1}\right),$$

daher ergiebt sich für P_h, wenn auch der Werth

$$\omega = h - \frac{n-1}{2}$$

eingeführt wird,

26) $$P_h = (n-1)^{-\frac{n-1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-\frac{nh}{n-1}} . h(h+(n-1))(h+2(n-1))\ldots$$
$$\ldots(h+(h-1)(n-1)).$$

Der unter Nr. 24) entwickelte Differentialquotient kann folgendermassen geschrieben werden:

$$(y^{(h+1)})_0$$
$$= (-1)\;(h+(n-1))(h+2(n-1))\ldots(h+(h-1)(n-1)) : nh . n^{-\frac{h}{n-1}-(h+1)}$$

oder

24a) $$(y^{(h+1)})_0 = (-1)^h . h(h+(n-1))(h+2(n-1))\ldots(h+(h-1)(n-1)) . n^{-\frac{nh}{n-1}}.$$

Folglich giebt eine Division

27) $$(y^{(h+1)})_0 : P_h = (-1)^h (n-1)^{\frac{n-1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}.$$

Für $h=0$ ist die letzte Entwickelung nicht statthaft; dann ist aber

$$P_0 = (n-1)^{-\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

oder

28) $$P_0 = (n-1)^{-\frac{n-1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}.$$

Andererseits hat man aus Gleichung 1) direct

29) $$(y')_0 = \frac{1}{n},$$

folglich ist

30) $$(y')_0 : P_0 = (n-1)^{\frac{n-1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}},$$

woraus übrigens hervorgeht, dass die Gleichung 27) auch für $h=0$ ihren Sinn behält.

Die eben gewonnenen Resultate gelten, da der Ausdruck 24) in Verwendung kam, nur dann, wenn der Gleichung 1), für $x=0$, jene $(n-1)$ Wurzeln entnommen werden, die zu

$$y^{n-1} - n = 0$$

gehören. In dem Falle, wo für $x=0$ die Wurzel $y=0$ gewählt wird, ist das Gleichungssystem 21) für die C ein anderes; es verschwinden nämlich dann sämmtliche rechte Seiten, mit Ausnahme der ersten, welche lautet:

$$(y')_0 : P_0 = -\frac{n-1}{n} : (n-1)^{-\frac{n-1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$$

oder

31) $$(y')_0 : P_0 = -(n-1)^{\frac{n+1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}.$$

Nach diesen Vorbereitungen kann die Auflösung der Gleichungen 21) in beiden Fällen leicht vollzogen werden.

α) Auflösung des Systems

21α) $$\sum_{k=1}^{k=n-1} C_k \varepsilon_k{}^h = (-1)^h (n-1)^{\frac{n-1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}, \quad h = 0, 1, \ldots, (n-2);$$
$$\varepsilon^{n-1} - (-1)^{n-1} = 0.$$

Führt man an Stelle von C_k eine neue Unbekannte mittels

$$C_k = c_k . (n-1)^{\frac{n-1}{2}} (2\pi)^{-\frac{(n-1)}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$$

ein, so entsteht

$$\begin{array}{l} c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1} = 1, \\ \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} c_{n-1} = -1, \\ \varepsilon_1{}^2 c_1 + \varepsilon_2{}^2 c_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}{}^2 c_{n-1} = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_1{}^{n-2} c_1 + \varepsilon_2{}^{n-2} c_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}^{n-2} c_{n-1} = (-1)^{n-2}. \end{array}$$

Hieraus folgt*

$$c_k = \frac{f(t)}{(t-\varepsilon_k) f'(\varepsilon_k)}, \quad \text{wenn } f(t) = t^{n-1} - (-1)^{n-1} \text{ und } t = -1,$$

und dieses zeigt an, dass c_k verschwindet, ausgenommen, wenn

$$t = \varepsilon_k, \text{ d. h. } \varepsilon_k = -1.$$

In diesem besondern Falle wird

$$c_k = \left\{ \frac{f(t)}{t-\varepsilon_k} \right\}_{t=\varepsilon_k} \frac{1}{f'(\varepsilon_k)} = 1,$$

und man hat daher folgendes Resultat:

Sämmtliche Constanten C des Systems 21α) haben den Werth Null, mit Ausnahme von C_k, welches letztere durch $\varepsilon_k = -1$ genauer charakterisirt wird und den Werth

32) $$C_k = (n-1)^{\frac{n-1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} = \mu$$

besitzt.

β) Auflösung des Systems

21β) $$\sum_{k=1}^{k=n-1} C_k \varepsilon_k{}^h = (y^{(h+1)})_0 : P_h, \quad h = 0, 1, \ldots, (n-2);$$
$$\varepsilon^{n-1} - (-1)^{n-1} = 0.$$

Hier, wo also $(y^{(h+1)})_0$ aus Gleichung 1) für $x = 0$ und $y = 0$ abgeleitet ist, verschwinden alle rechten Seiten mit Ausnahme der ersten,

* Vergl. Baltzer a. a. O.

welche den unter Nr. 31) angegebenen Werth erhält. Setzt man jenen Werth abkürzend $=\varkappa$, also

$$\varkappa = -(n-1)^{\frac{n+1}{2}}(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}},$$

so lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} C_1 \quad &+ \quad C_2 \quad + \ldots + \quad C_{n-1} \quad = \varkappa, \\ C_1\,\varepsilon_1 \quad &+ \quad C_2\,\varepsilon_2 \quad + \ldots + C_{n-1}\,\varepsilon_{n-1} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1\,\varepsilon_1^{n-2} &+ C_2\,\varepsilon_2^{n-2} + \ldots + C_{n-1}\,\varepsilon_{n-1}^{n-2} = 0, \end{aligned}$$

und hieraus folgt*

$$C_k f'(\varepsilon_k) = \varkappa f_{n-2}(\varepsilon_k), \quad \text{wenn} \quad f(t) = t^{n-1} - (-1)^{n-1}$$

und $f_{n-2}(z)$ durch die Entwickelung von

$$\frac{f(z)-f(t)}{z-t} = f_{n-2}(z) + t\,f_{n-3}(z) + \ldots + t^{n-2}$$

bestimmt ist. Man hat also

$$f_{n-2}(z) = z^{n-2},$$

folglich ist

$$(n-1)C_k = \varkappa,$$

d. h. aber:

Sämmtliche Constanten C des Systems 21β) haben ein und denselben Werth, und dieser ist

$$33) \qquad C_k = -(n-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} = -\mu.$$

e) Schreibt man den Integralausdruck 20) mit den in Nr. 32) und 33) näher bestimmten Constanten C nochmals auf, so gelangt man zu folgendem Schlussresultat:

Sämmtliche Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$1) \qquad y^n - ny - (n-1)x = 0$$

sind enthalten in den beiden Integralausdrücken

$$34) \quad y = \mu\int dx.\left\{ {}^{n-1}\!\!\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^{n-1}+\ldots+u_{n-1}^{n-1}}{n-1}} u_1^{\lambda_1-1}\ldots u_{n-1}^{\lambda_{n-1}-1} e^{-u_1u_2\ldots u_{n-1}x} \times du_1\ldots du_{n-1}\right\} + c,$$

$$35) \quad y = -\mu\int dx.\left\{ {}^{n-1}\!\!\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^{n-1}+\ldots+u_{n-1}^{n-1}}{n-1}} u_1^{\lambda_1-1}\ldots u_{n-1}^{\lambda_{n-1}-1} \times\left[e^{\varepsilon_1 u_1u_2\ldots u_{n-1}x}+\ldots+e^{\varepsilon_{n-1}u_1u_2\ldots u_{n-1}x}\right]du_1\ldots du_{n-1}\right\} + c'.$$

In diesen bedeutet

$$36) \quad \mu = +\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2\pi}\right)^{n-1}}; \quad \lambda_k = k\frac{n-1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1),$$

und $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1}$ sind die Wurzeln der Gleichung

* Vergl. Baltzer a. a. O.

$$\varepsilon^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Die Constante c des ersten Integrals ist so zu wählen, dass

$$\text{für } x = 0 \quad y = \sqrt[n-1]{n},$$

die Constante c' des zweiten Integrals hingegen so, dass

$$\text{für } x = 0 \quad y = 0.$$

Beide Integrale 34) und 35) führen entwickelt auf convergente Reihen, wenn $x^{n-1} \leq 1$, und diese Reihen zeigen deutlich, dass dem ersten Integral $(n-1)$ wesentlich von einander verschiedene Werthe zukommen, während durch das zweite Integral die noch fehlende Wurzel der Gleichung 1) repräsentirt wird.* Man vergl. hierüber § 4, Nr. 57 und 64.

§ 3.

Auflösung der Gleichung

2) $$\eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0.$$

a) Die Wurzeln dieser Gleichung genügten, wie in § 1 gezeigt worden ist, der Differentialgleichung

15) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^n\eta}{d\xi^n} = (-1)^{n-1}\sum_{i=n}^{i=0} b_i \dfrac{d^i\eta}{d(l\xi)^i}, \\ \text{wobei} \\ \sum_n^0 (-1)^i b_i \lambda^i = 0, \quad \lambda_k = (k-2)\dfrac{n}{n-1} + 1, \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1); \\ \lambda_n = +1, \end{array}\right.$$

und man hat, da $\lambda_1 = -\frac{1}{n-1}$ negativ ausfällt, bei der Integration den Ausdruck 18) des vorigen Paragraphen zu benutzen. Setzt man $\lambda_k - 1$ an Stelle von λ_k, so gelangtman zu folgendem Resultate:

Der Differentialgleichung

37) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^n\eta}{d\xi^n} = (-1)^{n-1}\sum_{i=n}^{i=0} b_i \dfrac{d^i\eta}{d(l\xi)^i}, \\ \text{für welche} \\ \sum_n^0 (-1)^i b_i (\lambda-1)^i = 0, \quad \lambda_k = (k-2)\dfrac{n}{n-1} + 2, \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1); \\ \lambda_n = 2, \quad b_n = 1, \end{array}\right.$$

genügt das Integral

38) $$\eta = \int d\xi \cdot \left\{ {}^n\!\!\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^n + \ldots + u_n^n}{n}} u_1^{\lambda_1 - 1} \ldots u_n^{\lambda_n - 1} S \, du_1 \ldots du_n \right\},$$

wo

$$S = \sum_{k=1}^{k=n} C_k \, e^{\varepsilon_k u_1 u_2 \ldots u_n \xi}.$$

---

* Der Fall, wenn $x^{n-1} > 1$, findet seine Erledigung in den §§ 4 und 5.

Die Exponenten λ haben die oben angeführten Werthe und sind, falls $n>2$, sämmtlich positiv; ε_1 bis ε_n bedeuten die Wurzeln der Gleichung

$$\varepsilon^n=(-1)^{n-1}.$$

b) Soll der Ausdruck 38) die Lösungen der Gleichung 2) darstellen, so sind die n Constanten C entsprechend zu bestimmen. — Man findet aus 2) für $\xi=0$ n verschiedene Werthe für η, welche mit $(\eta_r)_0$; $r=1, 2, \ldots, n$ bezeichnet werden mögen; ausserdem gewinnt man aus 2) die zugehörigen Ableitungen $(\eta'_r)_0$, $(\eta''_r)_0$, $\ldots$, $(\eta_r^{(n)})_0$. Weiterhin folgt aus dem Integrale 38) für $\xi=0$

$$\left(\frac{d^{h+1}\eta}{d\xi^{h+1}}\right)_0=\int_0^{\infty}\!\!{}^{n} e^{-\frac{u_1^n+\ldots+u_n^n}{n}} u_1^{h+\lambda_1-1}\ldots u_n^{h+\lambda_n-1} S\,du_1\ldots du_n,$$

$$S=\sum_{k=1}^{k=n} C_k\varepsilon_k^h,$$

und wird der letzte Integralausdruck nach Formel 22) ausgewerthet und P_h genannt, so hat man wegen $\Sigma\lambda=\frac{n^2}{2}$

39) $$P_h=n^{\omega}\Gamma\left(\frac{h+\lambda_1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{h+\lambda_2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{h+\lambda_n}{n}\right),\quad \omega=h-\frac{n}{2},$$

$$\lambda_k=(k-2)\frac{n}{n-1}+2,\quad k=1, 2, \ldots, (n-1);\quad \lambda_n=2.$$

Durch Vergleichung der in zweifacher Weise gewonnenen Differentialquotienten gelangt man zu der Relation

40) $$P_h.\sum_{k=1}^{k=n} C_k\varepsilon_k^h=(\eta_r^{(h+1)})_0,$$

aus welcher für $h=0, 1, \ldots, (n-1)$ das zur Berechnung der C erforderliche Gleichungssystem hervorgeht. Die willkürliche Constante, welche das unbestimmte Integral in 38) mit sich führt, ist so zu bestimmen, dass für $\xi=0$ η die Werthe $\sqrt[n]{n-1}$ erlangt.

c) Um einen Ausdruck für $(\eta_r^{(h+1)})_0$ aus Gleichung

2) $$\eta^n-n\xi\eta-(n-1)=0$$

herzuleiten, hat man nach einer im letzten Paragraphen bereits benutzten Formel für

$$\xi=\varphi(\eta)=\frac{\eta^n-(n-1)}{n\eta}:$$

$$\eta^{(h+1)}=D^h\left\{\left(\frac{n\eta\varrho(\eta+\varrho)}{\eta(\eta+\varrho)^n-\eta^n(\eta+\varrho)+(n-1)\varrho}\right)^{h+1}\right\}_{\varrho=0}$$

und, wenn

$$\xi=0,\quad \eta^n-(n-1)=0:$$

$$(\eta^{(h+1)})_0=D_\varrho^h\left\{\left(\frac{n\varrho(\eta+\varrho)}{(\eta+\varrho)^n-\eta^n}\right)^{h+1}\right\}_{\varrho=0}.$$

Zu eben diesem Ausdruck würde man gelangen, wenn man suchte $\left\{\frac{d^{h+1}}{d\xi^{h+1}}\left(\frac{\eta^{h+2}}{h+2}\right)\right\}_{\xi=0}$, gebildet für die Wurzeln der Gleichung

$$\eta^n - n\xi - (n-1) = 0,$$

mithin ist

$$(\eta^{(h+1)})_0 = \left\{\frac{d^{h+1}}{d\xi^{h+1}}(n\xi + (n-1))^{\frac{h+2}{n}} : (h+2)\right\}_{\xi=0}$$

oder

$$41)\quad (\eta^{(h+1)})_0 = (h+2-n)(h+2-2n)\dots(h+2-hn)(n-1)^{\frac{h+2}{n}-(h+1)},$$
$$(\eta')_0 = (n-1)^{-\frac{n-2}{n}}.$$

d) Es erübrigt noch den Ausdruck für P_h in Nr 39 umzugestalten. Es ist

$$P_h = n^{h-\frac{n}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{h+2}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\Gamma\left(\frac{h+2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{h+2}{n}+\frac{1}{n-1}\right)\right.$$
$$\dots\Gamma\left(\frac{h+2}{n}+\frac{n-3}{n-1}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{h+2}{n}\right)$$
$$= n^{h-\frac{n}{2}}(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}(n-1)^{\frac{1}{2}+\frac{h+2}{n}-(h+1)}\,\Gamma\left(h+1-\frac{h+2}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{h+2}{n}\right).$$

Nun ist, falls h von $n-1$ und $n-2$ verschieden ist,

$$\Gamma\left(h+1-\frac{h+2}{n}\right) = (-1)^h n^{-h}(h+2-n)(h+2-2n)\dots(h+2-hn).\Gamma\left(1-\frac{h+2}{n}\right)$$

und

$$\Gamma\left(\frac{h+2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{h+2}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{h+2}{n}\pi},$$

folglich

$$42)\quad P_h = (-1)^h n^{-\frac{n}{2}}.\tfrac{1}{2}(2\pi)^{\frac{n}{2}}(n-1)^{\frac{1}{2}+\frac{h+2}{n}-(h+1)}(h+2-n)\dots$$
$$\dots(h+2-hn):\sin\frac{h+2}{n}\pi.$$

Dividirt man den Ausdruck 41) durch 42), so erhält man

$$43)\quad (\eta^{(h+1)})_0 : P_h = (-1)^h n^{\frac{n}{2}}.2(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(n-1)^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{h+2}{n}\pi.$$

Im Falle $h=n-2$ und $h=n-1$ ist diese Entwickelung ungiltig. Für $h=n-2$ ist

$$44)\quad P_{n-2} = n^{\frac{n}{2}-2}(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}(n-1)^{\frac{5}{2}-n}(n-3)!.$$

Da aber $(\eta^{(n-1)})_0 = 0$, so ist

$$(\eta^{(n-1)})_0 : P_{n-2} = 0.$$

Für $h=n-1$ ist

$$45)\quad (\eta^{(n)})_0 = 1.(1-n)(1-2n)\dots(1-(n-2)n)(n-1)^{\frac{n+1}{n}-n}$$

und

$$P_{n-1} = n^{\frac{n}{2}-1}(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}(n-1)^{\frac{1}{2}+\frac{n+1}{n}-n}\,\Gamma\left(n-\frac{n+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Weiter ist

$$\Gamma\left(n-\frac{n+1}{n}\right)=\Gamma\left(n-2+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=(-1)^{n-2}n^{2-n}(1-n)(1-2n)\ldots(1-(n-2)n)\,\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

und weil

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}\pi}{\sin\frac{1}{n}\pi},$$

46) $$P_{n-1}=(-1)^{n-2}n^{-\frac{n}{2}}$$

$$\times\frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{n}{2}}(n-1)^{\frac{1}{2}+\frac{n+1}{n}-n}(1-n)(1-2n)\ldots(1-(n-2)n):\sin\frac{1}{n}\pi,$$

woraus übrigens folgt, dass der Ausdruck 42) auch für $h=n-1$ seine Giltigkeit beibehalten hat. Nach diesem ist

47) $$(\eta^{(n)})_0:P_{n-1}=(-1)^{n-2}n^{\frac{n}{2}}.2(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(n-1)^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{\pi}{n}.$$

Auflösung des Systems

40) $$\sum_{k=1}^{k=n}C_k\,\varepsilon_k^{\,h}=(-1)^h n^{\frac{n}{2}}2.(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(n-1)^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{h+2}{n}\pi,$$

$$h=0,1,\ldots,(n-1);\quad \varepsilon^n-(-1)^{n-1}=0.$$

Führt man an Stelle von C_k eine neue Unbekannte mittels

$$C_k=c_k n^{\frac{n}{2}}2.(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(n-1)^{-\frac{1}{2}}$$

ein, so entsteht

$$c_1+c_2+\ldots+c_n=\sin\frac{2}{n}\pi,$$

$$\varepsilon_1c_1+\varepsilon_2c_2+\ldots+\varepsilon_nc_n=-\sin\frac{3}{n}\pi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon_1^{n-1}c_1+\varepsilon_2^{n-1}c_2+\ldots+\varepsilon_n^{n-1}c_n=(-1)^{n-1}\sin\frac{n+1}{n}\pi.$$

Für die rechten Seiten dieser Gleichungen

$$(-1)^h\sin\frac{h+2}{n}\pi,\quad h=0,1,\ldots,(n-1)$$

kann man

$$\frac{1}{2i}\{\varepsilon_2^{\,h+2}-\varepsilon_1^{\,h+2}\},\quad i=\sqrt{-1}$$

schreiben, wo ε_1 und ε_2 zwei conjugirte Wurzeln der Gleichung

$$\varepsilon^n-(-1)^{n-1}=0$$

bedeuten,

$$\varepsilon_1 = -\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, \quad \varepsilon_2 = -\cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n}$$

und nun ergiebt sich*

$$2i.c_k f'(\varepsilon_k) = \varepsilon_2^2 \frac{f(z)}{z-\varepsilon_2} - \varepsilon_1^2 \frac{f(z)}{z-\varepsilon_1}, \quad f(z) = z^n - (-1)^{n-1}.$$

Setzt man $z = \varepsilon_k$, so ist

für $k=1$ $\quad 2i.c_1 = -\varepsilon_1^2$,
für $k=2$ $\quad 2i.c_2 = +\varepsilon_2^2$,
für $k=3, 4, \dots, n$ $\quad c_k = 0$,

wie auch aus den Gleichungen ohne Weiteres ersichtlich ist. Man gelangt also zu folgendem Resultat:

Sämmtliche Constanten C des Systems 40) verschwinden, ausgenommen C_1 und C_2, welche letztere die Werthe

$$48) \qquad C_1 = \mu\varepsilon_1^2, \quad C_2 = -\mu\varepsilon_2^2; \quad \mu = \sqrt{-1}\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\frac{n}{2\pi}\right)^n}$$

besitzen.

e) Führt man die oben bestimmten Constanten in das Integral 38) ein, so ergiebt sich schliesslich Folgendes:

Sämmtliche Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$2) \qquad \eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0$$

sind enthalten in dem Integralausdruck

$$49) \qquad \eta = \mu\int d\xi$$
$$\times\left\{{}_n\int_0^\infty e^{-\frac{+\dots+u_n^n}{n}} u_1^{\lambda_1-1}\dots u_n^{\lambda_n-1}\left[\varepsilon_1^2 e^{\varepsilon_1 u_1 u_2\dots u_n\xi} - \varepsilon_2^2 e^{\varepsilon_2 u_1 u_2\dots u_n\xi}\right]du_1\dots du_n\right\} + c,$$

wobei

$$\varepsilon_1 = -\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, \quad \varepsilon_2 = -\cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n},$$

$$50) \quad \mu = +\sqrt{\frac{-1}{n-1}\left(\frac{n}{2\pi}\right)^n}, \quad \lambda_k = (k-2)\frac{n}{n-1} + 2, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1); \quad \lambda_n = 2.$$

Die Constante C ist so zu wählen, dass

für $\xi = 0$ $\qquad \eta = \sqrt[n]{n-1}$.

Das Integral 49) führt entwickelt auf eine convergente Reihe, wenn $\xi^n \leqq 1$, und diese zeigt, dass dem η n von einander verschiedene Werthe zukommen. — Man vergl. hierüber § 4, Nr. 71).

---

* Vergl. Baltzer a. a. O.

Anmerkung. Die Gleichungen

1) $$y^n - ny - (n-1)x = 0$$

und

2) $$y^n - n\xi\eta - (n-1) = 0$$

konnten durch die Substitutionen

4) $$x = \xi^{-\frac{n}{n-1}}, \quad y = \eta\xi^{-\frac{1}{n-1}}, \quad \text{d. h. } \xi = x^{-\frac{n-1}{n}}, \quad \eta = yx^{-\frac{1}{n}}$$

in einander übergeführt werden. Hieraus folgt, dass

$$\xi^n < 1, \text{ wenn } x^{n-1} > 1,$$

und umgekehrt. Mithin sind die Reihen, welche aus dem Integral 49) hervorgehen, brauchbar, wenn die Reihen, die den Integralen 34) und 35) entsprechen, divergent werden, und umgekehrt sind letztere convergent, wenn erstere unbrauchbar werden.

(Schluss folgt.)

Kleinere Mittheilungen.

IX. Beweis eines Lehrsatzes von Jacob Steiner.

Im XXX. Bande von Crelle's Journal theilt Steiner unter Nr. 3 auf S. 274 einen Satz nebst dem polaren Gegensatze in verschiedenen Fassungen mit, von denen ich die folgende ohne das polare Pendant reproducire:

„Ist einem vollständigen Viereck ein beliebiger Kegelschnitt umgeschrieben, und werden in den Ecken desselben an den letzteren die Tangenten gelegt, so wird jede der sechs Seiten des Vierecks von den Tangenten in den ihr nicht anliegenden Ecken in zwei Punkten geschnitten, so dass im Ganzen zwölf Punkte entstehen; von diesen zwölf Punkten liegen immer 3 mal 8 in irgend einem Kegelschnitte. — Und ferner: Die jedesmaligen acht Punkte haben zudem die Eigenschaft, dass sie auf dreifache Art paarweise in vier Geraden liegen, welche sich in einem Punkte a, b, c schneiden; und zwar sind diese drei Schnittpunkte a, b, c für jedes der drei Systeme von acht Punkten die nämlichen u. s. w."

Den vorstehenden Satz fand ich vor sieben Jahren unabhängig von Steiner und erweiterte ihn, indem ich das Viereck und das Vierseit nur der Bedingung unterwarf, dass sie dasselbe Diagonaldreieck haben sollten. (Vergl. meine „Vermischten Aufgaben und Lehrsätze" Nr. XXVI, XXVII, XXVIII, R. Friedländer & Sohn, Berlin.) Vorausgeschickt mag noch werden, dass die von Steiner genannten drei Punkte a, b, c die Diagonalpunkte des Vierecks sind, was ihm nicht unbekannt sein konnte.

Beweis.

Es seien $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$ die Ecken eines Vierecks $\mathfrak{P}$, welches einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ eingeschrieben ist, während P das von den Tangenten p_1, p_2, p_3, p_4 der genannten Ecken gebildete Vierseit sein möge. Die Diagonalpunkte von $\mathfrak{P}$ seien:

1) $\mathfrak{x} = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4),\quad \mathfrak{y} = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4),\quad \mathfrak{z} = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4,\ \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3).$

Die Diagonalen von P seien x, y, z. Man erhält sie, wenn man in 1) statt der deutschen Buchstaben lateinische setzt.

Combinirt man die durch einen bestimmten Diagonalpunkt von $\mathfrak{P}$ gehenden Seiten dieses Vierecks mit denjenigen vier Seitenpaaren von P, welche von

Punkten ausgehen, die auf einer durch den gewählten Diagonalpunkt gehenden Diagonale liegen, so ergeben sich vier Vierseite, von deren jedem natürlich die eine Diagonale durch den gewählten Diagonalpunkt geht; die zweite Diagonale ist eine der sechs Seiten von $\mathfrak{P}$, die dritte Diagonale geht durch einen der nicht gewählten Diagonalpunkte dieses Vierecks. Da es im Ganzen zwölf solcher Vierseite giebt, so gehen von ihren zwölf dritten Diagonalen je vier durch einen der Diagonalpunkte von $\mathfrak{P}$, was folgende Tabellen erläutern und begründen.

I.

Das durch den Diagonalpunkt $\mathfrak{x}$ gehende Seitenpaar von $\mathfrak{P}$ giebt combinirt mit den vier Seitenpaaren

$$p_1, p_2 \qquad p_1, p_4 \qquad p_2, p_3 \qquad p_3, p_4$$

des Vierseits P vier neue Vierseite, die bezeichnet werden durch

$$X_{12} \qquad X_{14} \qquad X_{23} \qquad X_{34}.$$

Zwei Diagonalen derselben werden dargestellt durch

$$y \text{ und } \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \qquad z \text{ und } \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4 \qquad z \text{ und } \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 \qquad y \text{ und } \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4.$$

Da nun die von $\mathfrak{x}$ ausgehenden vier Strahlen $y, z; \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4$ harmonisch sind, so geht

$$z \qquad y \qquad y \qquad z$$

bez. durch den Schnittpunkt der dritten Diagonale mit

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \qquad \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4 \qquad \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 \qquad \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4,$$

d. h. die dritten Diagonalen von $X_{12}, X_{14}, X_{23}, X_{34}$

$$(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3, p_2)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4, p_1) \quad (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3, p_4)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4, p_1) \quad (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3, p_2)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4, p_3) \quad (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3, p_4)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4, p_3),$$

welche der Kürze halber bezeichnet werden durch

$$x_{12} \qquad x_{14} \qquad x_{23} \qquad x_{34},$$

gehen bez. durch die Diagonalpunkte

$$\mathfrak{y} \qquad \mathfrak{z} \qquad \mathfrak{z} \qquad \mathfrak{y}.$$

II.

Das durch den Diagonalpunkt $\mathfrak{y}$ gehende Seitenpaar von $\mathfrak{P}$ giebt combinirt mit den vier Seitenpaaren

$$p_1, p_3 \qquad p_1, p_4 \qquad p_2, p_3 \qquad p_2, p_4$$

des Vierseits P vier neue Vierseite, die bezeichnet werden durch

$$Y_{13} \qquad Y_{14} \qquad Y_{23} \qquad Y_{24}.$$

Zwei Diagonalen derselben werden dargestellt durch

$$x \text{ und } \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3 \qquad z \text{ und } \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4 \qquad z \text{ und } \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 \qquad x \text{ und } \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4.$$

Da nun die von y ausgehenden vier Strahlen $x, z; \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$ harmonisch sind, so geht

$$z \qquad x \qquad x \qquad z$$

bez. durch den Schnittpunkt der dritten Diagonale mit

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3 \qquad \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4 \qquad \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 \qquad \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4,$$

d. h. die dritten Diagonalen von $Y_{13}, Y_{14}, Y_{23}, Y_{24}$

$(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, p_3)(\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4, p_1)$ $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, p_4)(\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4, p_1)$ $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, p_3)(\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4, p_2)$ $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, p_4)(\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4, p_2)$, welche der Kürze halber bezeichnet werden durch

$$y_{13} \qquad y_{14} \qquad y_{23} \qquad y_{24},$$

gehen bez. durch die Diagonalpunkte

$$\mathfrak{x} \qquad \mathfrak{z} \qquad \mathfrak{z} \qquad \mathfrak{x}.$$

III.

Das durch den Diagonalpunkt $\mathfrak{z}$ gehende Seitenpaar von $\mathfrak{P}$ giebt combinirt mit den vier Seitenpaaren

$$p_1, p_2 \qquad p_1, p_3 \qquad p_2, p_4 \qquad p_3, p_4$$

des Vierseits P vier neue Vierseite, die bezeichnet werden durch

$$Z_{12} \qquad Z_{13} \qquad Z_{24} \qquad Z_{34}.$$

Zwei Diagonalen derselben werden dargestellt durch

$$y \text{ und } \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \qquad x \text{ und } \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3 \qquad x \text{ und } \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4 \qquad y \text{ und } \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4.$$

Da nun die von $\mathfrak{z}$ ausgehenden vier Strahlen $x, y;\ \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4,\ \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ harmonisch sind, so geht

$$x \qquad y \qquad y \qquad x$$

bez. durch den Schnittpunkt der dritten Diagonale mit

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \qquad \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3 \qquad \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4 \qquad \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4,$$

d. h. die dritten Diagonalen von Z_{12}, Z_{13}, Z_{24}, Z_{34}

$(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4, p_2)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, p_1)$ $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4, p_3)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, p_1)$ $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4, p_2)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, p_4)$ $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4, p_3)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, p_4)$, welche der Kürze halber bezeichnet werden durch

$$z_{12} \qquad z_{13} \qquad z_{24} \qquad z_{34},$$

gehen bez. durch die Diagonalpunkte

$$\mathfrak{y} \qquad \mathfrak{x} \qquad \mathfrak{x} \qquad \mathfrak{y}.$$

Mithin gehen durch die Diagonalpunkte

$$\mathfrak{x} \qquad \mathfrak{y} \qquad \mathfrak{z}$$

bez. die vier Geraden

$$y_{13}, y_{24}, z_{13}, z_{24} \qquad x_{12}, x_{34}, z_{12}, z_{34} \qquad x_{14}, x_{23}, y_{14}, y_{23}.$$

Wir wollen diese Quadrupel von Geraden bezeichnen durch

$$[g_\mathfrak{x}] \qquad [g_\mathfrak{y}] \qquad [g_\mathfrak{z}].$$

Auf jeder dieser zwölf Geraden liegen, wie die Tabellen I, II, III zeigen, zwei von den zwölf Punkten, in welchen die vier Seiten von P von den sechs Seiten von $\mathfrak{P}$ getroffen werden.

Wir wollen die acht von diesen zwölf Punkten, welche je auf einem Quadrupel $[g_\mathfrak{x}]$, $[g_\mathfrak{y}]$, $[g_\mathfrak{z}]$ liegen, bezeichnen durch

$$[\mathfrak{g}_\mathfrak{x}] \qquad [\mathfrak{g}_\mathfrak{y}] \qquad [\mathfrak{g}_\mathfrak{z}].$$

Diese 3 mal 8 Punkte gehören nun je einem Kegelschnitte an, den wir nach dem betreffenden Diagonalpunkte durch

$$\mathfrak{K}_\mathfrak{x} \qquad \mathfrak{K}_\mathfrak{y} \qquad \mathfrak{K}_\mathfrak{z}$$

bezeichnen.

Zum Beweise combiniren wir die Eckpunkte von $\mathfrak{P}$ zu dreien, wodurch wir vier Dreiecke erhalten, die wir je nach dem Index des fehlenden Eckpunktes von $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_4$ bezeichnen. In jedem dieser Dreiecke liegen die drei Schnittpunkte je einer Seite mit der Tangente der Gegenecke auf einer gewissen Geraden. Die so erhaltenen vier Geraden bezeichnen wir bez. durch d_1, d_2, d_3, d_4. Von den auf diesen vier Geraden zu je dreien vertheilten zwölf Punkten hatten wir oben bewiesen, dass sie zu je zweien auf zwölf Gerade vertheilt sind, deren je vier durch einen Diagonalpunkt von $\mathfrak{P}$ gehen. Mit Rücksicht hierauf sieht man zunächst ein, dass das von d_1, d_2, d_3, d_4 gebildete Vierseit, welches wir durch D bezeichnen wollen, dieselben Diagonalen wie P hat. Dies erklärt sich aus folgender Tabelle.

IV.

Die Paare von Gegenpunkten	liegen bez. auf der Diagonale	wegen der Collineation der Dreiecke		Die Collineationscentren sind	Hierbei sind die Collineationsaxen bez.	Mithin sind die Diagonalen	auch Diagonalen des Vierseits D.
$d_1 d_3$	x	$\mathfrak{z}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3$ und	$(d_1 d_3)(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, p_4)(\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4, p_2)$	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{x}(d_1 p_4)(d_3 p_2)$	x	
$d_2 d_4$		$\mathfrak{z}\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4$	$(d_2 d_4)(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, p_3)(\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4, p_1)$		$\mathfrak{x}(d_2 p_3)(d_4 p_1)$		
$d_1 d_2$	y	$\mathfrak{x}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ und	$(d_1 d_2)(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4, p_3)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, p_4)$	$\mathfrak{z}$	$\mathfrak{y}(d_1 p_3)(d_2 p_4)$	y	
$d_3 d_4$		$\mathfrak{x}\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$	$(d_3 d_4)(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4, p_2)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, p_1)$		$\mathfrak{y}(d_3 p_1)(d_4 p_2)$		
$d_1 d_4$	z	$\mathfrak{y}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4$ und	$(d_1 d_4)(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3, p_2)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4, p_3)$	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{z}(d_1 p_2)(d_4 p_3)$	z	
$d_2 d_3$		$\mathfrak{y}\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$(d_2 d_3)(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3, p_4)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4, p_1)$		$\mathfrak{z}(d_2 p_1)(d_3 p_4)$		

Diejenigen vier von den acht Punkten $[\mathfrak{g}_\mathfrak{x}]$, welche auch den Punkten $[\mathfrak{g}_\mathfrak{y}]$, aber nicht den Punkten $[\mathfrak{g}_\mathfrak{z}]$ angehören [es sind dies die Punkte $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4, p_2)$, $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4, p_3)$, $(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, p_1)$, $(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, p_4)$], liegen einzeln auf den Geraden von D und bilden ein Viereck, dessen Diagonalpunkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind. Daher befinden sich diese vier Punkte auf einem gewissen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$, welcher dem Vierseit D einbeschrieben ist, denn die Seiten desselben sind die Tangenten jener vier Punkte.

Diejenigen vier von den acht Punkten $[\mathfrak{g}_\mathfrak{y}]$, welche auch den Punkten $[\mathfrak{g}_\mathfrak{z}]$, aber nicht den Punkten $[\mathfrak{g}_\mathfrak{x}]$ angehören [es sind dies die Punkte $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3, p_2)$, $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3, p_4)$, $(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4, p_1)$, $(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4, p_3)$], liegen auch einzeln auf den Geraden von D und bilden ein Viereck, dessen Diagonalpunkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind. Daher befinden sie sich auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}$, welcher auch dem Vierseit D einbeschrieben ist, denn die Seiten desselben sind die Tangenten jener vier Punkte.

Endlich liegen diejenigen vier von den acht Punkten $[\mathfrak{g}_\mathfrak{z}]$, welche gleichzeitig den $[\mathfrak{g}_\mathfrak{x}]$, aber nicht den $[\mathfrak{g}_\mathfrak{y}]$ angehören [es sind dies die Punkte $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, p_3)$, $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, p_4)$, $(\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4, p_1)$, $(\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4, p_2)$], ebenfalls einzeln auf den Ge-

raden von D und bilden ein Viereck, dessen Diagonalpunkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind. Also liegen sie auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}$, der dem Vierseit D einbeschrieben ist, weil dessen Seiten die Tangenten jener vier Punkte sind.

Die acht Berührungspunkte von $\mathfrak{K}_{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$ und $\mathfrak{K}_{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}$ auf den Seiten des Vierseits D sind nun identisch mit den acht Punkten $[\mathfrak{g}_\mathfrak{x}]$, weshalb diese auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_\mathfrak{x}$ liegen.

Die acht Berührungspunkte von $\mathfrak{K}_{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$ und $\mathfrak{K}_{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}$ auf den Seiten des Vierseits D sind identisch mit den acht Punkten $[\mathfrak{g}_\mathfrak{y}]$, daher liegen diese auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_\mathfrak{y}$.

Die acht Berührungspunkte von $\mathfrak{K}_{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}$ und $\mathfrak{K}_{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}$ auf den Seiten des Vierseits D sind identisch mit den acht Punkten $[\mathfrak{g}_\mathfrak{z}]$, weshalb sich diese auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_\mathfrak{z}$ befinden.

Hiermit ist der eine Theil des Satzes von Steiner bewiesen. Dass die je acht Punkte eines der Kegelschnitte $\mathfrak{K}_\mathfrak{x}$, $\mathfrak{K}_\mathfrak{y}$, $\mathfrak{K}_\mathfrak{z}$ dreimal zu je zweien auf vier Gerade vertheilt sind, die von den Diagonalpunkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ausgehen, dürfte aus der vorstehenden Untersuchung ohne Weiteres einleuchten. Je zwei von den vier Geraden sind allemal Gegenseiten des Vierecks $\mathfrak{P}$.

Man erkennt noch leicht, dass die ausser den zwei Diagonalen von $\mathfrak{P}$ durch einen Diagonalpunkt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{z}$ gehenden sechs Geraden in Involution sind. Es sind dies jedesmal die von Steiner genannten vier Geraden und zwei Gegenseiten von $\mathfrak{P}$. Wir wollen dies nur für den Diagonalpunkt $\mathfrak{x}$ nachweisen.

Die durch $\mathfrak{x}$ gehenden Seiten von $\mathfrak{P}$ und Diagonalen von P sind harmonisch. Die in Tabelle II genannten vier Geraden y_{13}, y_{14}, y_{23}, y_{24} und die Geraden $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$ von $\mathfrak{P}$ bilden die Seiten eines vollständigen Vierecks $\mathfrak{X}_\mathfrak{y}$, welches mit $\mathfrak{P}$ dieselben Diagonalpunkte hat. Daher sind die Geraden y_{13} und y_{24} mit den Diagonalen z und y harmonisch conjugirt.

Ebenso bilden die vier Geraden z_{12}, z_{13}, z_{24}, z_{34} der Tabelle III mit den Geraden $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4$, $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ die Seiten eines vollständigen Vierecks $\mathfrak{X}_\mathfrak{z}$, das mit $\mathfrak{P}$ dieselben Diagonalpunkte hat. Daher sind die Geraden z_{13}, z_{14} und die Diagonalen z, y zugeordnet harmonisch. Mithin sind die ausser den Diagonalen von $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{x}$ gehenden sechs Geraden in Involution etc. Ausserdem sind P und $\mathfrak{X}_\mathfrak{y}$ und P und $\mathfrak{X}_\mathfrak{z}$ je für einen neuen Kegelschnitt um- und einbeschriebenes Viereck etc.

Greifswald. H. E. M. O. Zimmermann.

X. Bestimmung der Tonhöhe einer Stimmgabel mittels des Hipp'schen Chronoskops.

Bei diesem ausgezeichneten Instrumente, welches eine grosse Verbreitung in den physikalischen Laboratorien gefunden hat, wird der Gang des Uhrwerkes durch eine Feder regulirt, die 1000 Schwingungen in der Secunde macht. Diese Feder giebt natürlich einen entsprechenden Ton und

es können, wie der Verfasser beobachtete, die Schwebungen dieses Tones mit dem Tone einer nahe gleichgestimmten Stimmgabel recht gut wahrgenommen und gezählt werden. Dies war wegen des grossen Geräusches, das der schnelle Gang des Uhrwerkes hervorbringt, kaum von vornherein zu erwarten.

Es lag nun nahe, diese Erscheinung zur Bestimmung der Tonhöhe einer Stimmgabel zu verwerthen, wenn man dabei auch nicht hoffen durfte, etwa die Genauigkeit stroboskopischer Methoden zu erreichen. Doch durfte man immerhin eine Genauigkeit erwarten, die für praktische Bedürfnisse, etwa für die Construction und Verification einer Normalstimmgabel weitaus genügend erscheint. In der That scheinen die bisher angestellten Versuche dies zu bestätigen.

Mit Rücksicht auf den berührten praktischen Zweck wurden die Versuche gleich mit einer $\bar{a}$-Stimmgabel angestellt. Dieselbe war vor mehreren Jahren durch die Herren Lenoir und Forster von König in Paris bezogen worden, hat die gewöhnliche Form und ist la_3 870 v. s. bezeichnet.

Natürlich musste die Feder des Chronoskopes geändert werden. Um die alte Feder benützen zu können, wurde das Messingstück, in welches sie eingeklemmt ist, weiter weg vom Steigrade gesetzt, sie selbst aber herausgezogen, bis sie nahe einen Ton von 432 Schwingungen gab.

Da die Auslösung und Arretirung des Uhrwerkes natürlich durch das Secundenpendel einer Uhr bewerkstelligt werden sollte, so musste der Anker zwischen den beiden Elektromagneten des Elektroskops durch ein Stahlstück ersetzt und der Strom durch beide Elektromagnete geleitet werden. Wurde nun der Strom geschlossen, so wurde der Zeiger ausgelöst; um ihn dann zu arretiren, musste vor der betreffenden Secunde der Strom umgekehrt werden.

Die Stimmgabel, deren Schwebungen mit der Feder des Chronoskops gezählt werden sollten, war an das Ende eines langen Holzstabes geschraubt, dessen vorderes Ende eine kleine Holzscheibe trug. Der Stab war an zwei Schnüren aufgehängt und war noch mit zwei Hebeln versehen, durch welche die Stimmgabel vom andern Ende des Stabes angeschlagen werden konnte.

Diese Art der Befestigung empfiehlt sich überhaupt bei Aufbewahrung einer Normalstimmgabel. Auf diese Weise ist es nämlich leicht, ihre Schwebungen mit einer andern Stimmgabel, die etwa auf den Holzstab aufgesetzt wird, bis zu drei Minuten lang zu zählen, indem man das Ohr hierbei an die Holzscheibe anlegt. Dies wird ja immer die Aufgabe einer Normalstimmgabel sein und nicht etwa die, einen starken Ton zu geben.

Bei den vorliegenden Versuchen musste allerdings die Stimmgabel während der drei Minuten, als ihre Schwebungen mit der Chronoskopfeder gezählt wurden, mehrmals angeschlagen werden, was aber weiter kein Hinderniss bot.

Beim Zählen der Schwebungen befand sich der Kopf des Beobachters zwischen dem Chronoskop und der erwähnten Holzscheibe, an welche das

Ohr nach Bedürfniss ganz angelegt wurde. Addirt man die beobachtete Anzahl der Schwebungen zu der Angabe des Chronoskops, so erhält man die Anzahl der Schwingungen, welche die Stimmgabel in der gewählten Zeit ausgeführt hat.

Wenn nun ein einzelner solcher Versuch auch nur etwa die Genauigkeit von $\frac{1}{6}$ Schwingung hätte, so ist der Versuch doch so einfach, dass eine oftmalige Wiederholung desselben in kurzer Zeit möglich ist, so dass der Mittelwerth von etwa 16 solcher Beobachtungen schon eine Genauigkeit von $\frac{1}{24}$ einer Schwingung besitzen würde. Diese Genauigkeit dürfte kaum durch eine andere Methode bei gleicher Bequemlichkeit zu erreichen sein.

Da es dem Verfasser mehr darauf ankam, die Methode zu prüfen, als absolute Werthe zu erhalten, so wurden keine besonderen Anordnungen zur Erhaltung constanter Temperatur getroffen, was bei den bekannten unglücklichen Verhältnissen des physikalischen Cabinets ohnedem kaum ausführbar gewesen wäre. Auch der Gang der Pendeluhr, die durch Anbringung eines seitlichen Contacts ungeheuer accelerirte, wurde nur beiläufig controlirt.

Die letzten zwei Versuchsreihen ergaben so folgende Zahlen:

11. November, Temperatur 16° C. Prof. F. Exner hatte die Güte, die Schwebungen zu zählen. Als Mittel von 14 Versuchen ergab sich

$$435.542 \pm 0.033.$$

12. November, Temperatur 15° C. Die Schwebungen wurden theils von mir, theils von Prof. Exner gezählt. Das Mittel von 13 Versuchen ist

$$435.595 \pm 0.028$$

Schwingungen.

Auf gleiche Temperatur mit dem Factor -0.0486 per 1° C. reducirt, giebt die erste Beobachtungsreihe 435.591, also fast genau dasselbe wie die Reihe. Dies ist allerdings Zufall; doch ist zu hoffen, dass eine eigens für diesen Ton verfertigte Feder noch eine viel grössere Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen ergeben wird.

Prof. V. v. Lang.

(Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie.)

XI. Berichtigung.

Im XXIV. Bande dieser Zeitschrift, S. 254 habe ich die Mittheilung gemacht, dass sich die Differentialgleichung

$$1\text{a}) \qquad x\,\varphi(y') + y\,\psi(y') + (xy'-y)^m \cdot \chi(y') = 0$$

mittels der Substitutionen

$$x = \frac{dv}{du}, \quad y = u\frac{dv}{du} - v, \quad y' = u, \quad xy' - y = v$$

in die Bernoulli'sche Gleichung

2a) $$\frac{dv}{du} = \frac{v\,\psi(u) - v^m\,\chi(u)}{\varphi(u) + u\,\psi(u)}$$

transformiren lässt. — Um von dem Integral $v = f(u)$ dieser letzten Gleichung auf das Integral der vorgelegten Gleichung 1a) zu kommen, hat man aus 1a) und aus

$$xy' - y = f(y')$$

die Grösse y' zu eliminiren.

Wird jene Elimination anders vollzogen, so gelangt man im Allgemeinen zu falschen Resultaten, wie das an dem von mir behandelten Beispiele

$$x + y - (xy' - y)^m = 0$$

zu ersehen ist, dessen Integral nicht die damals angegebene Gestalt besitzt, sondern folgendermassen lautet:

$$x^{\frac{1-m}{m}} \left\{ (x+y)^{\frac{m-1}{m}} + 1 \right\} = const.$$

Die früheren Bemerkungen über die Auflösbarkeit des Integrals nach der Constanten, sowie über den integrirenden Factor fallen infolge dessen von selbst fort.

Woldemar Heymann.

Zeitschrift
für
Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction
von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl
und
Dr. M. Cantor.

31. Jahrgang. 3. Heft.

Mit einer lithographirten Tafel.

Ausgegeben am 30. Juni 1886.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1886.

VIII.

Ueber die Auflösung gewisser algebraischer Gleichungen mittelst Integration von Differentialgleichungen.

Von

WOLDEMAR HEYMANN

in Dresden.

(Schluss.)

§ 4.

Auflösung der Gleichungen

1) $y^n - ny - (n-1)x = 0$ und 2) $\eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0$

durch Reihen.

Die Wurzeln der Gleichungen 1) und 2) sind enthalten in dem allgemeinen Ausdrucke 17) des § 2. Dieser Integralausdruck lässt sich in eine Reihe oder, genauer gesprochen, in ein Aggregat von m Reihen umsetzen, und zwar hat man, wie in § 5 näher entwickelt ist,

$$51)\quad \begin{cases} y = \sum_{h=0}^{h=m-1} E_h X_h, \quad E_h = const., \\ X_h = P_h \dfrac{x^h}{h!} - a_m P_{h+m} \dfrac{x^{h+m}}{(h+m)!} + \ldots + (-1)^\sigma a_m^\sigma P_{h+\sigma m} \dfrac{x^{h+\sigma m}}{(h+\sigma m)!} - \ldots \end{cases}$$

Diese Reihe entspricht jedoch noch nicht den Integralen 20) und 38), auf deren Entwickelung es im Speciellen ankommt*; es muss vielmehr nachträglich eine unbestimmte Integration nach x vollzogen werden, und man erhält auf diese Weise

$$52)\quad \begin{cases} y = \sum_{h=0}^{h=m-1} E_h X_h + const., \\ X_h = P_h \dfrac{x^{h+1}}{(h+1)!} - a_m P_{h+m} \dfrac{x^{h+m+1}}{(h+m+1)!} + \ldots \\ \qquad \ldots + (-1)^\sigma a_m^\sigma P_{h+\sigma m} \dfrac{x^{h+\sigma m+1}}{(h+\sigma m+1)!} - \ldots \end{cases}$$

Hier bedeutet (vergl. Ausdruck 22)

* Vergl. den Anfang des § 2.

53) $$\begin{cases} P_h = m^{\omega}\,\Gamma\left(\frac{h+\lambda_1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{h+\lambda_2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{h+\lambda_m}{m}\right), \\ \omega = \frac{1}{m}\{\lambda_1+\ldots+\lambda_m - m(m-h)\}. \end{cases}$$

a) Soll der Ausdruck 52) die Entwickelung des Integrals 20) sein, so muss

$$m=n-1;\quad \lambda_k = k\frac{n-1}{n},\quad k=1,2,\ldots,(n-1);\quad a_m=(-1)^n;$$

$$\sum_1^{n-1}\lambda = \frac{(n-1)^2}{2};\quad \omega=\frac{1}{n-1}\left\{\frac{(n-1)^2}{2}-(n-1)(n-1-h)\right\} = h-\frac{n-1}{2}.$$

b) Soll der Ausdruck 52) die Entwickelung des Integrals 38) sein, so muss

$$m=n;\quad \lambda_k=(k-2)\frac{n}{n-1}+2,\quad k=1,2,\ldots,(n-1);\quad \lambda_n=2;$$

$$a_m=(-1)^n;\quad \sum_1^n\lambda=\frac{n^2}{2};\quad \omega=\frac{1}{n}\left\{\frac{n^2}{2}-n(n-h)\right\}=h-\frac{n}{2}.$$

Es möge nun zunächst die Reihe für X_h auf ihre Convergenz geprüft werden. Ein allgemeines Glied, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, lautet

$$U_\sigma = P_{h+\sigma m}\frac{x^{h+\sigma m+1}}{(h+\sigma m+1)!},$$

sonach ist

$$\frac{U_{\sigma+1}}{U_\sigma} = \frac{P_{\tau+m}}{P_\tau}\,\frac{(\tau+1)!}{(\tau+m+1)!}\,x^m,\quad \text{wenn } \tau = h+\sigma m.$$

Berücksichtigt man, dass aus 53)

54) $$P_{\tau+m} = (\tau+\lambda_1)\ldots(\tau+\lambda_m).P_\tau$$

folgt, so hat man

$$\frac{U_{\sigma+1}}{U_\sigma} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{k=m}(\tau+\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{m}(\tau+k+1)}\,x^m,$$

und weil hier τ mit σ ins Unendliche wächst, so ist

$$\operatorname*{Lim}_{\sigma=\infty}\frac{U_{\sigma+1}}{U_\sigma} = x^m.$$

Die Reihe für X_h convergirt also, wenn $x^m<1$, und da dies unabhängig von h geschieht, so convergirt unter dieser Bedingung das gesammte Reihenaggregat in 52).

Ist $x^m=1$, so bilde man

$$\sigma\left\{1-\frac{U_{\sigma+1}}{U_\sigma}\right\} = \frac{\prod\limits_1^m(\tau+k+1)-\prod\limits_1^m(\tau+\lambda_k)}{\prod\limits_1^m(\tau+k+1)}\cdot\sigma,$$

dann ergiebt sich

$$\lim_{\sigma=\infty} \sigma\left\{1-\frac{U_{\sigma+1}}{U_\sigma}\right\}=\frac{(2+3+\ldots+(m+1))-(\lambda_1+\ldots+\lambda_m)}{m}.$$

Da die in Betracht kommenden Fälle a) und b) das Gemeinsame haben, dass $\sum_1^m \lambda = \frac{m^2}{2}$, so liefert der letzte Grenzwerth den von h unabhängigen Bruch $\frac{3}{2}$; d. h. aber, das gesammte Reihenaggregat in 52) convergirt, auf die Fälle a) und b) angewendet, auch wenn $x^m = 1$.

a') Soll der Ausdruck 52) die Lösung der Gleichung

1) $$y^n - ny - (n-1)x = 0$$

darstellen, so sind die besonderen, unter a) aufgestellten Werthe in 52) einzuführen und die Constanten E so zu bestimmen, dass für $x=0$

55) $$(y_r^{(h+1)})_0 = E_h P_h.$$

Man hat zu unterscheiden, ob aus

$$y^n - ny = 0$$

$y=0$ oder $y=\sqrt[n-1]{n}$ gefolgert wird.

α) Im ersten Falle verschwinden alle Ableitungen mit Ausnahme von $(y')_0 = -\frac{n-1}{n}$ (vergl. Nr. 25), folglich verschwinden auch alle Constanten E mit Ausnahme von $E_0 = (y')_0 : P_0$; die Constante c, welche durch die unbestimmte Integration in 52) eingegangen ist, hat den Werth Null. Im vorliegenden Falle lautet daher die Reihe

$$y=\frac{(y')_0}{P_0}\left\{P_0\frac{x}{1!}+(-1)^{n-1}P_{n-1}\frac{x^n}{n!}+P_{2(n-1)}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right\}.$$

Setzt man

$$P_{n-1}=p_{n-1}P_0,\quad P_{2(n-1)}=p_{2(n-1)}P_0,\quad \ldots,\quad P_{\sigma(n-1)}=p_{\sigma(n-1)}P_0,$$

so sind die p eindeutige Producte, welche sich durch successive Anwendung der Formel

54a) $$P_{\tau+n-1}=(\tau+\lambda_1)\ldots(\tau+\lambda_{n-1})P_\tau$$

ergeben. Hiernach ist

56) $$\begin{cases} p_{n-1}=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}=\prod_1^{n-1}\lambda_k, \quad p_{2(n-1)}=\prod_1^{n-1}\lambda_k\cdot\prod_1^{n-1}(n-1+\lambda_k),\\ \ldots p_{\sigma(n-1)}=\prod_1^{n-1}\lambda_k\cdot\prod_1^{n-1}(n-1+\lambda_k)\ldots\prod_1^{n-1}((\sigma-1)(n-1)+\lambda_k).\end{cases}$$

Da $(y')_0$ einen eindeutigen Werth besitzt, so findet man also für y folgende eindeutige Reihe:

52)
$$y = -\frac{n-1}{n}\left\{\frac{x}{1!} + (-1)^{n-1} p_{n-1}\frac{x^n}{n!} + p_{2(n-1)}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + (-1)^{\sigma(n-1)} p_{\sigma(n-1)} \frac{x^{\sigma(n-1)+1}}{(\sigma(n-1)+1)!} + \dots \right\},$$
$$x^{n-1} \leqq 1,$$

und diese stellt eine Wurzel der Gleichung 1) dar.

Zu eben demselben Resultat gelangt man durch Entwickelung des Integrals 35).

β) Im zweiten Falle hat man

$$E_h = (y^{(h+1)})_0 : P_h,$$

während c die Werthe $\sqrt[n-1]{n}$ erlangt; sonach lautet das Reihenaggregat

58)
$$y = \sum_{h=0}^{h=n-2} (y^{(h+1)})_0 \frac{X_h}{P_h} + \sqrt[n-1]{n}.$$

Setzt man

$$P_{h+n-1} = p_{h+n-1} P_h, \; \dots, \quad P_{h+\sigma(n-1)} = p_{h+\sigma(n-1)} P_h,$$

so ist

59)
$$\frac{X_h}{P_h} = \left\{\frac{x^{h+1}}{(h+1)!} + (-1)^{n-1} p_{h+n-1}\frac{x^{h+n}}{(h+n)!} + p_{h+2(n-1)}\frac{x^{h+2n-1}}{(h+2n-1)!} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + (-1)^{\sigma(n-1)} p_{h+\sigma(n-1)} \frac{x^{h+\sigma(n-1)+1}}{(h+\sigma(n-1)+1)!} + \dots \right\},$$
$$x^{n-1} \leqq 1,$$

und die p sind wieder eindeutige Producte, welche successive nach Formel 54a) berechnet werden können. Hiernach ist

60)
$$\left\{\begin{array}{l} p_{h+n-1} = (h+\lambda_1)(h+\lambda_2)\dots(h+\lambda_{n-1}) = \prod_{k=1}^{k=n-1}(h+\lambda_k), \dots, \\ p_{h+\sigma(n-1)} = \prod_1^{n-1}(h+\lambda_k)\cdot\prod_1^{n-1}(h+n-1+\lambda_k)\dots\prod_1^{n-1}(h+(\sigma-1)(n-1)+\lambda_k). \\ \lambda_k = k\frac{n-1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1). \end{array}\right.$$

Der Werth für $(y^{(h+1)})_0$ ist unter Nr. 24), § 2 entwickelt worden und war

61)
$$(y^{(h+1)})_0 = q_{h+1}\, n^{1-\frac{h}{n-1}},$$

wenn q_{h+1} die eindeutige Grösse

62)
$$\left\{\begin{array}{l} q_{h+1} = (-1)^h (h+(n-1))(h+2(n-1))\dots(h+h(n-1))\, n^{-(h+2)}; \\ q_1 = \frac{1}{n^2} \end{array}\right.$$

bedeutet. Setzt man

$$q_{h+1}\frac{X_h}{P_h} = U_h,$$

wo nun U_h eine eindeutige Grösse ist, so entsteht aus 58)

63) $$y=\sum_{h=0}^{h=n-2} U_h g^{n-h-1}+g,$$

und hier darf für g jede Wurzel der Gleichung

$$g^{n-1}-n=0$$

gewählt werden. Das Reihenaggregat*

64) $$\begin{cases} y=U_0 g^{n-1}+U_1 g^{n-2}+\ldots+U_{n-3}g^2+U_{n-2}g+g, \\ U_h=q_{h+1}\left\{\dfrac{x^{h+1}}{(h+1)!}+(-1)^{n-1}p_{h+n-1}\dfrac{x^{h+n}}{(h+n)!}+\ldots\right\}, \quad x^{n-1}\leqq 1 \end{cases}$$

stellt also die noch fehlenden $(n-1)$ Wurzeln der Gleichung

1) $$y^n-ny-(n-1)x=0$$

dar. Die durch 57) gegebene Wurzel ist immer reell; 64) giebt eine oder zwei reelle Wurzeln, je nachdem n gerade oder ungerade ist; alle übrigen Wurzeln sind complex, wenn x reell gedacht wird.

Zu dem unter 64) aufgestellten Resultate gelangt man auch durch directe Entwickelung des Integrals 34).

Es sei bemerkt, dass die Ausdrücke 57) und 64) auch für die $n=2$ gelten und demgemäss die binomischen Entwickelungen von

$$1-(1+x)^{1/2}, \text{ resp. } 1+(1+x)^{1/2}, \quad x\leqq 1$$

darstellen.

Für $n=5$ erhält man als Wurzeln der Gleichung

$$y^5-5y-4x=0:$$

$$y=-\frac{4}{5}\left\{\frac{x}{1!}+p_4\frac{x^5}{5!}+p_8\frac{x^9}{9!}+p_{12}\frac{x^{13}}{13!}+\ldots\right\}, \quad x^4\leqq 1$$

und

$$y=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{x}{1!}+p_4\dfrac{x^5}{5!}+p_8\dfrac{x^9}{9!}+\ldots\right) \\ -\dfrac{1}{5^2}\left(\dfrac{x^2}{2!}+p_5\dfrac{x^6}{6!}+p_9\dfrac{x^{10}}{10!}+\ldots\right)\sqrt[4]{5^3} \\ +\dfrac{2.6}{5^3}\left(\dfrac{x^3}{3!}+p_6\dfrac{x^7}{7!}+p_{10}\dfrac{x^{11}}{11!}+\ldots\right)\sqrt[4]{5^2} \\ -\dfrac{3.7.4}{5^4}\left(\dfrac{x^4}{4!}+p_7\dfrac{x^8}{8!}+p_{11}\dfrac{x^{12}}{12!}+\ldots\right)\sqrt[4]{5} \end{array}\right\}+\sqrt[4]{5}; \quad x^4\leqq 1.$$

Hierbei ist

* U_h kann natürlich nach dem Früheren durch ein bestimmtes Integral dargestellt werden. Der Ausdruck 64) fällt zusammen mit dem von Bézout im Jahre 1765 aufgestellten; Bézout konnte naturgemäss die U auf algebraischem Wege nicht bestimmen, sobald $n>4$. — Vergl. Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra. § 37, S. 83.

$p_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = \Pi(\lambda);$
$p_8 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 (4+\lambda_1)(4+\lambda_2)(4+\lambda_3)(4+\lambda_4) = \Pi(\lambda)\,\Pi(4+\lambda);$
$p_{12} = \Pi(\lambda)\,\Pi(4+\lambda)\,\Pi(8+\lambda),$
. . . . ;

$p_5 = \Pi(1+\lambda),$	$p_6 = \Pi(2+\lambda),$	$p_7 = \Pi(3+\lambda),$
$p_9 = \Pi(1+\lambda)\,\Pi(5+\lambda),$	$p_{10} = \Pi(2+\lambda)\,\Pi(6+\lambda),$	$p_{11} = \Pi(3+\lambda)\,\Pi(7+\lambda).$
. . . .	. . . .	. . . .

$$\lambda_1 = 1.\tfrac{4}{5}, \quad \lambda_2 = 2.\tfrac{4}{5}, \quad \lambda_3 = 3.\tfrac{4}{5}, \quad \lambda_4 = 4.\tfrac{4}{5}.$$

b′) Soll der Ausdruck 52) die Lösungen der Gleichung

2) $$\eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0$$

darstellen, so sind die besonderen unter b) stehenden Werthe in 52) einzuführen, $x = \xi$, $y = \eta$ zu setzen und die Constanten E so zu bestimmen, dass für $\xi = 0$

65) $$(\eta_r^{(h+1)})_0 = E_h P_h,$$

während die Constante der unbestimmten Integration den Werth

$$c = \sqrt[n]{n-1}$$

erlangt. Die Reihenentwickelung lautet jetzt

66) $$\eta = \sum_{h=0}^{h=n-1} (\eta^{(h+1)})_0 \frac{X_h}{P_h} + \sqrt[n]{n-1},$$

$$\frac{X_h}{P_h} = \frac{\xi^{h+1}}{(h+1)!} + (-1)^{n-1} p_{h+n} \frac{\xi^{h+n+1}}{(h+n+1)!} + p_{h+2n} \frac{\xi^{h+2n+1}}{(h+2n+1)!} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{\sigma(n-1)} p_{h+\sigma n} \frac{\xi^{h+\sigma n+1}}{(h+\sigma n+1)!} + \cdots, \quad \xi^n \leqq 1.$$

Die p sind analog dem Früheren bestimmt durch

$$P_{h+n} = p_{h+n} P_h, \quad \ldots, \quad P_{h+\sigma n} = p_{h+\sigma n} P_h$$

und ergeben sich bei Anwendung von

54 b) $$P_{\tau+n} = (\tau+\lambda_1)\ldots(\tau+\lambda_n) P_\tau$$

als eindeutige Producte, nämlich

67) $$\begin{cases} p_{h+n} = (h+\lambda_1)(h+\lambda_2)\ldots(h+\lambda_n) = \prod_{k=1}^{k=n} (h+\lambda_k), \quad \ldots, \\ p_{h+\sigma n} = \prod_1^n (h+\lambda_k) . \prod_1^n (h+n+\lambda_k) \ldots \prod_1^n (h+(\sigma-1)n+\lambda_k), \\ \lambda_k = (k-2)\frac{n}{n-1} + 2; \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1); \quad \lambda_n = 2. \end{cases}$$

Der Werth von $(\eta^{(h+1)})_0$ ist unter Nr. 41, § 3 entwickelt worden und war

68) $$(\eta^{(h+1)})_0 = q_{h+1} (n-1)^{\frac{h+2}{n}},$$

wenn q_{h+1} die eindeutige Grösse

69) $$q_{h+1} = (h+2-n)(h+2-2n)\dots(h+2-hn)(n-1)^{-(h+1)},$$
$$q_1 = \frac{1}{n-1}, \quad q_{n-1} = 0$$

vorstellt. Setzt man
$$q_{h+1}\frac{X_h}{p_h} = U_h,$$

wo nun U_h eindeutig und U_{n-2} gleich Null, so entsteht aus 66)

70) $$\eta = \sum_{h=0}^{h=n-1} U_h g^{h+2} + g,$$

und hier darf für g jede Wurzel der Gleichung
$$g^n - (n-1) = 0$$
gewählt werden.

Das Reihenaggregat

71) $$\begin{cases} \eta = U_0 g^2 + U_1 g^3 + \dots + U_{n-3} g^{n-1} + U_{n-1} g^{n+1} + g, \\ U_h = q_{h+1} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} (-1)^{\sigma(n-1)} p_{h+\sigma n} \frac{\xi^{h+\sigma n+1}}{(h+\sigma n+1)!}, \quad p_h = 1; \quad \xi^n \leqq 1 \end{cases}$$

stellt daher sämmtliche Wurzeln der Gleichung

2) $$\eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0$$

dar. Von diesen Wurzeln sind eine oder zwei reell, je nachdem n ungerade oder gerade ist, wenn ξ als reell gilt.*

Zu dem unter 71) aufgestellten Resultat gelangt man auch durch directe Entwickelung des Integrals 49).

Sollte $\xi^n > 1$ sein, so sind die Reihen 57) und 64) brauchbar, für welche dann sicher $x^{n-1} < 1$, und umgekehrt ist die Reihe 71) convergent, wenn jene divergiren.

Für $n = 2$ ist die Reihenentwickelung 71), vergl. § 2, nicht giltig. Wenn man indessen die Reihe nochmals nach ξ integrirt und $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ wählt, so dass also das Integral 49), aus welchem sie entspringt, im Wesentlichen ungeändert bleibt, dann ergiebt sich, weil für
$$\xi = 0; \quad \eta = \pm 1, \quad \eta' = +1, \quad \eta'' = \pm 1, \quad \eta''' = 0; \quad U_1 = 0,$$
$$\eta = \pm U_0 + \xi \pm 1:$$
$$U_0 = \frac{\xi^2}{2!} - 1.3\frac{\xi^4}{4!} + 1.3.3.5\frac{\xi^6}{6!} - 1.3.3.5.5.7\frac{\xi^7}{7!} + \dots,$$

und das stimmt mit der binomischen Entwickelung von
$$\eta = \xi \pm (1+\xi^2)^{1/2}, \quad \xi^2 \leqq 1$$
überein.

Für $n = 5$ erhält man als Wurzeln der Gleichung
$$\eta^5 - 5\xi\eta - 4 = 0:$$

---

* Eine Ausnahme findet statt, wenn $\xi = +1$; dann hat die Gleichung 2) bei ungeradem n drei reelle Wurzeln, worunter die Doppelwurzel $\eta = -1$. Vergl. die Anmerkung am Schlusse.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}\left(\frac{\xi}{1!}+p_5\frac{\xi^6}{6!}+p_{10}\frac{\xi^{11}}{11!}+\cdots\right)\sqrt[5]{4^2} \\ -\frac{2}{4^2}\left(\frac{\xi^2}{2!}+p_6\frac{\xi^7}{7!}+p_{11}\frac{\xi^{12}}{12!}+\cdots\right)\sqrt[5]{4^3} \\ +\frac{1.6}{4^3}\left(\frac{\xi^3}{3!}+p_7\frac{\xi^8}{8!}+p_{12}\frac{\xi^{13}}{13!}+\cdots\right)\sqrt[5]{4^4} \\ -\frac{4.9.14}{4^5}\left(\frac{\xi^5}{5!}+p_9\frac{\xi^{10}}{10!}+p_{14}\frac{\xi^{15}}{15!}+\cdots\right)\sqrt[5]{4^6} \end{array}\right\}+\sqrt[5]{4};\quad \xi^5\leq 1.$$

Hierbei ist

$$\begin{array}{ll} p_5=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5=\Pi(\lambda); & p_{10}=\Pi(\lambda)\quad .\Pi(5+\lambda);\ \ldots; \\ p_6=\Pi(1+\lambda); & p_{11}=\Pi(1+\lambda).\Pi(6+\lambda);\ \ldots; \\ p_7=\Pi(2+\lambda); & p_{12}=\Pi(2+\lambda).\Pi(7+\lambda);\ \ldots; \\ p_9=\Pi(4+\lambda); & p_{14}=\Pi(4+\lambda).\Pi(9+\lambda);\ \ldots; \end{array}$$

$$\lambda_1=-\tfrac{5}{4}+2,\quad \lambda_2=0.\tfrac{5}{4}+2,\quad \lambda_3=\tfrac{5}{4}+2,\quad \lambda_4=2.\tfrac{5}{4}+2,\quad \lambda_5=2.$$

Anmerkung. Ist in Gleichung

1) $$y^n-ny-(n-1)x=0$$

$x^{n-1}=1$, so kann dieselbe folgendermassen geschrieben werden:

a) $$\left\{y^n+x^n-n(y+x)\right\}_{x=\sqrt[n-1]{1}}=0,$$

und diese besitzt bei ungeradem n offenbar die Doppelwurzel $y=-x$, denn für diesen Werth verschwindet die Derivirte

$$y^{n-1}-1.$$

Wird für x die reelle Wurzel $+1$ gewählt und aus Gleichung a) $(y+1)$ und nochmals $(y+1)$ ausgeschieden, so entsteht

a′) $$\begin{cases} y^{n-1}-y^{n-2}+y^{n-3}-\ldots+y^2-y+1-n=0, \\ y^{n-2}-2y^{n-3}+3y^{n-4}-\ldots-(n-3)y^2+(n-2)y-(n-1)=0. \end{cases}$$

Wird hingegen für x die reelle Wurzel -1 gewählt, so hat man nach Ausscheidung von $(y-1)$, resp. $(y-1)^2$

a″) $$\begin{cases} y^{n-1}+y^{n-2}+y^{n-3}+\ldots+y^2+y+1-n=0, \\ y^{n-2}+2y^{n-3}+3y^{n-4}+\ldots+(n-3)y^2+(n-2)y+(n-1)=0 \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind auch als gelöst zu betrachten und zwar durch das Integral 34) oder durch die Reihe 57) für $x=\pm 1$.

Die zweite Gleichung jeder Gruppe, die übrigens von einander nicht wesentlich verschieden sind, besitzt nur eine reelle Wurzel, die übrigen Wurzeln sind complex.

Ist $x^{n-1}=-1$, so kann die Gleichung 1) folgendermassen geschrieben werden:

$$\left\{y^n-x^n-n(y+x)\right\}_{x=\sqrt[n-1]{-1}}=0,$$

und diese Gleichung besitzt bei geradem n die Doppelwurzel $y=-x$. Wählt man für x die reelle Wurzel -1, so entstehen nach Ausscheidung

von $(y-1)$, resp. $(y-1)^2$ die unter α'') aufgestellten Gleichungen (für ein gerades n). Die zweite Gleichung dieser Gruppe hat aber jetzt nur complexe Wurzeln, und diese sind sämmtlich enthalten in den Ausdrücken 34) und 57) für $x=-1$.

Ist in Gleichung

2) $$\eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0$$

$\xi^n = 1$, so kann dieselbe folgendermassen geschrieben werden:

$$\left\{(\xi\eta)^n + 1 - n(\xi\eta+1)\right\}_{\xi=\sqrt[n]{1}} = 0,$$

und diese besitzt bei **ungeradem** n die Doppelwurzel $\eta = -\frac{1}{\xi}$, weil für diesen Werth auch

$$(\xi\eta)^{n-1} - 1 = 0.$$

Wählt man für ξ die reelle Wurzel $+1$, so erhält man nach Ausscheidung von $(\eta+1)$, resp. $(\eta+1)^2$ zwei Gleichungen, wie in α'). Die Gruppe α') kann daher auch mittelst des Integrals 49) oder der Reihe 71) für $\xi=1$ aufgelöst werden und man erkennt, dass die Gleichung 2) im Falle eines ungeraden n und für $\xi=1$ ausnahmsweise drei reelle Wurzeln besitzt, nämlich die Doppelwurzel $\eta=-1$ und eine dritte reelle, welche in der zweiten Gleichung der Gruppe α') enthalten ist.

Ist endlich $\xi^n=-1$, so kann der Gleichung 2) folgende Form ertheilt werden:

$$\left\{(\xi\eta)^n - 1 + n(\xi\eta+1)\right\}_{\xi=\sqrt[n]{-1}} = 0,$$

und diese besitzt bei **geradem** n die Doppelwurzel $\eta = -\frac{1}{\xi}$, weil für diesen Werth

$$(\xi\eta)^{n-1} + 1 = 0.$$

Da ξ jetzt imaginär ist, so kann eine Factorenzerlegung der Gleichung 2) in reeller Form nicht stattfinden

§ 5.

Integration der Gleichung

72) $$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + \sum_{i=m}^{i=0} a_i \frac{d^i y}{d(lx)^i} = 0.$$

A. In § 2 wurde das Integral der Gleichung 16), welche ein Specialfall obiger Gleichung ist, ohne Beweis angegeben; es möge daher nachträglich eine Herleitung des Integrals der Gleichung 72) folgen. — Dieser Gleichung genügt partikulär

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^\nu}{\nu}} u^{\lambda-1} f(ux)\, du, \quad (\lambda > 0),$$

wenn $f(ux) = z$ ein partikuläres Integral der Gleichung

a) $$\frac{d^\nu z}{dx^\nu} + \sum_{i=m-1}^{i=0} b_i \frac{d^i z}{d(lx)^i} = 0$$

ist und wenn die Zahlen b und λ in gewisser Weise von den Zahlen a abhängen. Denn bildet man

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \int_0^\infty e^{-\frac{u^\nu}{\nu}} u^{\lambda-1} \{(ux) f^{(\nu+1)}(ux) + \lambda f^{(\nu)}(ux)\} du,$$

$$\frac{dy}{d(lx)} = \int_0^\infty e^{-\frac{u^\nu}{\nu}} u^{\lambda-1} \frac{df(ux)}{dl(ux)} du, \quad \ldots, \quad \frac{d^m y}{d(lx)^m} = \int_0^\infty e^{-\frac{u^\nu}{\nu}} u^{\lambda-1} \frac{d^m f(ux)}{d(lux)^m} du$$

und substituirt dies in Gleichung 72), so entsteht auf der linken Seite

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^\nu}{\nu}} u^{\lambda-1} \left\{(ux) f^{(\nu+1)}(ux) + \lambda f^{(\nu)}(ux) + a_m \frac{d^m f(ux)}{dl(ux)^m} + \ldots + a_0 f(ux)\right\} du,$$

und das wird zu Null, wenn $f = z$ eine solche Function von x vorstellt, dass

$$K = x z^{(\nu+1)} + \lambda z^{(\nu)} + \sum_{i=m}^{i=0} a_i \frac{d^i z}{d(lx)^i} = 0.$$

Nun verschwindet aber wegen a) sicher folgender Ausdruck:

$$\frac{d}{dx}\left\{x^\lambda \left[\frac{d^\nu z}{dx^\nu} + \sum_{i=m-1}^{i=0} b_i \frac{d^i z}{d(lx)^i}\right]\right\},$$

d. h., es ist

$$\left[x z^{(\nu+1)} + b_{m-1} \frac{d^m z}{d(lx)^m} + \ldots + b_0 \frac{dz}{d(lx)}\right]$$
$$+ \lambda \left[z^{(\nu)} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} z}{d(lx)^{m-1}} + \ldots + b_0 z\right] = 0,$$

und dieses wird identisch mit K sein, wenn zwischen den Zahlen a, b und λ Beziehungen stattfinden, die dadurch ausgedrückt werden können, dass man nachstehende Identität festsetzt:

$$a_m \mu^m - a_{m-1} \mu^{m-1} + \ldots \pm a_1 \mu \mp a_0$$
$$= (b_{m-1} \mu^{m-1} - b_{m-2} \mu^{m-2} + \ldots \mp b_1 \mu \pm b_0)(\mu - \lambda),$$

d. h.

$$a_i = \lambda b_i + b_{i-1}.$$

Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Um das Integral der Gleichung 72) explicite aufschreiben zu können, gehe man von dem Falle $m = 1$ aus. Der Gleichung

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + b_1 \frac{dy}{dlx} + b_0 y = 0$$

genügt nach Laplace

$$y=\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^\nu}{\nu}} u_1^{\lambda_1-1} e^{\varepsilon u_1 x} du_1. \quad (\lambda_1 > 0),$$

wobei

$$b_1\lambda_1 - b_0 = 0$$

und ε eine Wurzel. von

$$\varepsilon^\nu + b_1 = 0$$

ist. Mithin genügt der Gleichung 72) partikulär folgendes m-fache Integral:

$$y=\int_0^\infty e^{-\frac{u^\nu}{\nu}} u^{\lambda-1} du . m-1 \int_0^\infty e^{-\frac{u_1^\nu+\ldots+u_{m-1}^\nu}{\nu}} u_1^{\lambda_1-1}\ldots u_{m-1}^{\lambda_{m-1}-1} e^{\varepsilon u_1 u_2 \ldots u_{m-1} u x},$$

wobei $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ die Wurzeln von

$$a_m \mu^m - a_{m-1}\mu^{m-1} + \ldots \pm a_1\mu \mp a_0 = 0$$

bedeuten und ε eine Wurzel der Gleichung

$$\varepsilon^\nu + a_m = 0$$

vorstellt. Da die letzte Gleichung ν von einander verschiedene Wurzeln besitzt, so kann man ν von einander wesentlich verschiedene partikuläre Integrale angeben, und man gelangt (bei geringer Abänderung der Bezeichnung) zu folgendem Schlussresultat:

Der Differentialgleichung

$$72)\qquad \frac{d^\nu y}{dx^\nu} + \sum_{i=m}^{i=0} a_i \frac{d^i y}{d(lx)^i} = 0$$

genügt als vollständiges Integral

$$73)\qquad y = {}_m\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^\nu+\ldots+u_m^\nu}{\nu}} u_1^{\lambda_1-1} u_2^{\lambda_2-1}\ldots u_m^{\lambda_m-1} \sum_{k=1}^{k=\nu} C_k e^{\varepsilon_k u_1 u_2 \ldots u_m x} du_1\, du_2 \ldots du_m,$$

$$(\nu > m).$$

Hier bedeuten $C_1 \ldots C_\nu$ willkürliche Constante, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu$ sind die Wurzeln von

$$\varepsilon^\nu + a_m = 0,$$

$\lambda_1 \ldots \lambda_m$ sind die Wurzeln von

$$a_m\lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots \pm a_1\lambda \mp a_0 = 0,$$

und diese müssen als positiv vorausgesetzt werden.

Zusatz 1. Ein Ausdruck von der Form

$$\sum_{i=m}^{i=0} a_i \frac{d^i y}{d(lx)^i}$$

lässt sich folgendermassen schreiben:

$$\sum_{i=m}^{i=0} c_i x^i \frac{d^i y}{dx^i},$$

wenn zwischen den Coefficienten a und c Beziehungen bestehen, die durch die Identität

$$a_m \lambda^m - a_{m-1} \lambda^{m-1} + \ldots \pm a_1 \lambda \mp a_0$$
$$= \frac{1}{(\lambda-1)!} \{ c_m (\lambda+m-1)! - c_{m-1}(\lambda+m-2)! + \ldots \pm c_1 \lambda! \mp c_0 (\lambda-1)! \}$$

gegeben sind.*

Es besitzt daher die Differentialgleichung**

74) $$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + \sum_{i=m}^{i=0} c_i x^i \frac{d^i y}{dx^i}$$

den Ausdruck 73) zum Integral, wenn die λ der vorigen algebraischen Gleichung entnommen werden und wenn

$$\varepsilon^\nu + c_m = 0.$$

Zusatz 2. Differenzirt man die Differentialgleichung 72) oder 74) h-mal nach x und setzt $y^{(h)} = z$, so gewinnt man eine Gleichung der ursprünglichen Form, nur sind sämmtliche λ um die positive ganze Zahl h gewachsen. Diese Eigenschaft theilt die Gleichung mit der oft discutirten

$$a_m x^m y^{(m)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

und es bedarf daher die Behauptung keines Beweises. Man zieht aus dieser Bemerkung Vortheil, wenn das Integral 73) zufolge negativer λ (oder solcher λ, deren reelle Bestandtheile negativ sind) seine Bedeutung verliert. Ist λ_k von allen negativen λ das absolut grösste, so wähle man h so gross, dass

$$\lambda_k + h > 0;$$

das ursprüngliche y ergiebt sich schliesslich mittelst unbestimmter Integration

$$y = {}_h\!\int z \, dx^h.$$

---

* Man erkennt dies am einfachsten in folgender Weise. Der Differentialgleichung

$$c_m x^m y^{(m)} + \ldots + c_1 x y' + c_0 y = 0$$

genügt das Integral

$$y = C_1 x^{-\lambda_1} + \ldots + C_m x^{-\lambda_m},$$

wenn die λ berechnet werden aus

$$\frac{1}{(\lambda-1)!} \{ c_m (\lambda+m-1)! - \ldots \mp c_0 (\lambda-1)! \} = 0.$$

Setzt man $x = e^u$, so lautet das letzte Integral

$$y = C_1 e^{-\lambda_1 u} + \ldots + C_m e^{-\lambda_m u},$$

und dieses genügt einer Gleichung mit constantem Coefficienten

$$a_m \frac{d^m y}{du^m} + \ldots + a_1 \frac{dy}{du} + a_0 y = 0,$$

wo die λ zu berechnen sind aus

$$a_m \lambda^m - \ldots \pm a_1 \lambda \mp a_0 = 0.$$

Weil nun $u = lx$, so besteht thatsächlich der obenerwähnte Zusammenhang.

** Gleichungen der Form 74) hat meines Wissens zuerst S. Spitzer in Wien integrirt. Man vergl. dessen „Studien“.

Zusatz 3. Die Differentialgleichung

$$\text{75)} \qquad \frac{d^\nu y}{dx^\nu} + x^p \sum_{i=m}^{i=0} a_i \frac{d^i y}{d(lx)^i} = 0$$

kann, wenn p eine ganze positive Zahl bedeutet, durch p-fache Differentiation von der Potenz x^p befreit werden; sie steigt zwar zur $(\nu+p)^{\text{ten}}$ Ordnung auf, erlangt aber die Form der Gleichung 72) und kann sonach integrirt werden. Die $(\nu+p)$ Constanten des Integrals sind an p lineare Bedingungen gebunden, so dass, wie nothwendig, nur ν Constanten willkürlich bleiben. Diese Bedingungen erhält man, wenn man beachtet, dass für $x=0$

$$y^{(\nu+k)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, (p-1),$$

und sie lauten

$$C_1 \varepsilon_1^{\nu+k} + C_2 \varepsilon_2^{\nu+k} + \dots + C_{\nu+p} \varepsilon_{\nu+p}^{\nu+k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, (p-1),$$
$$\varepsilon^{\nu+p} + a_m = 0.$$

Differenzirt man die Gleichung 75) zunächst einmal, so entsteht

$$\text{7)} \qquad \frac{d^{\nu+1} y}{dx^{\nu+1}} + x^{p-1} \sum_{i=m+1}^{i=0} b_i \frac{d^i y}{d(lx)^i} = 0,$$

wobei

$$b_i = p a_i + a_{i-1}.$$

Dieser Coefficientenzusammenhang zeigt, dass die zu 76) gehörige algebraische Gleichung

$$b_{m+1} \lambda^{m+1} - b_m \lambda^m + \dots \mp b_1 \lambda \pm b_0 = 0$$

sich von der zu 75) gehörigen Gleichung

$$a_m \lambda^m - \dots \pm a_1 \lambda \mp a_0 = 0$$

nur dadurch unterscheidet, dass sie die eine Wurzel

$$\lambda_{m+1} = p$$

mehr besitzt. — Wird daher der Differentiationsprocess p-mal vollzogen, so wird die algebraische Gleichung, welche zu der entstehenden Differentialgleichung $(\nu+p)^{\text{ter}}$ Ordnung gehört, ausser den Wurzeln der Gleichung

$$a_m \lambda^m - \dots \mp a_0 = 0$$

noch die p Wurzeln

$$p, \; p-1, \; \dots, \; 3, \; 2, \; 1$$

besitzen.

B. Es ist noch das Integral 73) in eine Reihe zu entwickeln. Verwandelt man die Exponentialgrösse

$$e^{\varepsilon_k u_1 u_2 \dots u_m x}$$

in eine Reihe, so findet man für ein partikuläres Integral

$$y_k = P_0 + P_1 \varepsilon_k \frac{x}{1!} + P_2 \varepsilon_k^2 \frac{x^2}{2!} + \dots,$$

wobei

$$78)\quad P_h = \int_0^{\infty} e^{-\frac{u_1^\nu + \ldots + u_m^\nu}{\nu}} u_1^{h+\lambda_1-1} \ldots u_m^{h+\lambda_m-1}\, du_1\, du_2 \ldots du_m.$$

Dieses m-fache Integral lässt sich durch Gammafunctionen auswerthen, wenn man von der Formel

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^\nu}{\nu}} u^{\varkappa-1}\, du = \nu^{\frac{\varkappa}{\nu}-1}\, \Gamma\left(\frac{\varkappa}{\nu}\right)$$

Gebrauch macht; man erhält

$$79)\quad \begin{cases} P_h = \nu^{\omega}\, \Gamma\left(\frac{\lambda_1+h}{\nu}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda_2+h}{\nu}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{\lambda_m+h}{\nu}\right), \\ \omega = \frac{1}{\nu}\{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m - m(\nu-h)\}, \end{cases}$$

und hieraus folgt noch die bemerkenswerthe Relation

$$80)\quad P_{h+\nu} = (\lambda_1+h)(\lambda_2+h)\ldots(\lambda_m+h)\, P_h.$$

Das allgemeine Integral lautet nun

$$90)\quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_\nu y_\nu.$$

Aber dieses Integral lässt noch eine Umformung zu, die für die Convergenzbetrachtung und andere analytische Fragen von Wichtigkeit ist.

Da nämlich

$$y_k = \sum_{h=0}^{h=\nu-1} P_h \varepsilon_k^h \frac{x^h}{h!} + \sum_{h=0}^{h=\nu-1} P_{h+\nu}\, \varepsilon_k^{h+\nu} \frac{x^{h+\nu}}{(h+\nu)!} + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{h=0}^{h=\nu-1} P_{h+\sigma\nu}\, \varepsilon_k^{h+\sigma\nu} \frac{x^{h+\sigma\nu}}{(h+\sigma\nu)!} + \ldots$$

und

$$\varepsilon_k^\nu = -a_m, \quad \varepsilon_k^{2\nu} = a_m^2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_k^{\sigma\nu} = (-1)^\sigma a_m^\sigma,$$

so hat man

$$91)\quad y_k = \sum_{h=0}^{h=\nu-1} \varepsilon_k^h \left\{ P_h \frac{x^h}{h!} - a_m P_{h+\nu} \frac{x^{h+\nu}}{(h+\nu)!} + a_m^2 P_{h+2\nu} \frac{x^{h+2\nu}}{(h+2\nu)!} - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^\sigma a_m^\sigma P_{h+\sigma\nu} \frac{x^{h+\sigma\nu}}{(h+\sigma\nu)!} \pm \ldots \right\}.$$

Bezeichnet man die von k unabhängige Klammergrösse der Summe mit X_h, so dass

$$92)\quad y_k = \sum_{h=0}^{h=\nu-1} \varepsilon_k^h X_h,$$

dann lautet das allgemeine Integral

$$93)\quad y = \sum_{k=1}^{k=\nu} \left\{ C_k \sum_{h=0}^{h=\nu-1} \varepsilon_k^h X_h \right\} = \sum_{h=0}^{h=\nu-1} \left\{ X_h . \sum_{k=1}^{k=\nu} C_k \varepsilon_k^h \right\}.$$

Die ν einzelnen Summen

$$\sum_{k=1}^{k=\nu} C_k \varepsilon_k^h,$$

welche sich für $h=0$ bis $h=\nu-1$ ergeben und welche vollkommen willkürliche Grössen repräsentiren, kann man durch ν neue Integrationsconstanten E_0 bis $E_{\nu-1}$ ersetzen, so dass man zu folgendem Schlussresultat gelangt:

Der Differentialgleichung

72) $$\frac{d^\nu y}{dx^\nu}+\sum_{i=m}^{i=0} a_i \frac{d^i y}{d(lx)^i}=0$$

genügt folgendes aus ν einzelnen Reihen bestehende Reihenaggregat:

94) $$\begin{cases} y=\sum_{h=0}^{h=\nu-1} E_h X_h, \quad E_h = const., \\ X_h = P_h \frac{x^h}{h!} - a_m P_{\nu+h}\frac{x^{h+\nu}}{(h+\nu)!}+\ldots+(-1)^\sigma a_m^\sigma P_{h+\sigma\nu}\frac{x^{h+\sigma\nu}}{(h+\sigma\nu)!}\pm\ldots, \end{cases}$$

wobei

80) $$P_{h+\nu}=\prod_{k=1}^{k=m}(h+\lambda_k).P_h$$

und λ_1 bis λ_m die Wurzeln von

$$a_m\lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots\pm a_1\lambda\mp a_0=0$$

bedeuten. Die Coefficienten in X_h ergeben sich als gewisse Producte, wenn man successive die Formel 80) in Anwendung bringt und schliesslich P_h in E_h eingehen lässt.

Die Reihe für X_h convergirt, wenn $\nu > m$, für jedes endliche x, und zwar unabhängig von h; eben deshalb convergirt in diesem Falle das gesammte Reihenaggregat 94). Ist $\nu=m$, so lautet die Convergenzbedingung

$$a_m x^m < 1.$$

Man vergl. die Reihenentwickelungen in § 4.

§ 6.

Entwickelung des Differentialquotienten $\frac{d^m(x^p y)}{d(x^q)^m}$.

Die Entwickelung dieses Quotienten nach logarithmischen Quotienten der Form $\frac{d^k y}{d(lx)^k}$ ist bereits in § 1 aufgeschrieben und verwendet worden, und es erübrigt noch, die Richtigkeit der dort unter Nr. 11) aufgestellten Formel nachzuweisen. Am schnellsten kommt man zum Ziele, wenn man von der fertigen Formel ausgeht und den Schluss von m auf $(m+1)$ macht. Will man indessen die Formel erst ableiten, so kann man folgenden Weg einschlagen.

Es sei für den Augenblick $x^q = u$ und $x^p y = v$, und man betrachte folgende Differentialgleichung:

a) $$\frac{d^m v}{du^m} = g,$$

worin g irgendwelche Constante ist. Diese Gleichung liefert integrirt

$$v = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + c_{m-1} u^{m-1} + g \frac{u^m}{m!}$$

oder, wenn x und y restituirt werden,

$$y = c_0 x^{-p} + c_1 x^{q-p} + c_2 x^{2q-p} + \ldots + c_{m-1} x^{(m-1)q-p} + g \frac{x^{mq-p}}{m!},$$

was auch geschrieben werden kann

$$y = c_0 e^{-p\,lx} + c_1 e^{(q-p)lx} + \ldots + c_{m-1} e^{(\overline{m-1}\,q-p)\,lx} + \frac{g}{m!} e^{(mq-p)lx}.$$

Diesen letzten Ausdruck kann man als das complete Integral einer linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit constantem Coefficienten und zweitem Theil ansehen, und diese würde lauten

b) $$\frac{d^m y}{d(lx)^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{d(lx)^{m-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{d(lx)} + a_0 y = h e^{(mq-p)lx},$$

wenn die a die Coefficienten einer algebraischen Gleichung

c) $$f(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1} \lambda^{m-1} + \ldots \pm a_1 \lambda \mp a_0 = 0$$

vorstellen, welche folgende Wurzeln besitzt:

$$\lambda_k = p - (k-1)q, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Der Ausdruck

$$\frac{g}{m!} e^{(mq-p)lx} = \frac{g}{m!} e^{-\lambda_{m+1} lx}$$

ist offenbar das Supplementintegral* der letzten Differentialgleichung, denn führt man denselben in die linke Seite dieser Gleichung ein, so entsteht

$$\frac{(-1)^m g}{m!} f(\lambda_{m+1}) e^{-\lambda_{m+1} lx} = h e^{-\lambda_{m+1} lx},$$

und dies ist identisch, wenn

$$h = (-1)^m \frac{g}{m!} f(\lambda_{m+1}).$$

Da

$$f(\lambda_{m+1}) = \prod_{k=1}^{k=m} (\lambda_{m+1} - \lambda_k) = (-1)^m q^m \prod_{k=1}^{k=m} (m+1-k) = (-1)^m q^m m!,$$

so ist einfacher

$$h = g q^m,$$

und diese Relation verbindet die Ausdrücke

a) $\dfrac{d^m (x^p y)}{d(x^q)^m} = g$ und b) $\dfrac{d^m y}{d(lx)^m} + a_{m-1} \dfrac{d^{m-1} y}{d(lx)^{m-1}} + \ldots + a_0 y = h x^{-\lambda_{m+1}}$

zu der gesuchten Formel, nämlich

* Vergl. eine Arbeit des Verfassers „Ueber Supplementintegrale", Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, 98. Bd. 3. Heft

95) $$\frac{d^m(x^p y)}{d(x^q)^m} = \frac{x^{\lambda_{m+1}}}{q^m} \sum_{i=m}^{i=0} a_i \frac{d^i y}{d(lx)^i}, \quad a_m = 1,$$

wobei die a zugleich die Coefficienten einer algebraischen Gleichung

c) $$\lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots \pm a_1 \lambda \mp a_0 = 0$$

sind, deren Wurzeln folgendermassen lauten:

$$\lambda_k = p - (k-1)q, \quad k = 1, 2, \ldots, m;$$

λ_{m+1} hat den Werth

$$p - mq.$$

Zusatz 1. Setzt man an Stelle der Zahlen p und q resp. $p-(m-1)q$ und $-q$, so geht $\lambda_k = p-(k-1)q$ über in $p-(m-k)q$, d. h. in λ_{m-k+1}; es verwandelt sich also

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \ldots \quad \lambda_{m-1} \quad \lambda_m$$

in

$$\lambda_m \quad \lambda_{m-1} \quad \ldots \quad \lambda_2 \quad \lambda_1;$$

mithin bleibt bei dieser Vertauschung die Gleichung c) ungeändert. Nimmt man diese Vertauschung auch in der [von Nr. 95) nicht verschiedenen] Formel

95α) $$\sum_{i=m}^{i=0} a_i \frac{d^i y}{d(lx)^i} = q^m x^{mq-p} \frac{d^m(x^p y)}{d(x^q)^m}$$

vor, so erhält man

95β) $$\sum_{i=m}^{i=0} a_i \frac{d^i y}{d(lx)^i} = (-1)^m q^m x^{-(p+q)} \frac{d^m(x^{p-(m-1)q} y)}{d(x^{-q})^m},$$

und weil hier die linken Seiten vollkommen übereinstimmen, so muss

96) $$\frac{d^m(x^p y)}{d(x^q)^m} = (-1)^m x^{-(m+1)q} \frac{d^m(x^{p-(m-1)q} y)}{d(x^{-q})^m}.$$

Infolge dieser Relation würde man die Gleichungen 3) und 10) des § 1 in anderer Form geben können, doch würde dieser Unterschied nach Anwendung der Formel 11), § 1 von selbst wieder verschwinden.

Setzt man in 96) $x^p y = v$, so entsteht eine Formel

97) $$\frac{d^m v}{d(x^q)^m} = (-1)^m x^{-(m+1)q} \frac{d^m(x^{-(m-1)q} v)}{d(x^{-q})^m},$$

welche einige Beachtung verdient; für $q = -1$ geht aus ihr die bekannte Formel

98) $$\frac{d^m v}{d\left(\frac{1}{x}\right)^m} = (-1)^m x^{m+1} \frac{d^m(x^{m-1} v)}{dx^m}$$

hervor.*

* Man vergl. O. Schlömilch, Vorlesungen über höhere Analysis. Die höheren Differentialquotienten. — S. Spitzer, Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen (Wien 1860), S. 65, Nr. 131).

Zusatz 2. Ein Specialfall der Identität 95a), von welchem häufig Gebrauch gemacht wird, ist folgender:

Man setze $p=0$ und $q=1$, dann entsteht

$$\sum_{i=m}^{i=0} a_i \frac{d^i y}{d(lx)^i} = x^m \frac{d^m y}{dx^m}; \quad \lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = -1, \; \lambda_3 = -2, \ldots, \lambda_m = -(m-1),$$

oder anders ausgedrückt: Es ist

$$99) \quad x^m \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^m y}{d(lx)^m} - b_{m-2} \frac{d^{m-1} y}{d(lx)^{m-1}} + \ldots \pm b_1 \frac{d^2 y}{d(lx)^2} \mp b_0 \frac{dy}{d(lx)},$$

wenn die b die Coefficienten einer Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$100) \qquad \lambda^{m-1} - b_{m-2} \lambda^{m-2} + \ldots \pm b_1 \lambda \mp b_0 = 0$$

bedeuten, deren Wurzeln

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \ldots, \quad \lambda_{m-1} = m-1$$

heissen.

IX.

Ueber eine ebene Reciprocität und ihre Anwendung auf die Curventheorie.

Von

Dr. C. Beyel

in Zürich.

Hierzu Taf. II Fig. 1–4.

1.

Satz. Seien ABC die Ecken, abc die ihnen gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks. Mit $p_a p_b p_c$ bezeichnen wir die Geraden, welche einen beliebigen Punkt in der Ebene des Dreiecks mit ABC verbinden. $P_a P_b P_c$ seien die Schnittpunkte einer durch P gehenden Geraden p mit den Seiten abc. Dann können wir beweisen, dass $(p p_a p_b p_c) = (P P_a P_b P_c)$.

Schneiden wir nämlich (Fig. 1) das Büschel $p p_a p_b p_c$ mit a und sei H der Schnittpunkt von a mit $\overline{PA}$, so gilt die Relation $(p p_a p_b p_c) \overline{\wedge} (P_a H B C)$. Letztere Gruppe projiciren wir aus A und schneiden das hierdurch erhaltene Büschel mit p. Dann ist $(P_a H B C) \overline{\wedge} (P_a P P_c P_b)$. Weil aber allgemein $(P_a P P_c P_b) = (P P_a P_b P_c)$ ist, so folgt $(p p_a p_b p_c) = (P P_a P_b P_c)$, w. z. b. w.

Es knüpft sich an diesen Satz folgende Aufgabe: Durch einen Punkt P der Ebene soll eine Gerade p gezogen werden, welche die Seiten eines Dreiecks in der Weise schneidet, dass P mit den Schnittpunkten — in vorgeschriebener Reihenfolge — ein gegebenes Doppelverhältniss Δ bildet. Um diese Aufgabe zu lösen, verbinden wir P mit den Ecken des Dreiecks. Sind diese Verbindungslinien p_a, p_b, p_c, so wird p nach der Relation $(p_c p_b p_a p) = \Delta$ gefunden. Da es nun zu den drei Geraden p_a, p_b, p_c sechs giebt, welche mit ihnen ein bestimmtes Doppelverhältniss bilden, so schliessen wir:

Durch einen Punkt P der Ebene können wir sechs Gerade ziehen, welche die Seiten eines Dreiecks so schneiden, dass die Schnittpunkte mit P ein gegebenes Doppelverhältniss bilden.

Die duale Aufgabe verlangt in einer Geraden p die Punkte, von denen aus nach den Ecken eines Dreiecks Strahlen gehen, welche mit p ein bestimmtes Doppelverhältniss bilden. Es giebt sechs solcher Punkte. Sie

bilden resp. mit den Punkten, welche p aus den Seiten des Dreiecks schneidet, das Doppelverhältniss $\varDelta$.

Eindeutig sind die erwähnten Aufgaben, wenn wir die Ecken und Seiten des Dreiecks bestimmt festsetzen und ferner die Reihenfolge angeben, in welcher die Punkte in p, resp. die Strahlen um P mit P, resp. p das Doppelverhältniss bilden sollen. Durch diese Festsetzung wird jedem Punkte P eine und nur eine Gerade p zugeordnet, für welche $(p_c\, p_b\, p_a\, p) = \varDelta$ ist. Auf jeder Geraden p liegt nur ein Punkt P, der die Bedingung $(P_c P_b P_a P) = \varDelta$ erfüllt. Es ist also auf diese Weise eine eindeutige Correspondenz zwischen den Punkten und Geraden der Ebene festgelegt. Jeder Punkt geht durch seine Gerade, jede Gerade enthält ihren Punkt. Entsprechend den Bestimmungsstücken wollen wir diese Reciprocität mit dem Symbol $(CBA, \varDelta)$ bezeichnen.

2.

Sei C_n eine Curve n^{ter} Classe in der Ebene der Reciprocität $(CBA, \varDelta)$. Wir fragen nach dem Orte der Punkte, welche den Tangenten von C_n entsprechen. Wir haben also in jeder Tangente p von C_n die Schnittpunkte $P_a P_b P_c$ mit den Seiten abc des Dreiecks ABC zu bestimmen und je einen Punkt P zu zeichnen, für den $(P_c P_b P_a P) = \varDelta$ ist. Für diese Construction geben wir eine räumliche Interpretation (Fig. 2). Wir betrachten P_c als Fusspunkt einer Normalen n_c zur Ebene der Reciprocität. In n_c bestimmen wir zwei Punkte $C_1 C_2$ in der Weise, dass $\frac{P_c C_1}{P_c C_2} = \varDelta$ ist. Weiter errichten wir in P_b eine Normale n_b zur Ebene der Reciprocität. Ziehen wir dann $\overline{C_1 P_a}$ und schneide diese Gerade aus n_b den Punkt S, so trifft SC_2 die Ebene der Reciprocität in P. Es ist nämlich $\frac{P_c P_a}{P_b P_a} = \frac{P_c C_1}{P_b S}$ und $\frac{P_c P}{P_b P} = \frac{P_c C_2}{P_b S}$; also ist $(P_c P_b P_a P) = \varDelta$. Um nun diese Construction auf allen Tangenten von C_n durchzuführen, denken wir uns in c und b die resp. Ebenen **C** und **B** bestimmt, welche zur Ebene der Reciprocität senkrecht stehen. (Fig. 3.)* Dann zeichnen wir in C zwei durch B gehende Gerade $c_1 c_2$ von der Art, dass $\frac{tg\, c c_1}{tg\, c c_2} = \varDelta$ ist. Die Tangenten von C_n betrachten wir als Spuren von Normalebenen. Diese umhüllen somit einen zur Ebene der Reciprocität senkrechten Cylinder C_{yn} der n^{ten} Classe. Jede dieser Normalebenen schneidet aus $c_1 c_2$ ein Punktepaar $C_1 C_2$ und aus a einen Punkt P_a. Ziehen wir $C_1 P_a$ und treffe diese Linie die Ebene **B** in S, so schneidet SC_2 aus der Ebene der Reciprocität einen Punkt P. Wir bemerken, dass die Gerade $\overline{SC_2}$ eine Tangente des Cylinders C'_{yn} ist. Erwägen

* Die Darstellung in Fig. 3 ist axonometrisch und a und c sind als Axen angenommen.

wir jetzt, dass alle Linien $C_1 P_a$ in der Ebene durch c_1 und a liegen, so folgt, dass alle Punkte S in der Schnittlinie s der letzteren Ebene mit der Ebene **B** gelegen sind. Also stellen uns die Linien SC_2 die Gesammtheit der Geraden vor, welche die windschiefen Geraden s, c_2 schneiden und den Cylinder C_{yn} berühren. Sie erfüllen eine Regelfläche des $2n^{ten}$ Grades R^{2n}. Eine beliebige Gerade g wird nämlich von $2n$ Geraden $\overline{SC_2}$ geschnitten. Um dies zu beweisen, construiren wir das Hyperboloid H^2, welches durch die Geraden s, c_2 und g bestimmt wird. Dieses hat mit C_{yn} $2n$ Tangentialebenen gemeinsam. Wir erhalten die letzteren, indem wir den Cylinder zweiter Classe C_{y2} zeichnen, der aus dem unendlich fernen Punkte von C_{yn} an H^2 gelegt werden kann. Die gemeinsamen Tangentialebenen zwischen C_{yn} und C_{y2} berühren auch H^2. Sie schneiden c_2 und s in Punkten, deren resp. Verbindungslinien zu den Geraden SC_2 gehören und auf H^2 liegen. Folglich müssen sie g schneiden. Also wird g von $2n$ Linien SC_2 getroffen.

Schneiden wir R^{2n} mit der Ebene der Reciprocität, so erhalten wir den Ort der Punkte P. Dieser ist also eine Curve der $2n^{ten}$ Ordnung C^{2n}_t und wir sagen:

Den Tangenten einer Curve von der n^{ten} Classe correspondiren in der Reciprocität $(CBA\Delta)$ Punkte, welche auf einer Curve der $2n^{ten}$ Ordnung liegen.

Wir können dies auch so ausdrücken:

Construiren wir zu den Punkten, in welchen die Tangenten einer Curve n^{ter} Classe die Seiten eines Dreiecks schneiden, je den Punkt, welcher mit jenen — in bestimmter Reihenfolge genommen — ein gegebenes Doppelverhältniss Δ bildet, so ist der Ort dieses Punktes eine Curve von der $2n^{ten}$ Ordnung.

3.

Die Untersuchung der Regelfläche R^{2n} giebt uns weiteren Aufschluss über den Zusammenhang der Curven C^{2n} und C_n.

c_2 und s sind n-fache Gerade von R^{2n}. Mithin sind B und C n-fache Punkte von C^{2n}.

Eine weitere n-fache Linie von R^{2n} ist die Schnittlinie der Ebenen B und C. Sie trifft die Ebene der Reciprocität in A. Also ist auch A ein n-facher Punkt von C^{2n}.

Hat C_n eine r-fache Tangente t_r, so schneidet die Ebene, welche durch t_r geht und zur Ebene der Reciprocität normal steht, c_2 und s in Punkten, deren Verbindungslinie eine r-fache Gerade von R^{2n} ist. Letztere trifft die Ebene der Reciprocität in einem r-fachen Punkte von C^{2n}. Also folgt: Auf den r-fachen Tangenten von C_n liegen r-fache Punkte von C^{2n}.

Sei g eine Gerade in der Ebene der Reciprocität, so fragen wir nach der Construction der Schnittpunkte von C^{2n} mit g. Zur Beantwortung dieser Frage zeichnen wir das Hyperboloid H^2, welches durch s, c_2 und g bestimmt ist. An dieses Hyperboloid construiren wir den Berührungscylinder C_{y2}, welcher zur Ebene der Reciprocität senkrecht steht. Er schneidet letztere in einem Kegelschnitte K_g^2. Seine gemeinsamen Tangenten mit C_n sind Spuren von Tangentialebenen, welche H^2 und C_{yn} gemeinsam sind (vergl. 2). Folglich schneiden diese Tangenten aus g die gesuchten Punkte von C^{2n}.

Zur Construction von K_g^2 bemerken wir Folgendes. Die Geraden g, a, c_2 und s liegen auf dem Hyperboloid H^2. Also sind die Ebenen, welche durch diese Geraden gehen und zur Ebene der Reciprocität senkrecht stehen, Tangentialebenen dieses Hyperboloids, welche auch den Cylinder C_{y2} berühren. Daraus folgt, dass g, a, c und b Tangenten des Kegelschnittes K_g^2 sind. Wir bestimmen diesen Kegelschnitt vollends, indem wir seinen Berührungspunkt in g zeichnen. Derselbe — G — ist Berührungspunkt der durch g gehenden Tangentialebene $\mathfrak{G}$ an H^2, welche zur Ebene der Reciprocität normal steht. Wir construiren also von $\mathfrak{G}$ die zweite Gerade h des Hyperboloids H^2. Sie schneidet g in G. Zur Durchführung dieser Construction bezeichnen wir die Schnittpunkte von $c_1 c_2$, a, b, c mit $\mathfrak{G}$ resp. durch C_1, C_2, P_a, P_b, P_c. Dann ziehen wir $C_1 P_a$. Diese Gerade trifft s im Schnittpunkte S mit der Ebene $\mathfrak{G}$. SC_2 ist die gesuchte Gerade h und trifft g in G. Wir sehen daraus, dass G mit P_a, P_b, P_c durch die Relation $(P_c P_b P_a G) = \varDelta$ verbunden ist. G ist also der correspondirende Punkt zu der Geraden g in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$. Wir können darnach die Construction der Schnittpunkte von g mit C^{2n} dahin zusammenfassen:

a, b, c, g und der entsprechende Punkt zu g in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$ bestimmen einen Kegelschnitt, dessen gemeinsame Tangenten mit C_n die Gerade g in Punkten von C^{2n} treffen.

Berührt der Kegelschnitt K_g^2 die Curve C_n, so schneidet die Tangente im Berührungspunkte aus g zwei benachbarte Punkte von C^{2n}, d. h. g ist in diesen Punkten Tangente von C^{2n}. Wir können dies dahin verallgemeinern: *Hat K_g^2 in p Punkten mit C_n eine einfache Berührung, so ist g eine p-fache Tangente an C^{2n}. Osculirt K_g^2 die Curve C_n, so ist g eine Wendetangente von C^{2n}* u. s. f.

4.

Zu jeder Geraden g der Ebene gehört ein Kegelschnitt K_g^2. Die Geraden der Ebene stehen also mit dem Netze der Kegelschnitte K_g^2 in der Beziehung einer quadratischen Transformation, welche wir der Kürze halber mit dem Symbol (K_g^2, g) bezeichnen wollen. Handelt es sich nun darum, zu einem Kegelschnitt K_g^2 die correspondirende Gerade g zu finden, so benutzen wir folgende Eigenschaft von K_g^2: Sei t eine beliebige Tangente

von K_g^2, so geht durch dieselbe eine Tangentialebene **T** an H^2. In **T** muss eine Gerade h von H^2 liegen, welche g schneidet. Sie ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte von **T** mit c_2 und s. Bezeichnen wir die Punkte, in welchen t die resp. Geraden c, b, a, g trifft, durch P_c, P_b, P_a, P, so ist P der Schnittpunkt von h mit g und seine Construction wird durch die Relation $(P_c P_b P_a P) = \varDelta$ ausgedrückt. Weil aber t eine beliebige Tangente von K_g^2 war, so schliessen wir:

Die Punkte, welche in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$ den Tangenten von K_g^2 correspondiren, liegen auf der Geraden g, welche in der quadratischen Transformation $(K_g^2 g)$ dem Kegelschnitt K_g^2 entspricht.

Nun berührt in jedem — nicht singulären — Punkte von C_n ein Kegelschnitt K_g^2 diese Curve. Ihm correspondirt in der quadratischen Transformation $(K_g^2 g)$ eine Tangente an C^{2n}. Somit erscheint C^{2n} als die Enveloppe aller der Geraden, welche in der Transformation $(K_g^2 g)$ den Kegelschnitten entsprechen, die C_n berühren.

Damit ist zugleich das Mittel gegeben, in einem — nicht singulären — Punkte P von C^{2n} die Tangente zu construiren. Wir bestimmen zu P die entsprechende Gerade p in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$. Dann zeichnen wir den Punkt P_1, in welchem p die Curve C_n berührt. Durch diesen, p, a, b, c, ist ein Kegelschnitt K_g^2 bestimmt. An ihn geht durch P eine zweite Tangente, welche C^{2n} in P berührt.

Diese Tangentenconstruction vermittelt eine eindeutige Correspondenz zwischen den Punkten von C_n und C^{2n}. Je zwei solcher Punkte liegen auf einer Tangente von C_n. Suchen wir zum Punkte P_1 von C_n den entsprechenden P von C^{2n}, so liegt P in der Tangente, welche in P_1 die Curve C_n berührt, und wird durch die Bedingung $(P_c P_b P_a P) = \varDelta$ gefunden. Den correspondirenden zu P erhalten wir aber, indem wir in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$ zu P die entsprechende Gerade p construiren. Ihr Berührungspunkt an C^{2n} ist P_1.

Ist ein in C^{2n} gelegener Punkt D zugleich Berührungspunkt der entsprechenden Geraden d an C_n, so ist D ein gemeinsamer Punkt von C^{2n} und C_n. Seine Tangente an C^{2n} fällt mit d zusammen. Wir können dies auch so ausdrücken: Correspondirt einem gemeinsamen Punkte von C_n und C^{2n} in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$ die Tangente in ihm an C_n, so berühren sich in diesem Punkte die Curven C_n und C^{2n}.

Sollen die Tangenten aus einem beliebigen Punkte X der Ebene an C^{2n} gezogen werden, so bemerken wir, dass die Kegelschnitte K_g^2, welche in der Transformation $(K_g^2 g)$ den Geraden durch X entsprechen, eine Schaar bilden; denn ausser von abc werden sie von der Geraden x berührt, welche in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$ dem Punkte X entspricht. Denjenigen unter ihnen, welche C_n berühren — es sind im Allgemeinen $n(n-1)$ — correspondiren die Tangenten durch X an C^{2n}.

5.

Indem wir jetzt das Dreieck ABC festhalten, wollen wir $\varDelta$ alle möglichen reellen Werthe geben. Zu jedem derselben gehört ein Linienpaar $c_1 c_2$ und ihm entsprechend eine Gerade s. Seien z. B. $c_2{}^*$ und s^* die Geraden, welche $\varDelta^*$ zugeordnet sind, und sei C^{2n} die Curve, welche wir oben aus C_n abgeleitet haben, so untersuchen wir jetzt die Enveloppe der Geraden, welche den Punkten von C^{2n} in der Reciprocität $(CBA\varDelta^*)$ entsprechen. Durch jeden Punkt P^* von C^{2n} geht eine Transversale t^* zu $C_2{}^*$ und s^*. Legen wir durch eine derselben eine Normalebene **P** zur Ebene der Reciprocität, so trifft **P** die resp. Geraden a, b, c in Punkten $P_a{}^*$, $P_b{}^*$, $P_c{}^*$ einer Geraden p^* und es gilt die Relation $(P_c{}^* P_b{}^* P_a{}^* P^*) = \varDelta^*$. p^* ist also die entsprechende Gerade zu P^* in der Reciprocität $(CBA\varDelta^*)$.

Nach dem Gesagten schneiden die Ebenen durch die t^*, welche zur Ebene der Reciprocität senkrecht stehen, aus dieser Ebene die Geraden p^*. Die t^* aber sind die Transversalen zu den drei Leitlinien C^{2n}, $c_2{}^*$, s^*, von denen $c_2{}^*$ und s^* mit C^{2n} je einen n-fachen Punkt gemein haben. Folglich erfüllen die t^* eine Regelfläche R^{2n*}, deren Grad gleich $2.2n - 2n = 2n$ ist. Ein Berührungscylinder an diese Fläche ist im Allgemeinen von der $2n^{\text{ten}}$ Classe. Betrachten wir speciell den Cylinder $C_{yn}{}^*$, welcher zur Ebene der Reciprocität senkrecht steht, und construiren wir an ihn die Tangentialebenen, welche durch eine Normale p gehen, so bemerken wir, dass n von diesen Ebenen in die Ebene $p^\wedge B$ und n in die Ebene $p^\wedge C$ zusammenfallen. Daraus folgt, dass die Ebenenbüschel, welche in B und C zur Ebene der Reciprocität senkrecht stehen, Theile des Cylinders $C_{yn}{}^*$ sind. Der Rest desselben ist somit ein Cylinder der n^{ten} Classe. Er schneidet die Ebene der Reciprocität in einer Curve der n^{ten} Classe $C_n{}^*$.

Zu jedem Werthe von $\varDelta$ gehört eine solche Curve der n^{ten} Classe. Aus ihr kann C^{2n} in einer Reciprocität der betrachteten Art abgeleitet werden und es gelten analoge Beziehungen zwischen $C_n{}^*$ und C^{2n}, wie diejenigen, welche wir oben zwischen C_n und C^{2n} entwickelt haben. Daraus folgt, dass alle Curven C_n die nämlichen Charaktere haben müssen.

Sei P ein Punkt von C^{2n} und p eine durch P gehende Gerade, so ist durch P und die Schnittpunkte von p mit den Seiten des Dreiecks abc das Doppelverhältniss $\varDelta$ einer Reciprocität $(CBA\varDelta)$ bestimmt. Ziehen wir dann durch die weiteren Punkte von C^{2n} diejenigen Geraden, welche diesen Punkten in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$ entsprechen, so umhüllen diese Geraden eine Curve der n^{ten} Classe. Wir können dies so ausdrücken:

Alle die Geraden, welche die Seiten des Dreiecks abc und C^{2n} in Punktegruppen von constantem Doppelverhältniss treffen, umhüllen eine Curve der n^{ten} Classe.

6.

Wir untersuchen jetzt die Enveloppe der Geraden, welche in der Reciprocität ($CBA\varDelta$) den Punkten P einer Curve n^{ter} Ordnung C^n entsprechen. Wir wenden uns damit zu einer Frage, welche der unter 2 aufgeworfenen dual gegenübersteht. Ihre Beantwortung führt zu Sätzen, welche den oben gegebenen dual sind. Wollen wir dieselben direct entwickeln, so gehen wir von einer räumlichen Darstellung des Ausdruckes $(p_c p_b p_a p) = \varDelta$ aus. Wir errichten (Fig. 4) in B und C die resp. Normalen n_b und n_c zur Ebene der Reciprocität. Auf n_c construiren wir zwei Punkte $C_1 C_2$, welche der Bedingung $CC_1 : CC_2 = \varDelta$ genügen. Dann legen wir durch C_1 und p_a eine Ebene. Sie treffe n_b in S. Durch letzteren Punkt, durch c_2 und P geht eine Ebene. Sie schneidet die Ebene der Reciprocität in der gesuchten Geraden p.

Lassen wir nun p sich auf C^n bewegen, so bilden alle Ebenen, welche durch C_1 und die Geraden p_a gehen, ein Büschel, dessen Scheitelkante $C_1 A$ — sagen wir a_1 — ist. Dieses schneidet n_b in einer Punktreihe S. Es sind also die Geraden t, welche die in den Ebenen durch a_1 liegenden Punkte P mit den resp. Punkten S verbinden, die gemeinsamen Transversalen zu a_1, n_b und C^n. Folglich erfüllen sie eine Regelfläche des $2n^{ten}$ Grades R^{2n}. Legen wir durch C_2 und die t Ebenen, so schneiden letztere die Ebene der Reciprocität in den Geraden p, welche den Punkten P in der Ebene der Reciprocität ($CBA\varDelta$) entsprechen. Diese Ebenen durch C_2 bilden den Kegel aus C_2 an R^{2n}, also einen Kegel der $2n^{ten}$ Classe. Er trifft die Ebene der Reciprocität in einer Curve der $2n^{ten}$ Classe C_{2n}. Damit sind die Sätze bewiesen, welche den in 2 hervorgehobenen dual gegenüberstehen.

Seien aus einem Punkte G der Ebene die Tangenten an C_{2n} zu construiren, so benutzen wir das Hyperboloid H^2, welches durch die windschiefen Geraden a, n_b und $\overline{GC_2}$ bestimmt wird. Dieses trifft die Ebene der Reciprocität in einem Kegelschnitte K_g^2. Sei P ein gemeinsamer Punkt von K_g^2 und C^n, so geht durch ihn eine Transversale t zu a_1 und n_b, welche sowohl auf H^2 wie auf R^{2n} liegt. Sie wird also die Gerade $\overline{GC_2}$ schneiden und mit C_2 eine Tangentialebene an R^{2n} bestimmen. Diese trifft die Ebene der Reciprocität in einer durch P und G gehenden Tangente an C_{2n}. Bemerken wir noch, dass K_g^2 durch ABC geht und in G von der Geraden g berührt wird, welche dem Punkte G in der Reciprocität ($CBA\varDelta$) entspricht, so ergeben sich Schlüsse, welche den in 3 erwähnten dual gegenüberstehen.

Die quadratische Transformation, zu der wir jetzt gelangen, ist der Art, dass jedem Punkte G ein Kegelschnitt entspricht, der durch ABC geht und in G von der Geraden g berührt wird, welche in der Reciprocität ($CBA\varDelta$) dem Punkte G correspondirt.

Geben wir $\varDelta$ alle möglichen reellen Werthe, so gehört zu jedem derselben — unter Festsetzung von C_1 — ein Punkt C_2, z. B. zu $\varDelta^*$ der Punkt C_2^*. Halten wir dann die jetzt gefundene Curve C_{2n} fest, so ist der Kegel, welcher aus C_2^* über C_{2n} construirt werden kann, von der $2n^{\text{ten}}$ Classe. Seien S^* die Schnittpunkte der Tangentialebenen dieses Kegels mit n_b, so ziehen wir die Geraden durch C_1 nach den S^*. Diese Geraden schneiden die Ebene der Reciprocität in Punkten P^*, denen in der Reciprocität $(CBA\varDelta^*)$ die Tangenten von C_{2n} entsprechen. Wir können nun beweisen, dass der Ort der Punkte P^* eine Curve von der n^{ten} Ordnung ist. Sei nämlich g eine beliebige Gerade in der Ebene der Reciprocität und schneide die Ebene durch C_1 und g aus n_b den Punkt S_g, so ziehen wir $\overline{S_g C_2}$. Diese Linie trifft die Ebene der Reciprocität in einem Punkte G, welcher in a liegt. Durch ihn gehen an C_{2n} $2n$ Tangenten. Von diesen liegen n in der Geraden a, welche für C_{2n} eine n-fache Linie ist. Die übrigen Tangenten schneiden g in n Punkten P^*. Also ist der Ort der P^* eine Curve n^{ter} Ordnung C^{n*}.

Wir schliessen aus dieser Herleitung von C^{n*}, dass zu jedem reellen Werthe von $\varDelta$ eine Curve n^{ter} Ordnung gehört, aus welcher sich C^{2n} in einer Reciprocität der betrachteten Art ableiten lässt, und bemerken, dass sich hieraus Consequenzen ergeben, welche den in 5 entwickelten dual gegenüberstehen.

7.

Das Princip der behandelten Reciprocität ist einer Erweiterung fähig. Wir gehen bei derselben von zwei Geraden a, c und einer Curve m^{ter} Ordnung B^m aus. Eine beliebige Gerade p der Ebene schneide a, c, B^m in den resp. Punkten P_a, P_c, $P_{b_1} \dots P_{b_m}$. Dann erhalten wir m Punkte $P_1 \dots P_m$ auf p durch Construction der Relationen $(P_c P_{b_1} P_a P_1) = \varDelta = .$ $= (P_c P_{b_m} P_a P_m)$. Hierdurch sind jeder Geraden p m ihrer Punkte zugeordnet. Gehen wir aber von einem Punkte P aus und suchen wir die correspondirenden Geraden, so verbinden wir P mit B, dem Schnittpunkte von a und c. Sei p diese Verbindungslinie, so construiren wir eine Gerade b nach der Relation $(cbap) = \varDelta$. b trifft B^m in m Punkten. Ihre Verbindungslinien mit p seien die Geraden $p_1 \dots p_m$. Jede derselben schneidet aus a, B^m, c eine Punktgruppe $P_a P_b P_c$, für welche $(P_a P_b P_c P) = \varDelta$ ist. Es sind also $p_1 \dots p_m$ die correspondirenden Geraden zum Punkte P.

Wir wollen diese m-deutige Reciprocität mit dem Symbol $(cB^m a\varDelta)$ bezeichnen. Wir stellen uns — wie unter 2 — auch hier die Aufgabe, den Ort der Punkte zu untersuchen, welche den Tangenten p einer Curve n^{ter} Classe correspondiren. Wir gelangen zu demselben, indem wir an die oben gegebene räumliche Interpretation der Construction eines Doppelverhältnisses anknüpfen. Wir legen durch c eine Normalebene **C** zur Ebene der Reciprocität. In **C** ziehen wir durch B zwei Gerade $c_1 c_2$, welche die

Bedingung $\frac{tg\,c\,c_1}{tg\,c\,c_2} = \varDelta$ erfüllen. B^m und C_n betrachten wir als Spuren von Cylindern B_y^m, C_{yn}, welche zur Ebene der Reciprocität senkrecht stehen. Die Tangentialebenen von C_{yn} schneiden $c_1 c_2 B^m a c$ in den resp. Punkten $C_1 C_2$, $P_{b_1} \ldots P_{b_m}$, $P_a P_c$. Die Geraden, welche die resp. Punkte $C_1 P_a$ verbinden, liegen in der Ebene $c_1 a$ und treffen B_y^m in einer Curve der m^{ten} Ordnung S^m. Verbinden wir die Punkte dieser Curve mit den resp. C_2, so tangiren diese Verbindungslinien den Cylinder C_{yn} und schneiden die Ebene der Reciprocität in den Punkten P. Nun stellen die Geraden SC_2 die Gesammtheit aller Transversalen zu c_2 und S^m vor, welche C_{yn} tangiren. Sie liegen auf einer Regelfläche R^{2mn} des $2mn^{ten}$ Grades. Jede Gerade g schneidet nämlich diese Fläche in $2mn$ Punkten; denn die Transversalen zu g, c_2 und S^m liegen auf einer Regelfläche des $2m^{ten}$ Grades. Diese hat mit C_{yn} $2mn$ Tangentialebenen gemeinsam, welche g in Punkten von R^{2mn} schneiden. Die Ebene der Reciprocität α trifft R^{2mn} im Orte der Punkte P und wir schliessen daher:

Die Punkte, welche in der Reciprocität $(cB^m a\varDelta)$ den Tangenten einer Curve n^{ter} Classe entsprechen, liegen auf einer Curve von der Ordnung $2mn$.

c_2 ist eine mn-fache Linie von R^{2mn}. Mithin ist B ein mn-facher Punkt von C^{2mn}. S^m ist eine n-fache Linie von R^{2mn}. Also sind die Schnittpunkte von a mit B^m n-fache Punkte von C^{2mn}. Die Geraden, in welchen die Ebene C den Cylinder B_y^m trifft, sind ebenfalls n-fache Linien von R^{2mn}. Also sind die Schnittpunkte von c mit B^m n-fache Punkte von C^{2mn}. Von hier aus lässt sich leicht übersehen, dass ein Gedankengang, welcher analog dem oben (2—6) eingeschlagenen, zur Verallgemeinerung der dort gezogenen Schlüsse führt. Von den Punkten einer Curve n^{ter} Ordnung gelangen wir zu den Tangenten einer Curve der $2mn^{ten}$ Classe. Sie wird mit Hilfe einer Regelfläche $2mn^{ten}$ Grades hervorgebracht. Ein Berührungscylinder an letztere, der zur Ebene der Reciprocität normal steht, schneidet diese Ebene in der erwähnten Curve.

Wir unterlassen es, hier weiter auf diese Untersuchungen und ihre dualen Uebersetzungen einzutreten.

8.

Wir wollen nun zeigen, wie sich durch Specialisirung der behandelten Reciprocitäten einige Sätze aus der Theorie der Kegelschnitte beweisen lassen.

Setzen wir $n = 1$, so folgt aus den Ausführungen von 2:

Satz. Die Punkte, welche in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$ den Strahlen eines Büschels correspondiren, liegen auf einem Kegelschnitt K^2, oder: Construiren wir zu den Punkten, in welchen die Strahlen eines Büschels die Seiten eines Dreiecks

schneiden, je den Punkt, welcher mit jenen — in gleicher Reihenfolge genommen — ein vorgeschriebenes Doppelverhältniss Δ bildet, so ist der Ort dieses Punktes ein Kegelschnitt K^2.

K^2 wird nach dem in 2 Gesagten aus einem Hyperboloid H^2 geschnitten, welches durch s, c_2 und die Gerade n_p bestimmt wird, die im Scheitel P des Büschels zur Ebene der Reciprocität senkrecht steht (Fig. 3). Also geht K^2 durch die Ecken ABC des Dreiecks und durch den Punkt P. Die Tangente in P an K^2 ist diejenige Gerade, welche in der Reciprocität $(CBA\Delta)$ dem Punkte P entspricht. Um die Tangente in B zu construiren, zeichnen wir die Tangentialebene $\mathbf{T}$ in B an das Hyperboloid H^2. Diese geht durch c_2 und eine Gerade d, welche die Ebene $n_p\hat{}B$ aus der Ebene $\overline{c_1 a}$ schneidet. Die Schnittlinie der Ebene $\mathbf{T}$ mit der Ebene der Reciprocität ist die Tangente b_1 in B an K^2. Bezeichnen wir die Gerade BP durch p, so lässt sich die angegebene Construction von b_1 durch das Symbol $(cpab_1) = \Delta$ ausdrücken. Liegt P auf einer Seite des Dreiecks ABC, etwa auf a, so degenerirt K^2 in zwei Gerade. Die eine ist a; die andere geht durch A und bildet mit c, b und $\overline{AP}$ das Doppelverhältniss Δ.

Geben wir einen Kegelschnitt durch fünf Punkte, so können wir diese zu zehn verschiedenen Dreiecken anordnen. Die Seiten eines solchen Dreiecks werden von der Verbindungslinie der zwei übrigen Punkte in drei Punkten geschnitten. Diese bilden mit jedem jener zwei Punkte sechs Doppelverhältnisse von verschiedenem Werthe. Durch jedes derselben und das bezügliche Dreieck wird eine Reciprocität $(CBA\Delta)$ festgesetzt. In allen diesen Reciprocitäten erscheint der durch fünf Punkte gegebene Kegelschnitt als Ort von Punkten, welche den Strahlen eines Büschels entsprechen. Indem wir also in einem Punkte P des Kegelschnittes eine solche Reciprocität festsetzen, können wir sagen:

Satz. Die Geraden, welche durch einen Punkt P eines Kegelschnittes gehen, schneiden aus den Seiten eines Dreiecks, das dem Kegelschnitt eingeschrieben ist, Punkte, welche — in gleicher Reihenfolge genommen — mit dem zweiten Schnittpunkte der Geraden und des Kegelschnittes das nämliche Doppelverhältniss Δ bilden.

Halten wir ABC fest, so gehört zu jedem Punkte P ein anderes Δ. Geben wir aber Δ, so erhalten wir den zugehörigen Punkt P, indem wir in B die Tangente b_1 construiren und eine Gerade p zeichnen, für welche $(cpab_1) = \Delta$ ist. Der zweite Schnittpunkt von p mit K^2 ist P. Damit ist die Aufgabe gelöst: die Seiten eines Dreiecks, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, durch eine Gerade so zu schneiden, dass die Schnittpunkte mit einem Punkte des Kegelschnittes — in vorgeschriebener Reihenfolge genommen — ein gegebenes Doppelverhältniss bilden. Es giebt

unendlich viele Gerade, welche diese Bedingung erfüllen. Sie gehen alle durch einen Punkt des Kegelschnittes.

Seien p_1, p_2 zwei Gerade durch P. Ihre Schnittpunkte mit abc seien $P_{a_1} P_{b_1} P_{c_1}$ und $P_{a_2} P_{b_2} P_{c_2}$. Ihre zweiten Schnittpunkte mit K^2 seien $P_1 P_2$. Dann sagt der zuerst hervorgehobene Satz aus, dass $(P_{c_1} P_{b_1} P_{a_1} P_1) = (P_{c_2} P_{b_2} P_{a_2} P_2)$ ist. Die Punkte $P_{a_1} \dots$ bestimmen also projectivische Reihen auf $p_1 p_2$. Folglich sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Reihen, also abc, $\overline{P_1 P_2}$, Tangenten eines Kegelschnittes K_1^2, der von $p_1 p_2$ berührt wird. Wir schliessen daher:

Satz. Zwei Dreiecke, welche einem Kegelschnitt einge schrieben sind, umhüllen einen zweiten Kegelschnitt.

Lassen wir an Stelle von p_1 die Tangente p in P an K^2 treten, so correspondirt in den projectivischen Reihen auf p_1 und p_2 dem Punkte P der Punkt P_2. Folglich berührt p_2 den Kegelschnitt K_1^2 in P_2 und wir lesen aus der Figur folgenden Satz ab:

Satz. Ein Kegelschnitt K_1^2 sei durch fünf Tangenten a, b, c, p, p_2 gegeben. Zeichnen wir die Schnittpunkte von dreien, so geht durch diese Punkte ein Kegelschnitt K^2, welcher die vierte im Schnittpunkte mit der fünften berührt. Dann trifft letztere K^2 in ihrem Berührungspunkte an K_1^2.

Der erste der zwei vorstehenden Sätze lehrt uns zu fünf Punkten eines Kegelschnittes einen sechsten mit Hilfe des Satzes von Brianchon zu finden. Der zweite zeigt uns, wie wir zu fünf Tangenten einen Berührungspunkt mit Hilfe des Satzes von Pascal construiren können.

Gegeben sei ein Viereck. a, b, c, d seien vier Seiten desselben, von denen keine drei in einer Ecke zusammenstossen. Gesucht werden die Geraden durch einen Punkt P der Ebene, welche die Seiten a, b, c, d in vier Punkten P_a, P_b, P_c, P_d schneiden, deren Doppelverhältniss Δ ist. Zur Lösung dieser Aufgabe betrachten wir drei Seiten des Vierecks als Grundgerade einer Reciprocität $(CBA\Delta)$. In dieser correspondiren nach 6 den Punkten der Geraden d die Tangenten eines Kegelschnittes K^2. An diesen gehen durch P zwei Tangenten, welche die Aufgabe lösen. Wir schliessen daher:

Satz. Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Gerade, welche die Seiten eines Vierecks, von denen keine drei in einer Ecke zusammentreffen, in vier Punkten schneiden, welche — in gleicher Reihenfolge genommen — ein vorgeschriebenes Doppelverhältniss bilden. Diese Geraden umhüllen mit den erwähnten Seiten eines Vierecks einen Kegelschnitt.

---

* Ein Beispiel für eine Reciprocität $(cB^2a\Delta)$ führte ich durch in der Abhandlung über die Curven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte und einem doppelten Berührungsknoten. Vierteljahrsschr. d. naturf. Gesellsch. in Zürich, Bd. XXXI.

X.

Zur geometrischen Theorie der Dämmerung.

Von

Heinrich Cranz,

Professor am Gymnasium in Stuttgart.

Hierzu Taf. II Fig. 5—8.

Sieht man als den Anfang der Morgendämmerung oder als das Ende der Abenddämmerung den Zeitpunkt an, wo die Sonne einen in der Tiefe c (für bürgerliche Dämmerung 6^{0}—7^{0}, für astronomische 16^{0}—18^{0}) unter dem Horizont liegenden Almukantarat, den Dämmerungskreis, passirt, so hängt die Dauer τ der Dämmerung nur von der Polhöhe φ und der Declination δ der Sonne ab. Die möglichen sich hieraus ergebenden Aufgaben:

1. gegeben φ und δ, gesucht τ;
2. gegeben φ und τ, gesucht δ;
3. gegeben φ, gesucht Minimum von τ;
4. gegeben δ und τ, gesucht φ;
5. gegeben δ, gesucht Minimum von τ,

sind auf sehr elementare Weise von Herrn Dr. Stoll im XXVII. Jahrgange dieser Zeitschrift gelöst, während früher zur Bewältigung der Aufgabe der kürzesten Dämmerung die Anwendung von Differentialrechnung unerlässlich schien (vergl. Wolf, Handbuch der Mathematik, Bd. II S. 177 flg.).

Ganz besonders einfach lassen sich vorstehende Aufgaben auf graphischem Wege behandeln.

A. Constructionen auf der Kugel.

1. In Fig. 5 sei Z das Zenith, P der Nordpol, NS der Horizont, EE_1 der dazu parallele Dämmerungskreis, AQ der Aequator, BB_1 ein Parallelkreis des Aequators, in welchem sich die Sonne eines Tags bewegt.

Der letztere schneidet den Dämmerungskreis in D, den Horizont in H. D ist der Ort der Sonne bei Beginn, H am Ende der Morgendämmerung.

Zieht man die Declinationskreise PD und PH, ferner die Vertikalkreise ZD und ZH, so sind die Dreiecke PZH und PZD gegeben durch ihre Seiten, also ist der Winkel DPH bekannt, und dies ist die Dauer der Dämmerung, ausgedrückt in Bogenmaass.

2. Denkt man sich das Dreieck PZH um P gedreht, bis PH mit PD zusammenfällt, so komme Z nach M; dann ist Winkel $MPZ = \tau$. Wenn also δ gesucht ist, so lässt sich das gleichschenklige Dreieck MPZ aus $PZ = PM = 90^0 - \varphi$ und $\angle MPZ = \tau$ zeichnen; D liegt einerseits auf dem Dämmerungskreise, andererseits auf einem Grosskreise, dessen Pol M ist. Der Bogen PD ist dann das Complement der gesuchten Declination.

Es kann zwei Punkte D geben; sie sind jedoch an die Bedingung gebunden, dass sie zwischen den Wendekreisen liegen müssen. Schneidet ein Wendekreis, z. B. der des Steinbocks, den Dämmerungskreis in G_1, und beschreibt man um G_1 als Pol einen Grosskreis, so schneidet dieser den durch das Zenith gehenden Parallelkreis ZM in M'_1, die gleiche Construction giebt für den Wendekreis des Krebses den Punkt M'.

Wenn M' am weitesten von Z absteht, so entspricht dieser Punkt dem grössten möglichen Werthe von τ; liegt M zwischen M' und M'_1, so giebt es nur einen zugehörigen Punkt D, liegt M zwischen Z und M', so können ihm zwei Punkte D entsprechen.

3. Zieht man den Grosskreisbogen MD, so ist für ein Minimum von τ der Bogen ZM im Dreieck PZM ein Minimum, da ZP und MP constant sind. Im Dreieck ZDM kann aber ZM nur dann Minimum sein, wenn M auf den Bogen ZD zwischen Z und D fällt, oder $ZM = ZD - MD = ZD - ZH = c$ ist.

In diesem Falle muss der Winkel ZDM verschwinden; da aber $\angle PDM = \angle PHZ$, so müssen im Falle des Minimums die Winkel zwischen Declinationskreis und Vertikalkreis zu Anfang und Ende der Dämmerung einander gleich sein, oder, da die Declinationskreise auf dem Parallelkreise, die Vertikalkreise auf den Almukantaraten senkrecht stehen:

Zur Zeit der kürzesten Dämmerung schneidet der Parallelkreis der Sonne den Dämmerungskreis und den Horizont unter gleichen Winkeln.

Dieser Satz ist schon von Bohnenberger in seiner Astronomie (Tübingen 1811), allerdings in etwas schwerfälliger Weise, geometrisch bewiesen.

Zieht man (Fig. 6) in diesem Falle noch den Bogen PR, welcher den Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks MPZ halbirt, so steht dieser senkrecht auf ZMD. Nun ist $\angle PMD = \angle PZH$, $PR \perp ZD$, $PZ \perp ZO$, folglich halbirt ZO, d. h. der erste Vertikal, den Winkel DZH, oder:

Zur Zeit der kürzesten Dämmerung liegen die Vertikalkreise, welche die Sonne am Anfang und am Ende der kürzesten Dämmerung passirt, symmetrisch zum ersten Vertikal.

4. Ist δ und τ gegeben und φ gesucht, so ist das Dreieck PDH (Fig. 5) bekannt, und Z liegt einerseits auf einem Kreise um D mit $90^0 + c$,

andererseits auf einem Grosskreise um H. Bogen PZ giebt das Complement der Polhöhe.

Es werden sich im Allgemeinen zwei Punkte Z, also zwei verschiedene Polhöhen ergeben, so lange

$$DH > DZ - ZH, \text{ d. h. } DH > c,$$

und

$$DH < DZ + ZH, \text{ d. h. } DH < 180^0 + c$$

ist. Ebenso, wie wir oben den Fall, dass $ZM = ZD + MD = 180^0 + c$, weggelassen haben, vernachlässigen wir hier den Fall $DH = 180^0 + c$, da beide nicht einem wirklichen Maximum der Dämmerungsdauer entsprechen, sondern einem Maximum der Zeit zwischen Ende der Abenddämmerung und nächstem Sonnenaufgang, also der um eine Dämmerung verminderten Nacht.

5. Ist $DH = c$, so wird DH und daher auch $\angle DPH = \tau$ ein Minimum; dann muss Z auf dem verlängerten Bogen DH im Abstande 90^0 von H liegen.

Soll bei gegebener Declination die Dämmerungsdauer ein Minimum sein, so muss der Parallelkreis der Sonne den Dämmerungskreis und den Horizont in Punkten schneiden, welche auf dem nämlichen Vertikalkreise liegen.

B. Graphische Darstellung mit Hilfe von stereographischer Projection.

(Bezüglich der verschiedenen Hilfsconstructionen und ihrer Beweise verweisen wir auf Reusch, Die stereographische Projection, Leipzig 1881.)

In Fig. 5 sei der Westpunkt des Horizonts das Projectionscentrum, also stellt der Tafelkreiss ZNZ_1S den Meridian dar mit dem Zenith Z, dem Nadir Z_1, dem Horizont NS. Mache $NE = SE - c$, so geben die Tangenten des Tafelkreises in E und E_1 durch ihren Schnittpunkt den Mittelpunkt des Dämmerungskreises EE_1 an. Mache $NP =$ Polhöhe φ und ziehe $AQ \perp OP$, so ist P der Nordpol, AQ der Aequator.

Mache $AB = QB_1 = \delta$, so stellt Kreis BB_1 (die Tangenten des Tafelkreises in B und B_1 geben den Mittelpunkt) den Parallelkreis der Sonne dar; dieser schneidet Dämmerungskreis und Horizont in D und H; ziehe die Declinationskreise PD und PH (Mittelpunkte auf AQ), welche AQ in d und h treffen, ziehe Pd und Ph bis zum Tafelkreis nach δ und $\varkappa$, so ist $\delta\varkappa$ die in Bogenmaass ausgedrückte Dämmerungsdauer τ.

2. Die Tangente des Tafelkreises in Z schneidet OP im Mittelpunkte des durch das Zenith gehenden Parallelkreises $Z\eta$. Macht man $A\mu = \tau$, so giebt $P\mu$ auf AQ Punkt m; legt man durch m den Declinationskreis Pm (Mittelpunkt auf AQ), so schneidet dieser Kreis $Z\eta$ in M. Ziehe Durchmesser $gOg_1 \perp MO$, ziehe g_1M bis zum Tafelkreis nach γ und mache $\gamma\varepsilon = \gamma g$, so giebt $g_1\varepsilon$ auf OM den Mittelpunkt des Kreises g_1g, dessen Pol M ist und welcher den Dämmerungskreis in D und D_1 trifft. Der Decli-

nationskreisbogen PD resp. PD_1 (Mittelpunkt auf AQ) ist dann das Complement der gesuchten Declination.

Mache $AC = QC_1 =$ der Ekliptikschiefe und zeichne den Wendekreis CC_1 (der Mittelpunkt ergiebt sich durch die Tangenten des Tafelkreises in C und C_1), dieser schneidet den Dämmerungskreis in G_1. Die gleiche Construction, welche zum Pol M den Grosskreis gg_1 lieferte, giebt den Grosskreis, dessen Pol G_1 ist und welcher den Parallelkreis $Z\eta$ in M'_1 schneidet. Durch den andern Wendekreis erhält man ebenso den Punkt M'. Beide Punkte bestimmen die äussersten Lagen des Punktes M. Würde man den Declinationskreis $M'P$ (Mittelpunkt auf AQ) zeichnen, so wäre $M'PZ$ das Maximum von τ.

In unserer Figur berührt der (nicht gezeichnete) Wendekreis des Krebses den Dämmerungskreis gerade noch, deshalb ist hier ZPM' die halbe kürzeste Nacht. Wenn die Ekliptikschiefe grösser ist als QE, so giebt es eine Reihe von Nächten, welche nur aus Dämmerung bestehen; unter diesen ist aber diejenige die längste, für welche der Parallelkreis durch E geht.

3. Um das Minimum der Dämmerungsdauer und die zugehörige Declination des Sonne bei gegebener Polhöhe zu finden, sei in Fig. 6 der Nadirpunkt Projectionscentrum, der Tafelkreis stellt den Horizont dar, NS den Meridian, OW den ersten Vertikal. Mache $N(E) = c$, $W(E)$ giebt auf SN Punkt E; der zum Horizont concentrische Kreis durch E ist der Dämmerungskreis. Mache $N(P) = \varphi$, $W(P)$ giebt auf SN das Bild des Pols P, das Mittelloth auf OP schneidet NS in i, auf einer durch i gehenden Senkrechten zu NS liegen die Mittelpunkte der Bilder aller durch P gehenden Grosskreise (Declinationskreise). Mache $(P)\alpha = (P)O$; $W\alpha$ giebt auf SN Punkt a, a ist der Mittelpunkt des Aequators OAW und ein über Za als Durchmesser beschriebener Kreis stellt den durch's Zenith gehenden Parallelkreis dar. Macht man $(P)(A) = 90^\circ$, ferner $(A)(C) = (A)(C_1) =$ der Ekliptikschiefe, so liefert die Verbindungslinie des Punktes W mit den Schnittpunkten der Tangente des Tafelkreises in (C) und (C_1) mit $Z(P)$ auf NS die Mittelpunkte, und die Geraden $W(C)$ und $W(C_1)$ auf NS die Punkte C und C_1 der Wendekreise. Der eine derselben berührt den Dämmerungskreis, da die Maasse dieselben sind, wie bei der vorigen Figur.

Um D und H zu erhalten, kann man auf zweierlei Weise verfahren. Man mache $W\lambda = c$, ziehe $O\lambda$, welche NS in l trifft, und beschreibe um Z einen Kreis mit Zl, der den Kreis Za in M trifft, ziehe ZMD. Oder: Halbire $N(E)$ in (F_1), ziehe $W(F_1)F_1$, mache auf $ZO: ZF = ZF_1$, lege durch F den Declinationskreis PF und an diesen in F eine Tangente, welche auf SN den Mittelpunkt f des durch F gehenden Parallelkreises DHB ergiebt. Zieht man die Declinationskreise PD und PH oder (bei der ersten Construction) PM, welche den Aequator in d, h, m schneiden, so bestimmen die Geraden Pd, Ph und Pm auf dem Tafelkreise die Punkte δ,

$\varkappa$, μ, und es ist $\delta\varkappa = S\mu$ die Dauer der kürzesten Dämmerung; zieht man dagegen $WB(B_1)$, so ist $(A)(B)$ die Declination der Sonne zur Zeit der kürzesten Dämmerung, südlich, wenn (B) zwischen (A) und S liegt.

4. Ein beliebiger Punkt des Aequators AQ sei in Fig. 7 Projectionscentrum, der zu ihm als Pol gehörige Declinationskreis PQA Tafelkreis, P der Pol, $AB_1 = QB$ die gegebene Declination; die Tangenten des Tafelkreises in B und B_1 schneiden sich im Mittelpunkte des Parallelkreises BB_1. Mache $Q\mu =$ der gegebenen Dämmerungsdauer τ, ziehe $P\mu$, welche den Aequator in m trifft, und zeichne den Declinationskreis Pm (Mittelpunkt auf AQ), welcher den Parallelkreis BB_1 in M schneidet. Ziehe $\Omega l \perp \Omega B$, mache $l\lambda = c$ und ziehe an den Tafelkreis in λ eine Tangente, so schneidet dieselbe die $B\Omega$ im Mittelpunkte des zu B als Pol gehörenden Kleinkreises λZZ_1, dessen sphärischer Halbmesser $90^0 + c$ ist. Macht man ferner den Durchmesser $n\Omega n_1 \perp \Omega M$, zieht $n_1 M$ bis zum Tafelkreis nach ν und macht auf diesem $\nu\nu_1 = \nu n$, so giebt $n_1\nu_1$ auf ΩM den Mittelpunkt des zu M als Pol gehörenden Grosskreises nZZ_1n_1. Die beiden letzten Kreise treffen einander in Z und Z_1. Beide Punkte stellen den Ort des Zeniths dar, wenn man B als Ort der Sonne zu Anfang und M beim Ende der Morgendämmerung ansieht. Zieht man den Declinationskreis PZ (Mittelpunkt auf AQ), so stellt seine wahre Grösse das Complement der gesuchten Polhöhe dar. Um diese zu erhalten, drehen wir die Figur so, dass Z in den Tafelkreis kommt, also dieser Meridian wird. Dabei bewegt sich Z auf einem Parallelkreise des Aequators, dessen Mittelpunkt auf ΩP durch die Tangente an den Bogen PZ in Z erhalten wird, und kommt nach (Z). $NS \perp \Omega(Z)$ und EE_1 sind der zu (Z) gehörige Horizont und Dämmerungskreis, sie schneiden den Parallel BB_1 in D und H; die Declinationskreise PD und PH geben auf dem Aequator wieder die Punkte d und h, welche, von P aus auf den Tafelkreis projicirt, dort den Bogen $\delta\varkappa$ einschliessen, welcher $= A\mu$ sein muss. Die gleiche Construction, wie für Z, lässt sich auch für Z_1 machen, welches dann nach (Z_1) kommt. $(Z)A$ und $(Z_1)A$ stellen die gesuchte Polhöhe dar.

In Fig. 8 ist ein beliebiger Punkt des Horizonts als Projectionscentrum gewählt, der zu ihm als Pol gehörige Grosskreis ZHZ_1H_1 ist Tafelkreis, Z das Zenith, HH_1 der Horizont, DE (wie früher zu construiren) der Dämmerungskreis. Der Tafelkreis möge zugleich derjenige Vertikalkreis sein, in welchem zu Anfang und zu Ende der Dämmerung die Sonne steht. Mache $Hb = Hb_1 = D\beta = D\beta_1 =$ dem Complement der Declination, so geben die Schnittpunkte der Tangentenpaare des Tafelkreises in b, b_1 und in β, β_1 die Mittelpunkte der Kreise bb_1 und $\beta\beta_1$, welche sich in P schneiden. P liegt zugleich auf dem Radius ΩF, welcher den Bogen HD halbirt. Lege durch P den Vertikalkreis ZP, so ist die wahre Länge von ZP das Complement der Polhöhe. Um sie zu finden, verbinde Z_1 mit dem Mittel-

punkte des Kreises ZP, die Verbindungslinie schneidet den Tafelkreis in α; halbire αZ in α_1, ziehe $Z_1\alpha_1$, welche auf HH_1 den Punkt q giebt; dieser ist der Pol des Kreises ZP, also giebt die Gerade $qP(P)$ auf dem Tafelkreise die wahre Länge $Z(P)$ des Bogens ZP, und es ist $H(P)$ die gesuchte Polhöhe. Aus der Figur ergiebt sich sofort, dass die Polhöhe negativ ist, wenn die Declination nördlich ist, und umgekehrt. Um die Dämmerungsdauer zu finden, ziehe die Declinationskreise PH und PD (der eine Mittelpunkt liegt auf ΩZ, der andere auf dem zu ΩD senkrechten Durchmesser des Tafelkreises). Ziehe ferner den Durchmesser $n\Omega n_1 \perp \Omega P$, ziehe nP bis zum Tafelkreise nach ν und mache $\nu\nu_1 = \nu n_1$, so giebt $n\nu_1$ auf ΩP den Mittelpunkt i des Aequators $ndhn_1$, dieser trifft die Declinationskreise PD und PH in d und h; Pd und Ph schneiden den Tafelkreis in δ und $\varkappa$, $\delta\varkappa$ ist die kleinste Dämmerungsdauer bei der gegebenen Declination.

C. Ableitung der Formeln.

I. Im Dreieck PZH ist $PZ = 90^0 - \varphi$, $PH = 90^0 - \delta$, $ZH = 90^0$ und $\angle ZPH$ sei $= t_0$,

im Dreieck PZD ist $PZ = 90^0 - \varphi$, $PD = 90^0 - \delta$, $ZD = 90^0 + c$ und $\angle ZPD$ sei $= t_1$.

Dann geben die beiden Dreiecke

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi, \quad \cos t_1 = -\frac{\sin c + \sin\delta \sin\varphi}{\cos\delta \cos\varphi}, \quad t_1 - t_0 = \tau.$$

Setzt man hier für δ die Ekliptikschiefe, so erhält man die beiden Grenzwerthe von τ, welche den Punkten M' und M'_1 entsprechen.

II. Setzt man $ZM = 2\nu$ und $\angle PZM = \mu$, halbirt das gleichschenklige Dreieck PZM durch PR, so ist im rechtwinkligen Dreieck $PZR: PZ = 90^0 - \varphi$, $\angle PZR = \mu$, $ZR = \nu$, also

$$\sin\nu = \cos\varphi \sin\frac{\tau}{2}, \quad \operatorname{cotg}\mu = \sin\varphi \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}.$$

Im Dreieck ZMD ist $ZM = 2\nu$, $MD = 90^0$, $ZD = 90^0 + c$ und Winkel DZM sei $= \omega$, so ist

$$\cos\omega = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} 2\nu}.$$

Im Dreieck PZD ist ferner $PD = 90^0 - \delta$, $PZ = 90^0 - \varphi$, $ZD = 90^0 + c$, $\angle PZD = \mu - \omega$, also

$$\sin\delta = -\sin c \sin\varphi + \cos c \cos\varphi \cos(\mu - \omega),$$

woraus sich δ berechnet. Um den zweiten möglichen Werth zu erhalten, denke man sich die Bögen ZD_1, MD_1, PD_1 gezogen, so ist $\angle D_1ZM = \omega$, also $\angle PZD_1 = \mu + \omega$, folglich

$$\sin\delta_1 = -\sin c \sin\varphi + \cos c \cos\varphi \cos(\mu + \omega).$$

III. In Fig. 6 sei $\angle MPZ = \tau_0$, die Declination $Dd = \delta_0$; im Dreieck PRZ ist $PZ = 90^0 - \varphi$, $RZ = \frac{c}{2}$, $\angle RPZ = \frac{\tau_0}{2}$. Daher ergiebt sich

$$\sin\frac{\tau_0}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi},$$

ferner

$$\cos PR = \frac{\sin\varphi}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Im rechtwinkligen Dreieck PRD ist aber $RD = 90^0 + \frac{c}{2}$, $PD = 90^0 - \delta_0$, also

$$\sin\delta_0 = -\cos PR \sin\frac{c}{2};$$

wenn man hier den obigen Werth von $\cos PR$ einsetzt, so erhält man

$$\sin\delta_0 = -\sin\varphi \, tg\frac{c}{2}.$$

IV. Fig. 7 sei $BM = 2n$ und Winkel PBM (wo wir uns den Parallelkreisbogen durch einen Grosskreisbogen ersetzt denken) $= m$; im Dreieck PBM ist $PB = 90^0 - \delta$ und $\angle BPM = \tau$; halbirt man den Winkel τ, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, eines derselben liefert dann (wie in II das Dreieck PZR) die Gleichungen

$$\sin n = \cos\delta \sin\frac{\tau}{2}, \quad cotg\, m = \sin\delta \, tg\frac{\tau}{2}.$$

Im Dreieck BZM sei $\angle ZBM = 0$, ferner ist $BZ = 90^0 + c$, $BM = 2n$, $ZM = 90^0$, also:

$$\cos o = \frac{tg\, c}{tg\, 2n}.$$

Im Dreieck BPZ ist $\angle PBZ = m - o$, $PZ = 90^0 - \varphi$, $PB = 90^0 - \delta$, $BZ = 90^0 + c$, also

$$\sin\varphi = -\sin c \sin\delta + \cos c \cos\delta \cos(m - o);$$

ebenso findet man die andere Polhöhe, wenn man $m - o$ durch $m + o$ ersetzt:

$$\sin\varphi_1 = -\sin c \sin\delta + \cos c \cos\delta \cos(m + o).$$

V. In Fig. 8 ist im rechtwinkligen Dreieck PFD: $FD = \frac{c}{2}$, $PD = 90^0 - \delta$, $\angle FPD = \frac{\tau_0}{2}$, also

$$\sin\frac{\tau_1}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\delta}.$$

ferner

$$\cos PF = \frac{\sin\delta}{\cos\frac{c}{2}};$$

im rechtwinkligen Dreieck ZFP ist

$$ZF = 90^0 - \varphi_1, \quad ZF = 90^0 + \frac{c_1}{2},$$

also

$$\sin\varphi_1 = -\sin\frac{c}{2}\cos PF,$$

somit

$$\sin\varphi_1 = -\sin\delta\, tg\,\frac{c}{2}\cdot$$

Kleinere Mittheilungen.

XII. Die Auflösung grosser Zahlen in ihre Factoren.

Die Methode, grosse Zahlen in ihre Factoren zu zerlegen, welche ich im Folgenden auseinandersetzen möchte, hat sich mir in allen Fällen, für die ich sie benutzte, bis hinauf zu $2^{64}+1$ bewährt. Gerade diese Zahl, deren Auflösung durch Herrn Landry mir seinerzeit nicht bekannt war, hat die Veranlassung gegeben, die Methode, welche ich der Hauptsache nach schon für Zahlen, wie $2^{47}-1$, $2^{53}-1$ etc. angewandt hatte, weiter auszubilden und zu einem gewissen Abschlusse zu bringen. In der so gewonnenen Gestalt lege ich sie vor.

Die Zahl, deren Factoren gefunden werden sollen, heisse N. Dann setze man

$$N=\omega^2+r.$$

Ist nun für eine Primzahl p

$$N\equiv\varrho\,(p)$$

und ϱ ein quadratischer Rest für p, so dass

$$\omega_1^2\equiv\varrho\,(p)$$

stattfindet, so lässt sich folgende Gleichung bilden:

$$N=\omega_1^2+(\omega+\omega_1)(\omega-\omega_1)+r.$$

Bezeichnet man das zweite und dritte Glied rechts zusammen durch b, so ist

$$b=\omega^2+\varrho-\omega_1^2.$$

Aber man hat

$$\begin{aligned}\omega^2+r&\equiv\quad\varrho\,(p)\\-\omega_1^2\quad&\equiv-\varrho\,(p)\end{aligned}$$

mithin

$$b=\omega^2+\varrho-\omega_1^2\equiv 0\,(p).$$

Erweitert man noch die Wurzel ω_1 in ω_1+py, so ist

$$\begin{aligned}N&=(\omega_1+py)^2+\{\omega+(\omega_1+py)\}\{\omega-(\omega_1+py)\}+r,\\&=a^2+b\end{aligned}$$

und

$$b\equiv 0\,(p).$$

Bestimmt man nun für die Primzahlen p von 2 an, für welche $\left(\frac{N}{p}\right)=+1$ ist, bis zu einer durch die Grösse der Zahl zu bestimmenden Grenze und ebenso für deren zweite Potenzen den Werth ω_1, so lassen sich durch diese selbst oder durch deren Combinationen eine grössere Anzahl einfacher binärer quadratischer Darstellungen der Zahl N bilden. Für Zahlen bis zu 15 Stellen genügen durchweg die einschlägigen Primzahlen bis 97;

bei der Primzahl 2 gehe ich bis zur zehnten Potenz, bei 3 bis zur sechsten und bei 5 bis zur vierten.

Es ergiebt sich nun, was folgt.

Ist die Zahl N zusammengesetzt, so findet man bald entweder zwei Darstellungen mit derselben Determinante und hiermit zwei Factoren, oder es lassen sich durch Elimination gemeinschaftlicher Factoren verschiedener Determinanten in mehr als zwei Darstellungen ein Paar bilden, wie

$$a_1^2 + mc_1^2 = \mu N, \quad a_2^2 + mc_2^2 = \nu N,$$

die zu verschiedenen positiven oder negativen Wurzeln der Congruenz $Z^2 \equiv -m(N)$ und demnach wieder zu der Bestimmung von zwei Factoren führen.

Ist dagegen N eine Primzahl, so gelangt man auch leicht zu solchen Eliminationen; diese führen aber selbstredend stets zu derselben Wurzel $\pm Z$. Zugleich bekundet sich der Umstand, dass man es mit einer Primzahl zu thun hat, einigermassen dadurch, dass eine Reihe von Determinanten auftritt, die nur aus einem Factor bestehen, und etwa auch, dass man mehrfach dieselbe Determinante $\varDelta$ sowohl mit $+$, als mit $-$, also $\varDelta = -1$ erhält. Um Gewissheit zu erlangen, sind die erhaltenen Determinanten meist mehr als ausreichend, um die Primzahlen auszuschliessen, für welche sie keine quadratischen Reste sind, die also als Divisoren nicht vorkommen können.

Für die Ausführung bemerke man, dass, wenn

$$\omega \mp (\omega_1 + py) = \alpha$$

gesetzt wird,

$$\omega_1 + py = \pm(\omega - \alpha)$$

und

$$\omega + (\omega_1 + py) \text{ oder } \omega - (\omega_1 + py) = 2\omega - \alpha,$$

also

$$N = (\omega - \alpha)^2 + (2\omega - \alpha)\alpha + r$$

ist. Sei sodann

$$2\omega \equiv \pm 2\beta(p), \quad r \equiv \gamma(p),$$

so ist die Congruenz

$$(\pm 2\beta - \alpha)\alpha \equiv -\gamma(p) \text{ oder } \alpha^2 \mp 2\beta\alpha \equiv \gamma(p)$$

zu lösen oder für

$$\alpha = \pm\beta + Z$$

die Congruenz

$$Z^2 - (\beta^2 + \gamma) \equiv 0(p).$$

Es ist aber

$$\beta^2 \equiv \omega^2(p)$$

$$\gamma \equiv r \ (p)$$

mithin

$$\beta^2 + \gamma \equiv \omega^2 + r \equiv \varrho(p),$$

also, wie früher,

$$Z^2 - \varrho \equiv 0(p), \text{ d. h. } Z = \omega_1.$$

Da man ferner für β nach der ersten Congruenz $\pm(\omega - py_1)$ setzen kann, so ist

$$\alpha = \pm\beta + \omega_1 = \pm(\omega - py_1) + \omega_1 = \omega \mp (\omega_1 + py),$$

wie vorher.

Die Fundamentalgleichungen und Congruenzen für die Methode sind demnach

$$N = \omega^2 + r;$$

$$N \equiv \varrho_1(p), \quad \omega_1^2 \equiv \varrho_1(p), \quad \omega \equiv \pm \beta_1(p);$$

$$\alpha \equiv \pm \beta_1 \pm \omega_1,$$

$$N = (\omega - \alpha)^2 + \overbrace{(2\omega - \alpha)\alpha}^{b} + r$$

und auch

$$N \equiv \varrho_2(p^2), \quad \omega_2^2 \equiv \varrho_2(p^2), \quad \omega \equiv \pm \beta_2(p^2);$$

$$\alpha = \pm \beta_2 \pm \omega_2,$$

$$N = (\omega - \alpha)^2 + \overbrace{(2\omega - \alpha)\alpha}^{b} + r.$$

Für $p = 2, 3, 5$ sind, wie bereits erwähnt, noch höhere Potenzen mit heranzuziehen.

Ist N nicht von der Form $8n+1$, so modificiren sich diese, damit der Factor 2^n für b nicht verloren geht, insoweit, dass man setzt, wenn z. B. N die Form $8n+3$ hat,

$$N = 3\omega^2 + r,$$

$$\omega_1^2 \equiv \frac{\varrho_1 + px}{3}(p) \quad \text{und} \quad \omega_2^2 \equiv \frac{\varrho_2 + p^2 x}{3}(p^2);$$

ähnlich für $8n+5$ und $8n+7$.

Es folgt hieraus, während das Uebrige unverändert bleibt,

$$N = 3(\omega - \alpha)^2 + 3(2\omega - \alpha)\alpha + r \text{ etc.}$$

Was nun die Auflösung der Congruenzen

$$\omega_1^2 \equiv \varrho_1(p) \quad \text{und} \quad \omega_2^2 \equiv \varrho_2(p^2)$$

betrifft, so sind ja für die ersteren leicht Tafeln herzustellen; für die letzteren habe ich solche Tafeln bis zu 47^2 angelegt, ausserdem auch für den Modulus 2^3 bis 2^{10}, 3^1 bis 3^6 und 5^1 bis 5^4. In anderen Fällen ist folgendes Verfahren vielleicht am zweckmässigsten.

Ist nach der obigen Bezeichnung

$$N \equiv \varrho_1(p) \quad \text{und} \quad \equiv \varrho_2(p^2),$$

so sei $\varrho_2 = qp + \varrho_1$.

Aus $\omega_1^2 \equiv \varrho_1(p)$ hat man $\omega_1^2 = q_0 p + \varrho_1$.

Löst man nun bei einem gegebenen p für sämmtliche ϱ_1 die Congruenz

$$2\omega_1 . u \equiv 1(p)$$

und bestimmt ebenso zu jedem ϱ das zugehörige p_0, so lassen sich für die einzelnen p kleine Tafeln zusammenstellen mit vier senkrechten Colonnen, welche nach der Reihe enthalten ϱ_1, ω_1, q_0 und u.

Die Anwendung ist leicht. Man multiplicire $(p - p_0)$ mit u und bestimme zu dem Producte den, absolut genommen, kleinsten Rest durch p, er sei $\pm \delta$; dann ist $\pm \delta . p + \omega_1 = \omega_2$. Zwei Beispiele mögen schliesslich zur Erläuterung der Methode dienen.

Es sei

$$N = 7.2^{34} + 1 = 120259084289,$$

$$N = 346783^2 + 635200, \text{ also } \omega = 346783,$$

$$\left(\frac{N}{7}\right) = +1,$$

also setze man

$$N \equiv 1(7) \text{ und } N \equiv 15(7^2),$$

woraus

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 8$$

folgt. Ferner

$$\text{aus } \omega \equiv 3(7) \text{ und } \omega \equiv 10(7^2), \text{ ist } \beta_1 = 3 \text{ und } \beta_2 = 10,$$

$$\alpha = 3 \pm 1 = 2 \text{ und } 4 \text{ für } 7, \quad \alpha = 10 \pm 8 = 2 \text{ und } 18 \text{ für } 7^2$$

oder erweitert

$$\alpha = 7y + 2, 4 \text{ und } = 7^2 y + 2, 18.$$

So findet man

$\alpha = 2^3 y + 0, 2, 4, 6;\quad 2^4 y + 0, 6, 8, 14;\quad 2^5 y + 0, 14, 16, 30;$
$2^6 y + 0, 30, 32, 62;\quad 2^7 y + 30, 32, 94, 96;\quad 2^8 y + 30, 32, 158, 160;$
$2^9 y + 158, 160, 414, 416;\quad 2^{10} y + 158, 160, 670, 672.$

$\alpha = 5y + 0, 1;\quad 5^2 y + 0, 16;\quad 5^3 y + 16, 50;\quad 5^4 y + 141, 300.$

$\alpha = 7y + 2, 4;\quad 7^2 y + 2, 18;$
$= 11y + 2, 3;\quad 11^2 y + 47, 68;$
$= 19y + 1, 8;\quad 19^2 y + 115, 331;$
$= 31y + 5, 29;\quad 31^2 y + 60, 625;$
$= 37y + 12, 26;\quad 37^2 y + 271, 581\quad (1369);$
$= 47y + 10, 24;\quad 47^2 y + 762, 1387\quad (2209);$
$= 53y + 12, 49;\quad 53^2 y + 261, 2291\quad (2809);$
$= 67y + 2, 47;\quad 67^2 y + 114, 2146\quad (4489);$
$= 71y + 1, 37;\quad 71^2 y + 3871, 4119\quad (5041);$
$= 97y + 45, 68;\quad 97^2 y + 1911, 4798\quad (9409).$

Ausserdem war 127 in einer Determinante mit aufgetreten und darum benutzt worden, also

$$\alpha = 127y + 49, 97;\quad 127^2 y + 1748, 14400\quad (16129).$$

Für

$$\alpha = \quad 1950\ (5y + 0 \text{ mit } 37^0 y + 581),$$
$$\alpha = 143432\ (127^2 y + 14400 \text{ mit } 11y + 3) \text{ und}$$
$$\alpha = -3836\ (37^2 y + 271 \text{ mit } 11y + 3)$$

bekommt man

1) $N = 344833^2 + 2.7.11.2960^2$

2) $ = 203351^2 + 7.106172^2$

3) $ = 350619^2 - 2.11.11026^2.$

Aus 1) und 2) erhält man

$$11.832082029^2 - 2.150479740^2 = \mu N$$

und hieraus in Verbindung mit 3)

$$\lambda\{5045995048467 + 26380527979530\}\{5045995048467 - 26380527979350\}$$
$$= \nu N.$$

Der grösste gemeinschaftliche Factor der Differenz auf der linken Seite und der Zahl N ist einer der gesuchten Factoren, nämlich 317306291; der andere Factor, welcher sich aus der Summe ergeben muss, ist 397.

Für das zweite Beispiel diene die Zahl

$N = 2971215073$ (die 48. Zahl der Lamé'schen Reihe 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...). Es ist

$$N = 54508^2 + 93009, \quad \text{also } \omega = 54508,$$

und man hat

$$N = (54508 - \alpha)^2 + (109016 - \alpha)\alpha + 93009.$$

Die Summe der beiden letzten Glieder heisse wieder b.

Man erhält dann unter Anderem:

für 1.	$\alpha = 59$	$b = 2.17.37.72^2$,
„ 2.	$\alpha = 4109$	$b = 2.3.7.3204^2$,
„ 3.	$\alpha = -1$	$b = -2.3.23.29.2^2$,
„ 4.	$\alpha = -387$	$b = -3.7.17.344^2$,
„ 5.	$\alpha = -831$	$b = -2.3.23.31.146^2$,
„ 6.	$\alpha = -5987$	$b = -2.7.97.712^2$,
„ 7.	$\alpha = 93$	$b = 17.29.144^2$,
„ 8.	$\alpha = -7519$	$b = -2.31.37.618^2$,
„ 9.	$\alpha = 1517$	$b = 2.7.17.828^2$,
„ 10.	$\alpha = 3323$	$b = 3.7.17.992^2$,
„ 11.	$\alpha = 3827$	$b = 3.7.29.43.124^2$,
„ 12.	$\alpha = 3311$	$b = 2.3.7.23.602^2$,
„ 13.	$\alpha = -7051$	$b = -7.10812^2$,
„ 14.	$\alpha = 15421$	$b = 7.31.37.424^2$.
„ 15.	$\alpha = -28707$	$b = -2.7.23.3504^2$,
„ 16.	$\alpha = 31143$	$b = 2.3.43.3066^2$,
„ 17.	$\alpha = 20561$	$b = 2.17.7314^2$,
„ 18.	$\alpha = -5891$	$b = -23.37.43.136^2$,
„ 19.	$\alpha = -13573$	$b = -3.7.23.1856^2$,
„ 20.	$\alpha = -11773$	$b = -2.3.23.3204^2$,
„ 21.	$\alpha = 21801$	$b = 2.3.17802^2$,
„ 22.	$\alpha = 19$	$b = 7.556^2$,
„ 23.	$\alpha = 1983$	$b = 2.3.37.978^2$,
„ 24.	$\alpha = -3187$	$b = -2.3.7.31.524^2$,
„ 25.	$\alpha = -2441$	$b = -2.23.53.334^2$,
„ 26.	$\alpha = -2629$	$b = -2.3.31.1256^2$,
„ 27.	$\alpha = -99$	$b = -2.3.1336^2$,
„ 28.	$\alpha = -5343$	$b = -2.7.37.1086^2$,
„ 29.	$\alpha = 28075$	$b = 2.7.17.37.508^2$.

a) Aus 15) und 19) hat man

$$N = 83215^2 - 2.7.23.3504^2$$
$$= 68081^2 - 3.7.23.1856^2.$$

Hieraus ergiebt sich

$$3.4969913^2 - 2.4826470^2 = 9259\,N$$

und diese Darstellung führt zu der Congruenz

$$1670196456^2 \equiv 6(N).$$

Diese letztere Congruenz erhält man auch aus der Darstellung

$$N = 54607^2 - 2.3.1336^2,$$

die aus 27. abgeleitet ist.

Solche Zusammenstellungen kann man aus den obigen Werthen mehrere machen.

b) Ebenso leicht gewinnt man Darstellungen, deren Determinante nur aus einer Primzahl besteht.

c) In 4. und 10. sind die Determinanten $+3.7.17$ und $-3.7.17$,
„ 13. „ 22. „ „ „ $+7$ „ -7,
„ 27. „ 21. „ „ „ $+6$ „ -6.
Die Zahl dieser Fälle lässt sich durch Elimination noch vermehren.

d) Mit Hilfe einer Anzahl der obigen Determinanten findet man, dass keine Primzahl bis zu $\sqrt{N}$ Divisor von N sein kann; die Zahl ist also eine Primzahl.

Zum Schlusse darf ich wohl noch auf zwei Erwägungen hinweisen, welche bei dem erstmaligen Gebrauche der angegebenen Methode leicht übersehen werden könnten.

Die eine dieser Erwägungen betrifft die approximative Bestimmung der übrigen Factoren einer Determinante, wenn einzelne derselben bereits festgestellt sind, um dann, wenn sich jene als zu gross erweisen sollten, von der Fortführung der Rechnung abzusehen. Ein Beispiel möge zur Erläuterung dienen.

Für

$$N = 481036337153 = (693567 - \alpha)^2 + (1387134 - \alpha)\alpha + 1153664$$

hat man unter Anderem

$$\alpha = 7^2 y + 41, \quad = 11 y + 3, \quad = 2^4 y + 8.$$

Aus dem ersten Werthe ergiebt sich für $y = -1$ speciell $\alpha = -8$, und die beiden anderen Werthe liefern für die Determinante noch die Factoren 11 und 64.

Schätzt man jetzt $(1384134 + 8).8 : (11.64.49)$ ab, so ergiebt sich als ungefähres Resultat 1400 für die übrigen Factoren und als Quadratwurzel hieraus 37. Sollte die Determinante also noch einen kleineren Factor haben, so könnte dieser höchstens 37 sein. Zur Verfügung stehen jedoch nur $\alpha = 7y + 1, 6$ und $= 29y + 16, 29$, die beide nicht zu gebrauchen sind. Der letzte Factor wird also ungefähr 1400 sein und es ist darum von ihm füglich abzusehen. In der That ist für $\alpha = -8$ der Werth von $b = -11 \times 1153.28^2$.

Aber damit ist nicht gesagt — und dies ist der Gegenstand der zweiten Erwägung —, dass man auf solche grössere Factoren unter allen Umständen verzichten soll. Da man nämlich die entsprechenden Werthe von α aus der Rechnung sofort entnehmen kann, so führt deren Prüfung in einzelnen Fällen zu einem neuen Werthe für b, welcher in Verbindung mit dem zuerst gefundenen die Elimination des einen grossen Factors gestattet und zu einer brauchbaren Determinante führt. Z. B.: Für dieselbe Zahl N, wie oben, hat man auch $\alpha = 59^2 y + 2094$ und aus der Combination mit $\alpha = 11y + 3$ ergiebt sich $\alpha = 9056$, sowie $b = 463.5192^2$. Da nun $9056 \equiv 259(463)$ und $2\omega = 1387134 \equiv 449(463)$ ist, so hat man

$$\alpha = 463y + 259 \text{ und } \alpha = 463y + 449 - 259 \text{ oder } = 463y + 190.$$

Und aus $\alpha = 190$ bekommt man

$$b = 7.11.29.463.16^2.$$

Eliminirt man aus den Darstellungen, die den beiden Werthen von α und b entsprechen, den Factor 463, so gelangt man zu

$$1) \qquad 450001673^2 - 7.11.29.1369022^2 = 412269.N.$$

Anderweit war schon gefunden für $\alpha = -10450$ und $\alpha = -448$

$$2) \qquad 704017^2 - 2.7.29.131.524^2 = N$$

und

$$3) \qquad 694015^2 - 2.11.131.464^2 = N.$$

Aus 1) und 2) folgt

$$11.4819073806871^2 - 2.11.131.117900438326^2 = \mu.N$$

und in Verbindung mit 3) gelangt man zu einer Darstellung wie

$$m^2 - n^2 = \nu.N,$$

aus welcher

$$N = 166609.2887217$$

ist. Eine weitere Auflösung ist beiläufig gesagt unmöglich, da beide Factoren Primzahlen sind.

Anhang.

Die Theilbarkeit des Binoms $2^{2^n} + 1$.

Mit Hilfe der vorstehend angegebenen Methode konnte ich auch die Untersuchung über die Zahlen von der Form $2^{2^n} + 1$ weiter ausdehnen, als es mir bis dahin möglich war, und ich erlaube mir, hierüber noch Einiges zu berichten.

Im Jahre 1732 machte L. Euler die Mittheilung, dass die Zahl $2^{32} + 1$ oder $2^{2^5} + 1$ durch 641 theilbar sei. (Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus — Comm. Ac. Petropol. T. VI.) Damit war in das Theorem Fermat's: *„omnes numeros a binario quadratice in se ductos et unitate auctos semper numeros primos esse"*, die erste Bresche gelegt. Wie E. nachwies, müssen die Primzahlen, welche Divisoren des Binoms $2^n + 1$ sind, die Form $2nx + 1$ haben, und so bot

sich denn allerdings für $2^{32}+1$ sehr bald ein solcher Factor dar. Auf einem andern Wege gelangte später Beguelin zu ähnlichen Resultaten. (Application de l'Algorithme exponentiel à la recherche des facteurs des nombres de la forme 2^n+1. Nouv. Mem. de l'Ac. R. Berlin 1777.) Während E. nämlich von dem fertigen Binom ausgegangen war, um dessen Factoren zu ermitteln, suchte Beg. die Form zweier Factoren f und F zu bestimmen, deren Product ein Binom wie 2^n+1 sei, und zwar so, dass $f=0, a, m$ und $F=0, a, X, m+p$ genommen wurde, d. h. $f=1+2^a+2^m$ und $F=1+2^a+\dots 2^b+2^c+\dots 2^{m+p}$. Dabei glaubt er gefunden zu haben, dass nur die Zahlen $2^{10}+1$, $2^{24}+1$ und $2^{32}+1$ einen solchen Factor f hätten und dass insbesondere für die Form $2^{2^m}+1$ auch keine Factoren f mit mehr, als drei Gliedern existirten. Mit anderen Worten, für ihn behielt das Theorem von Fermat bis auf die einzige Ausnahme seine Giltigkeit.

Nach dieser Zeit findet man wohl nirgend einen selbstständigen Versuch, um neue Fälle für die Theilbarkeit von $2^{2^m}+1$ zu erhalten oder eine Entscheidung in dieser Frage sonstwie herbeizuführen, bis in der neueren Zeit V. Bouniakwsky die Congruenzen $2^{2^{12}}+1\equiv 0(114689)$ und $2^{2^{23}}+1\equiv 0(167772161)$ veröffentlichte, welche der russische Geistliche Pervouchine der kaiserl. Akademie in St. Petersburg eingesandt hatte. (Bulletin de l'Ac. Imp. St. Pétersbourg. 1878 u. 1879.) Fast gleichzeitig mit der ersten dieser Veröffentlichungen hatte auch E. Lucas die Congruenz $2^{2^{12}}+1\equiv 0(114689)$ als von ihm gefunden bekannt gegeben. (Atti de la Reale Accademia di Torino, Vol. XIII.) Im Jahre 1880 theilte das Journal „Les Mondes" (II. S. T. VII) den Factor von $2^{64}+1$ mit, der von Landry gefunden war, nämlich 274177, und ganz vor Kurzem fand ich die Congruenz $2^{2^{36}}+1\equiv 0(2748779069441)$. Der Modulus ist $5.2^{39}+1$.

Diese Congruenzen, einschliesslich der von Euler gefundenen, gehören nach der Art und Weise, wie sie gefunden wurden, zwei verschiedenen Kategorien an. In die eine gehören $2^{32}+1$ und $2^{64}+1$, in die andere $2^{2^{12}}+1$, $2^{2^{23}}+1$ und $2^{2^{36}}+1$. Um die Factoren zu finden, welche zu $2^{32}+1$ und $2^{64}+1$ gehören, ging man von dem fertigen Binom aus. Wie Euler verfahren hat, ist bereits angedeutet; ähnlich wird auch Landry zu Werke gegangen sein, doch ist, soviel ich weiss, Näheres hierüber nicht bekannt. Ich selbst fand für $2^{64}+1$ ebenfalls den oben angegebenen Factor auf folgende Weise. Die Untersuchungen Beguelin's liessen mich wenigstens den Schluss machen, dass der kleinere Factor nicht gar zu gross sein könne; ich beschränkte daher meine Untersuchungen auf die Primzahlen der ersten vier Hunderttausende. Mit Hilfe einer grösseren Anzahl von quadratischen Resten für $2^{64}+1$, die ich gefunden hatte, reducirte ich die Primzahlen, die noch als Divisoren in Frage kommen konnten, auf drei und hatte nun leichte Arbeit.

Anders verhält es sich mit den Congruenzen der zweiten Kategorie. Hier ist zunächst der Factor zu suchen, um von ihm aus zu dem Binom

zu gelangen. Für diesen Factor bieten sich sofort als einfachste Formen $5.2^{2\nu+1}+1$ und $7.2^{2\nu}+1$ dar; weiterhin könnte man noch $17.2^{2\nu+1}$, $31.2^{2\nu}$ etc. berücksichtigen, wie ich es gethan habe. Es kommt dann in erster Linie darauf an, dass diese Zahlen Primzahlen sind. Für $5.2^{2\nu+1}+1$ hat man bis zu $5.2^{39}+1$ ausser 11, 41 und 641 noch 40961, 163841, 167772161 und 2748779069441, entsprechend den Exponenten 13, 15, 25 und 39, welche dieser Bedingung genügen; für $7.2^{2\nu}+1$ sind Primzahlen ausser 29 und 113 noch 114689, 734033, 469762049. Von diesen führen aber nur 167772161, 2748779069441 und 114689 zu Congruenzen, wie $2^{2^m}+1\equiv 0(p)$. Auch die Primzahlen, die ich unter den Zahlen $17.2^{2\nu+1}$, $31.2^{2\nu}+1$ etc. fand, liessen sich nicht weiter verwenden.

Im Ganzen sind also jetzt von den Zahlen mit der Form $2^{2^m}+1$ als zusammengesetzt bekannt

$$2^{2^5}+1\equiv 0\,(641),\quad \text{Euler};$$
$$2^{2^6}+1\equiv 0\,(274177),\quad \text{Landry};$$
$$\left.\begin{array}{l}2^{2^{12}}+1\equiv 0\,(114689),\\ 2^{2^{23}}+1\equiv 0\,(167772161),\end{array}\right\}\ \text{Pervouchine};$$
$$2^{2^{36}}+1\equiv 0\,(2748779069441)\ \text{von mir.}$$

Bremen. P. Seelhoff.

XIII. Die neunte vollkommene Zahl.

Unter vollkommenen Zahlen versteht man bekanntlich solche, für welche die Theilersumme der Zahl selbst gleichkommt oder für welche die Divisorensumme das Doppelte der Zahl ist. Bevor ich nun von der in der Ueberschrift genannten Zahl im Besondern sprechen werde, erscheint es mir zweckmässig, die Theorie der vollkommenen Zahlen überhaupt einer kurzen Besprechung zu unterziehen.

Stellt man eine Zahl n in der Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$ dar, so ist ihre Divisorensumme $N=\dfrac{(a^{\alpha+1}-1)(b^{\beta+1}-1)(c^{\gamma+1}-1)\ldots}{(a-1)(b-1)(c-1)\ldots}$, und die Gleichung, welche die vollkommenen Zahlen bestimmt, ist

$$1)\qquad N=2n.$$

Dass eine einzelne Primzahl dieser Gleichung nicht genügen kann, liegt auf der Hand. Ebenso wenig kann irgend eine Potenz einer Primzahl dies leisten; denn sei z. B. $n=p^\pi$ und p eine Primzahl, so hat man aus 1)

$$\frac{p^{\pi+1}-1}{p-1}=2p^\pi$$

und hieraus

$$2p^\pi-p^{\pi+1}\ \text{oder}\ p^\pi(2-p)=1,\ \text{d. h. } p=1.$$

Ist dagegen n das Product zweier einfachen Primzahlen pr, so verwandelt sich die Gleichung 1) in

$$(p+1)(r+1)=2pr \quad \text{oder} \quad pr-p-r=1.$$

Addirt man beiderseits 1, so entsteht

$$(p-1)(r-1)=2,$$

also ist, da die Wurzeln nur ganze Zahlen sein können, $p-1=1$ und $r-1=2$ oder $p=2$ und $r=3$.

Die einfachste vollkommene Zahl ist also $2.3=6$.

Hieran schliesst sich der Fall, dass die Zahl n das Product aus einer einfachen Primzahl und der Potenz einer andern Primzahl ist, also $n=r.p^{\pi}$. Man hat es dann mit der Gleichung

$$(r+1)\frac{p^{\pi+1}-1}{p-1}=2rp^{\pi}$$

zu thun. Aus ihr ergiebt sich

$$p^{\pi}=\frac{r+1}{r(2-p)+p}$$

oder, wenn $2+k$ für p gesetzt wird,

$$(2+k)^{\pi}=\frac{r+1}{k(1-r)+2}.$$

Da der Nenner positiv sein muss, so ist $k=0$ zu nehmen und es ist $r=2^{\pi+1}-1$. Die resultirende vollkommene Zahl ist demnach $(2^{\pi+1}-1).2^{\pi}$ mit der Bedingung, das $2^{\pi+1}-1$ eine Primzahl ist.

Zu demselben Ergebniss gelangt man, wenn n das Product der Potenzen zweier Primzahlen ist, also $n=p^{\pi}r^{\varrho}$. Für diesen Fall ist

$$\frac{p^{\pi+1}-1}{p-1}\cdot\frac{r^{\varrho+1}-1}{r-1}=2p^{\pi}r^{\varrho}$$

und

$$p^{\pi}=\frac{r^{\varrho+1}-1}{r^{\varrho+1}(2-p)-2r^{\varrho}(1-p)-p}.$$

Man sieht sofort, dass $2-p=0$ sein muss, wenn p^{π} eine ganze Zahl sein soll, und es ist mithin

$$2^{\pi}=\frac{r^{\varrho+1}-1}{2r^{\varrho}-2} \quad \text{oder} \quad 2^{\pi+1}=\frac{r^{\varrho+1}-1}{r^{\varrho}-1}=r+\frac{r-1}{r^{\varrho}-1}.$$

Hier muss dann wieder $\frac{r-1}{r^{\varrho}-1}$ eine ganze Zahl sein, d. h. es ist $r^{\varrho}=r$ und $\varrho=1$, also

$$2^{\pi+1}=\frac{r^2-1}{r-1}=r+1 \quad \text{und} \quad r=2^{\pi+1}-1.$$

Die vollkommene Zahl ist also, wie vorher, $2^{\pi}(2^{\pi+1}-1)$.

Geht man weiter und setzt zunächst $n=p.c$, wobei p eine Primzahl und c irgend eine zusammengesetzte Zahl bezeichnet, so findet man, wenn für die Divisorensumme von c die Bezeichnung C gewählt wird,

$$(p+1)C=2pc \quad \text{und hieraus} \quad \frac{2c}{C}=\frac{p+1}{p}.$$

Es muss also $2c:m=p+1$ und $C:m=p$ sein, d. h. $2c$ und C haben als grössten gemeinschaftlichen Divisor m und der Bruch $\frac{2c}{C}$ muss nach der Reduction durch diesen die Form $\frac{p+1}{p}$ annehmen. Dieser Forderung genügt aber nur der Werth 2^α für c; dann ist $C=2^{\alpha+1}-1$ und $\frac{2^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}-1}=\frac{p+1}{p}$, woraus dann wieder $p=2^{\alpha+1}-1$ folgt; man gelangt also auch hier zu demselben Resultat, wie in beiden vorhergehenden Fällen.

In diesen Fall ist auch eingeschlossen, dass die Zahl n das Product von mehr als zwei einfachen Primzahlen ist; es bedarf mithin für die bezügliche Annahme keiner besondern Untersuchung, und es bleibt nur noch übrig, den Fall einer Erörterung zu unterziehen, in welchem die Zahl n als das Product zweier zusammengesetzten Zahlen darstellbar ist, also $n=a.c$. Bezeichnet man die Divisorensummen von a und c mit A und C und setzt $A-a=g$, $C-c=h$, so folgt

$$(a+g)(c+h)=2ag$$

oder

$$ac\left(1+\frac{g}{a}\right)\left(1+\frac{h}{g}\right)=2ag$$

und

$$\left(1+\frac{g}{a}\right)\left(1+\frac{h}{c}\right)=2$$

und endlich

$$\frac{g}{a}+\frac{h}{c}+\frac{g}{a}\cdot\frac{h}{c}=1.$$

Die Forderung spitzt sich also auf Folgendes zu. Es sind zwei echte Brüche zu finden, deren Zähler grösser als 1 ist, da ja a und c zusammengesetzte Zahlen sein sollen. Die Summe dieser Brüche und ihres Productes muss gleich 1 sein, und jede derselben muss das Verhältniss der Differenz zwischen Divisorensumme und einer Zahl zu der Zahl selbst darstellen. Die Möglichkeit, diesen Bedingungen zu genügen, scheint wenigstens nicht ausgeschlossen zu sein, wenn auch die bis jetzt bekannten vollkommenen Zahlen, die einfachste, d. h. 6, mit eingeschlossen, sämmtlich an die Form $2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)$ gebunden sind.

Was diese letzteren nun betrifft, so erwähnt sie schon **Euklid**, und giebt an, wie sie zu finden sind. In den Werken späterer Mathematiker trifft man vielfach Zusammenstellungen solcher Zahlen, theilweise auch zu mystischen Zwecken. Aber diese Zusammenstellungen sind durchweg fehlerhaft. Theilweise enthalten sie Zahlen, in welchen der zweite Factor $2^{\alpha+1}-1$ nachweislich keine Primzahl ist, wie beispielsweise in der Arithmetica von **Nic. Tartaglia** (Paris 1613), oder aber Zahlen, bei denen es offenbar Nichts als Vermuthung ist, dass der Factor $2^{\alpha+1}-1$ eine Primzahl sei, wie die von **Mersenne** in seinen Cogitata physico-mathematica gegebenen

$2^{67}-1$, $2^{127}-1$ und $2^{257}-1$. Auch der Petersburger Mathematiker G. W. Krafft giebt in seinem Verzeichniss von zehn vollkommenen Zahlen zwei falsche an, nämlich diejenigen mit dem Factor $2^{41}-1$ und $2^{47}-1$. Für diese beiden beruft er sich darauf, dass L. Euler ihm gelegentlich mitgetheilt habe, es seien beide Zahlen Primzahlen. (Comm. Petrop. T. VII.) Es hat jedoch $2^{41}-1$ den Factor 13367 und $2^{47}-1$ den Factor 2351, wie zuerst von E. Lucas angegeben wurde. (Am. Journ. of Math. Vol. I, 1878.) Euler selbst hat hiervon nichts erwähnt; wohl aber wies er nach, wie bekannt ist, dass $2^{31}-1$ eine Primzahl ist, so dass $2^{30}.(2^{31}-1)$ eine vollkommene Zahl ist. Sie ist die achte und grösste in der ganzen Reihe der bis dahin bekannten, die vorhergehenden enthalten bezüglich den Primfactor 2^2-1, 2^3-1, 2^5-1, 2^7-1, $2^{13}-1$, $2^{17}-1$, $2^{19}-1$; die übrigen Binome dieser Art bis zu $2^{31}-1$ sind keine Primzahlen. Ueber diese Grenze hinaus findet sich für $2^{37}-1$ der Factor 223 und für $2^{43}-1$ bei Krafft der Factor 431 erwähnt, für $2^{53}-1$ gab Lucas an dem citirten Orte den Factor 69431 an und ich fand für $2^{59}-1$ den Factor 179951. Da überall nur Exponenten in Frage kommen können, die Primzahlen sind, so bietet also die Folge von $2^{31}-1$ an aufwärts bis zu $2^{59}-1$ einschliesslich keine Primzahl dar.

Dagegen ist $N=2^{61}-1$ eine Primzahl. Ich fand dies, wie folgt. Zunächst lässt sich $2^{61}-1$ auch schreiben $2.(2^{30})^2-1$, es ist also $+2$ Determinante oder quadratischer Rest für jeden etwaigen Factor von N; diese Factoren können also nur von der Form $8n+1$ und $8n+7$ sein. Da nun in allen übrigen Fällen, in welchen 2^a-1 nachweislich zusammengesetzt ist, der kleinere Factor die Form $8n+7$ hat, und weil ausserdem für den Fall dreier Factoren jeder diese Form haben könnte, so richtete sich die Untersuchung zuerst auf derartige Factoren. Ich benutzte hierbei die Determinanten $+3.7$, $+13.31.59$, $+3.13.223$, $+5.47.223$, $-11.13.41.43.47$, $+5.7.11.71.151$, $-7.73.227.251$, $-11.13.71.499$ und $+131.367$, die ich aus binären quadratischen Darstellungen von N entnahm, und konnte constatiren, dass bis zu $\sqrt[3]{N}$ kein Divisor $8n+7$ existirt, dass also die Zahl höchstens zwei Factoren, einen von der Form $8n+7$, den andern von der Form $8n+1$ besitzen konnte. Ich vermuthete aber, dass sie überhaupt nicht zusammengesetzt sei, und versuchte, ob etwa $a^{N-1}\equiv 1 \pmod N$ sei. Als a wählte ich 3 und $N-1$ zerlegte ich in seine Factoren $1321.331 \times 151.61.41.31.25.13.11.9.7.2$. Zunächst bestimmte ich den Rest A von 13^{1321} für den $mod N$, dann von A^{331}, den Rest B für denselben Modul u. s. w. und es ergab sich zuletzt

1) $$3^{1321.331.151.61.41.31.25.13.11.7.2}\equiv 1 \pmod N.$$

Es ist nämlich

$$3^{1321}\equiv 787129\ 795740\ 558444,$$
$$A^{331}\equiv 217998\ 394871\ 602223,$$
$$B^{151}\equiv 150777\ 982738\ 043149,$$

$$\begin{aligned}
C^{61} &\equiv 1\,112024\,330179\,388289, \\
D^{41} &\equiv -80608\,696386\,672208, \\
E^{31} &\equiv -568631\,149052\,601525, \\
F^{25} &\equiv 347515\,800658\,063717, \\
G^{13} &\equiv -410019\,352368\,443721, \\
H^{11} &\equiv -1\,165310\,750493\,918737, \\
J^{14} &\equiv 1
\end{aligned}$$

für $mod\, N$.

Bezeichnet man jetzt die beiden etwaigen Factoren von N mit f und F und den Exponenten in 1) mit β, so muss zunächst für F zugleich

$$3^{\beta} \equiv 1\,(mod\,F) \text{ und } 3^{F-1} \equiv 1\,(mod\,F)$$

sein und es müsste entweder $F-1=\beta$ sein oder, wenn sie verschieden sind, β in $F-1$ oder endlich $F-1$ in β aufgehen. Bezeichnet aber F speciell den fraglichen Factor von der Form $8n+1$, so kann $F-1$ nicht in β aufgehen, weil dies die Zahl 2 nur einmal als Factor enthält. $F-1$ kann aber auch nicht gleich β oder $F=\beta+1$ sein; denn dies erforderte einen zweiten Factor <9, weil $9\beta+1=N$ ist, der nicht existirt; noch weniger könnte β in $F-1$ aufgehen. Die Zahl

$$N = 2^{61}-1 = 2305843009213693951$$

ist also eine Primzahl und demnach

$$2^{60}.(2^{61}-1)$$

die neunte vollkommene Zahl.*

Bremen, im April. P. Seelhoff.

XIV. Ueber die Inversion der von Legendre definirten vollständigen elliptischen Integrale zweiter Gattung für ihre reellen Moduln.

Den unmittelbaren Anlass zur Aufstellung des Inversionsproblems für die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung hatte, wie im Eingange unseres früheren Aufsatzes über diesen Gegenstand dargelegt wurde, eine Entwickelung aus dem Gebiete der analytischen Mechanik gegeben; es ist nun keineswegs schwer, auch solche Probleme zu bilden, deren Lösung die Inversion der Integrale zweiter Gattung postulirt. Zu diesem Zwecke bietet schon die bekannte Beziehung zur Ellipse, welcher die „elliptischen" Integrale ihren Namen verdanken, einen ganz geeigneten Anknüpfungspunkt und führt z. B. zur Formulirung folgender Aufgabe:

Auf einer Rotationsmaschine sind die in der Experimentalphysik gebräuchlichen sogenannten „Abplattungsringe" aufgesteckt. Wir setzen voraus, dieselben seien ursprünglich genau kreisförmig gewesen und hätten

---

* Ich finde nirgends erwähnt und hebe es deshalb hier noch hervor, dass in $2^{37}-1$, $2^{41}-1$ u. s. w. bis $2^{59}-1$ der zweite grössere Factor jedesmal eine Primzahl ist.

infolge der Rotation (ohne aber ihre Peripherie auszudehnen) eine elliptische Gestalt angenommen, wobei eine der beiden Axen um $\frac{1}{n}$ ihrer früheren Länge vergrössert worden sei: in welchem Verhältniss hat sich dann die andere Axe verkleinert?

Die Lösung ist in Kürze folgende. Aus dem Kreisquadranten $r\cdot\frac{\pi}{2}$ ist bei der Rotation ein Ellipsenquadrant geworden, dessen Rectification bekanntlich das Resultat $a.E(mod k)$ ergiebt, wobei a die halbe grosse Axe und k die numerische Excentricität bedeutet. Weil nun im gegebenen Falle

$$a=r\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ist, so hat man die Gleichung:

$$r\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot E(mod k)=r\cdot\frac{\pi}{2},$$

also:

$$E(mod k)=\frac{n.\pi}{2(n+1)},$$

und nun besteht der nächste Schritt nothwendig darin, diese Gleichung für k aufzulösen. Damit sind wir auf das Problem gestossen: das von Legendre definirte* vollständige elliptische Integral zweiter Gattung für seinen reellen Modul zu invertiren, und wollen zunächst dazu übergehen, die allgemeine Lösung dieses Problems zu entwickeln.

I. Inversion des Integrals E bei kleineren Werthen des Modulus.

Die bekannte Reihe:

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2c^2-\left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3c^4-\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5c^6-\dots\right\}$$

nimmt für $4\left(1-\frac{2E}{\pi}\right)=u$ und $c^2=x$ die Form an:

$$1)\qquad u=x+\left(\frac{1}{4}\right)^2 3x^2+\left(\frac{1.3}{4.6}\right)^2 5x^3+\left(\frac{1.3.5}{4.6.8}\right)^2 7x^4+\dots$$

und kann nun mit der Formel von Lagrange** invertirt werden; dann erscheint das Quadrat des Modulus direct als Function von u.

Dankbarer ist indess die Methode der Limitation. Setzt man zur Abkürzung:

$$2)\qquad L(x)=1+\left(\frac{1}{4}\right)^2 3x+\left(\frac{1.3}{4.6}\right)^2 5x^2+\left(\frac{1.3.5}{4.6.8}\right)^2 7x^3+\dots$$

und multiplicirt beiderseits mit x, so erhält man zufolge Gleichung 1):

* Die Inversion des von Weierstrass definirten vollständigen ellipt. Integrals zweiter Gattung wird im Späteren noch besonders untersucht werden.

** Vergl. diese Zeitschrift 1886, S. 38.

$$u = x \, . \, L(x), \quad x = \frac{u}{L(x)}.$$

Sei nun

$$x_1 = \frac{u}{L(0)},$$

so folgt aus $L(0) = 1$, dass $x_1 = u = 4\left(1 - \frac{2E}{\pi}\right)$ ist. Und wenn weiter gesetzt wird:

$$x_2 = \frac{u}{L(x_1)},$$

so fragt sich zunächst, ob und in welchem Bereich die Convergenz der Reihe $L(x_1)$ gesichert sei.

Nun findet man aber durch sehr naheliegende Gründe, dass zu diesem Zwecke der Werth von E grösser als $\frac{3}{8}\pi$ bleiben muss. Da der grösstmöglichste Werth von E gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, so steht unter der Voraussetzung $\frac{3}{8}\pi < E < \frac{\pi}{2}$ nichts im Wege, die obigen Definitionen fortzusetzen und zu schreiben:

$$x_3 = \frac{u}{L(x_2)}, \quad x_4 = \frac{u}{L(x_3)} \quad \text{etc.};$$

dann folgt der Reihe nach aus:

$$0 < x,$$

dass

$$L(0) < L(x), \quad \frac{u}{L(0)} > \frac{u}{L(x)}, \quad x_1 > x > 0,$$

$$L(x_1) > L(x) > L(0), \quad \frac{u}{L(x_1)} < \frac{u}{L(x)} < \frac{u}{L(0)}, \quad 0 < x_2 < x < x_1 \quad \text{etc.}$$

Schliessen wir nunmehr in ähnlicher Weise, wie es im dritten Abschnitt der früheren Abhandlung über die Inversion der vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung geschehen ist, weiter, so ergiebt sich zuletzt das Resultat:

3) $$x = \lim \frac{u}{L(x_n)}, \quad x_0 = 0.$$

Die Näherungswerthe oscilliren, aber die Berechnung derselben ist unbequem, weil die Reihe 2) schlecht convergirt. Es liegt daher nahe, für den Zweck der Inversion des Integrals E, ebenso wie früher bei K, die Hilfsgrösse q in Dienst zu ziehen.

Jacobi giebt bezüglich des Integrals E u. a. die Gleichung:*

4) $$\frac{2K}{\pi} \cdot \frac{2K}{\pi} - \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{2E}{\pi} = 8\left\{\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \dots\right\}.$$

Nun ist identisch:

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} = \frac{q^n}{2}\left\{\frac{1}{1+q^n} + \frac{1}{1-q^n}\right\},$$

daher lässt sich die Gleichung 4) auch aufschreiben in der Form:

* Fund. n. p. 135.

$$5)\quad \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi}-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi}=4\left\{\frac{q}{1+q}+\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{1+q^2}+\frac{2q^2}{1-q^2}+\frac{3q^3}{1+q^3}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\ldots\right\}.$$

Subtrahirt man sie nunmehr von der folgenden:*

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi}=1+4\left\{\frac{2q}{1-q}+\frac{4q^2}{1+q^2}+\frac{6q^3}{1-q^3}+\ldots\right\},$$

so ergiebt sich:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi}=1+8\left\{\frac{q^2}{1-q^2}-\frac{2q^4}{1-q^4}+\frac{3q^6}{1-q^6}-\ldots\right\}$$

$$=1+8\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}},$$

und wenn dieses Resultat schliesslich noch dividirt wird durch die Gleichung:**

$$\frac{2K}{\pi}=1+4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}},$$

so erhält man zwischen den Grössen E und q die unmittelbare Relation:

$$\frac{2E}{\pi}=\frac{1+8\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}}{1+4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}}.$$

Nun kann man durch Ausdividiren der Brüche und Addition der Resultate sowohl den Zähler, als auch den Nenner sehr leicht in eine Reihe entwickeln. Für den Nenner ist übrigens das Gesetz, nach welchem die Glieder aufeinander folgen, von Jacobi ausgedrückt worden durch die Formel:

$$\frac{2K}{\pi}=1+4\,\Sigma\psi(n)q^{2^l(4m-1)^2n},$$

wobei „n *numerus impar, cuius factores primi omnes formam* 4a + 1 *habent,* ψ(n) *numerus factorum ipsius* n; l ,m *numeri omnes* a 0 *usque ad* ∞“.***

Diese Formel ist aber nicht correct; aus ihr lässt sich eine gewisse Classe von Gliedern, die in der Reihe thatsächlich vorkommen, z. B. q^{441}, $2.q^{2205}$ etc., gar nicht ableiten. In der von Borchardt besorgten Ausgabe der „Gesammelten Werke Jacobi's“ ist dieser Irrthum aber schon berichtigt worden. Dort heisst es nämlich:† „*Porro sit* m *numerus impar, cuius factores primi omnes formam* 4a − 1, n *numerus impar, cuius factores primi omnes formam* 4a + 1 *habent,* ψ(n) *numerus factorum ipsius n, l numerus quicunque* a 0 *usque ad* ∞: *obtinemus*

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}=1+4\,\Sigma\,\psi(\mathrm{n})\,\mathrm{q}^{2^l\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{n}}.“$$

* Gebildet aus Fund. n p. 103 Nr. 8.

** Fund. n. p. 103 Nr. 4.

*** Ibid. p. 105.

† Bd. I p. 161 u. 1[illegible].

Es bleibt also nur noch für den **Zähler** das Gesetz zu finden, nach welchem die Reihe fortschreitet. Dasselbe kann einfach folgendermassen formulirt werden:

$$1+8\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}=1+8\sum_{p=1}^{p=\infty}\{\chi(p)-\xi(p)\}\,q^{2p},$$

wobei $\chi(p)$ die Summe aller ungeraden, $\xi(p)$ die Summe aller geraden Factoren bedeutet, welche in p enthalten sind.*

Wir haben also:

$$\frac{2E}{\pi}=\frac{1+8\Sigma\{\chi(p)-\xi(p)\}\,q^{2p}}{1+4\Sigma\psi(n)\,q^{2^l.m^2.n}}$$

$$=\frac{1+8q^2-8q^4-32q^6-40q^8+48q^{10}-32q^{12}+64q^{14}-104q^{16}+104q^{18}-48q^{20}+\dots}{1+4q+4q^2+4q^4+8q^5+4q^8+8q^{10}+8q^{13}+4q^{16}+8q^{17}+4q^{18}+8q^{20}+\dots}.$$

Durch Ausführung der Division findet man hieraus:

$$6)\quad \frac{2E}{\pi}=1-4\left\{\begin{array}{c} q-5q^2+16q^3-41q^4+98q^5-224q^6 \\ +480q^7-977q^8+1946q^9-3758q^{10}+7068q^{11} \\ -13024q^{12}+23502q^{13}-41640q^{14}+72576q^{15}-+ \end{array}\right\}.$$

Setzt man nun:

$$7)\qquad \frac{1}{4}\left(1-\frac{2E}{\pi}\right)=u$$

und invertirt nach **Lagrange**, so findet sich:

$$8)\qquad q=u+5u^2+34u^3+266u^4+2250u^5+19992u^6+\dots$$

und diese Reihe ist in der That brauchbar für alle Werthe des Integrals E, welche von seiner oberen Grenze $\frac{\pi}{2}$ nicht zu weit entfernt sind.

Wählen wir z. B. aus Tafel VIII in **Legendre's** Traité des Fonct. Ellipt. etwa den Werth $E=1{,}4674662$, so findet sich dabei angegeben der Modulus $k=\sin 30^0$. Nun ist aber für den genannten Betrag von E die Grösse $u=0{,}01644617$, und hiernach aus der invertirten Reihe 8): $q=0{,}0179727$, woraus mit Hilfe der Formeln $\sqrt{k'}=\frac{1-2q+2q^4-\dots}{1+2q+2q^4+\dots}$ und $k=\sqrt{1-(k')^2}$ sich als Resultat ergiebt:

$$k=\sin 30^0\,0'\,0{,}08''.$$

Nehmen wir aber die **Mittelwerthe** für E und k an, nämlich:

$$E=1{,}3506439,\quad k=\sin 45^0,$$

so ergiebt die Rechnung: $u=0{,}03530835$, und nun zeigt sich, dass die Reihe 8) uns im Stiche lässt. Wir gehen daher zur Limitation über und setzen zufolge 6) und 7):

---

* Die Differenz $\chi(p)-\xi(p)$ stimmt überein mit dem negativen Werthe der von Geh. Rath **Lipschitz** (Comptes rendus, 1885, p. 846) unter der Bezeichnung $l(m)$ behandelten Function.

9) $$u = q(1 - 5q + 16q^2 - 41q^3 + \ldots) = q.L(q);$$

$$q = \frac{u}{L(q)}, \quad q_1 = \frac{u}{L(0)}, \quad q_2 = \frac{u}{L(q_1)} \text{ etc.};$$

dann lässt sich wieder ganz in der früheren Weise ableiten:

10) $$q = lim \frac{u}{L(q_n)}, \quad q_0 = 0.$$

Die Rechnung ergiebt:

$q_1 = 0{,}035,$ $q_6 = 0{,}043211,$
$q_2 = 0{,}041,$ $q_7 = 0{,}0432134,$
$q_3 = 0{,}0429,$ $q_8 = 0{,}0432138,$
$q_4 = 0{,}0431,$ $q_9 = 0{,}0432139,$
$q_5 = 0{,}043199,$ $q_{10} = 0{,}0432139,$

und hieraus:

$$k = sin\, 45^0\, 0'\, 0{,}48''.$$

Für alle Werthe des Modulus, welche kleiner als $sin\, 45^0$ sind, führt die gegenwärtige Methode natürlich rascher zum Ziele, allein auch noch jenseits dieser Grenze bleibt sie anwendbar; z. B. für $E = 1{,}1$ ergiebt sich:

$q_1 = 0{,}074,$ . . . .
$q_2 = 0{,}016,$ $q_{20} = 0{,}1436118,$
. . . . . $q_{21} = 0{,}1436118;$

$$k = sin\, 72^0\, 7'\, 31{,}07''.$$

II. Inversion des Integrals E für grössere Werthe des Modulus durch Vermittelung von q'.

Nachdem im Vorigen von $\frac{\pi}{2}$ an abwärts bis in die Nähe der unteren Grenze des Integrals E, welche bekanntlich durch die Einheit bezeichnet wird, die Inversion geleistet ist, bleibt nur noch das kleine Intervall:

$$1 < E < 1{,}1$$

zu behandeln übrig. Obschon die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, dass auch innerhalb dieses Gebietes noch die zuletzt erörterte Methode anwendbar bleibt, so muss die Rechnung doch eine so langwierige werden, dass man lieber davon Abstand nehmen und — wie das auch schon bei der Inversion des Integrals K geschehen ist — nach einem Mittel suchen wird, um statt der Grösse q die complementäre Grösse q' zu berechnen. Man wird also zunächst dahin streben müssen, eine unmittelbare Relation zwischen E und q' herzustellen.

Zu diesem Zwecke gehen wir aus von der bekannten Legendre'schen Gleichung, welche in der bisher von uns benutzten Bezeichnungsweise heisst:

11) $$K'(E - K) + KE' = \frac{\pi}{2}.$$

Sodann greifen wir zurück auf die im vorigen Abschnitt benutzte Gleichung:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi}-\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi}=8\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}$$

und multipliciren beiderseits mit $-\frac{\pi^2}{4K}$, so kommt:

$$E-K=-\frac{\pi^2}{4K}\cdot 8\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}.$$

Substituirt man diesen Werth in 11), so ergiebt sich:

$$-\frac{K'}{K}\cdot\frac{\pi^2}{4}\cdot 8\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}+KE'=\frac{\pi}{2},$$

$$KE'=\frac{\pi}{2}\left\{1+\pi\frac{K'}{K}\cdot 4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\right\},$$

12) $$E'=\frac{1+\frac{\pi.K'}{K}\cdot 4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}}{\frac{2K}{\pi}}.$$

Weil aber, wie schon mehrfach erwähnt,

$$\frac{2K}{\pi}=\left\{1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{n^2}\right\}^2=1+4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}$$

ist, so bleibt, um E' vollständig als Function von q auszudrücken, in der Gleichung 12) nur noch die Grösse $\frac{\pi K'}{K}$ zu eliminiren übrig.

Nun ist bekanntlich:

$$q=e^{-\frac{\pi K'}{K}},\quad \log\frac{1}{q}=\frac{\pi K'}{K}.$$

Setzen wir diesen Werth in Gleichung 12) ein, so ist eine directe Beziehung zwischen E' und q hergestellt, und zwar:

$$E'=\frac{1+4\log\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}}{1+4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}},$$

wofür wir natürlich auch schreiben können:

13) $$E=\frac{1+4\log\frac{1}{q'}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq'^n}{1-q'^{2n}}}{1+4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\frac{q'^{2n-1}}{1-q'^{2n-1}}}.$$

Bezüglich der Reihenentwickelung ist nunmehr im Nenner wiederum die im vorigen Abschnitte angegebene Formel von Borchardt einzusetzen. Was aber die im Zähler enthaltene Summe $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq'^n}{1-q'^{2n}}$ betrifft, so kann man Folgendes erwägen.

Wird irgend einer der in dieser Summe enthaltenen Brüche in eine Reihe entwickelt, so ergiebt sich allgemein:

$$n\frac{q'^n}{1-q'^{2n}} = n\sum_{a=0}^{a=\infty} q'^{(2a+1)n}.$$

Demnach kann bei der Darstellung von $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq'^n}{1-q'^{2n}}$ eine bestimmte Potenz q'^k offenbar nur vorkommen in der Entwickelung des Bruches $\frac{kq'^k}{1-q'^{2k}}$ und in den Entwickelungen der früheren, niemals aber in denen der späteren Brüche.

Nehmen wir einen der früheren Brüche, etwa den $(k-u)^{\text{ten}}$, so kommt bei ihm die Potenz q'^k nur dann vor, wenn k sich auf die Form $(2a+1)(k-u)$ bringen lässt, wobei a eine beliebige ganze Zahl bedeutet, und in diesem Falle hat q'^k den Factor $(k-u)$ oder $\frac{k}{2a+1}$. Wir dürfen daher den vollständigen Coefficienten von q'^k mit $\sum_r\left(\frac{k}{r}\right)$ bezeichnen, wobei r alle ungeraden Factoren durchläuft, welche in der Zahl k enthalten sind. Demnach wäre $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq'^n}{1-q'^{2n}} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\Sigma_r\left(\frac{n}{r}\right)q'^n$. Dieselbe Summe könnte auch mit $\Sigma n\chi_1(n)q'^n$ bezeichnet werden, wobei $\chi_1(n)$ die Summe der reciproken Werthe aller in n enthaltenen ungeraden Divisoren bedeutet. Allein es ist gar nicht nöthig, an dieser Stelle eine neue Function einzuführen, da die früheren Functionen $\chi(n)$ oder $\psi(n)$ für den vorliegenden Zweck völlig ausreichen. Man findet nämlich leicht:

$$\sum_r \Sigma_r\left(\frac{n}{r}\right)q'^n = \sum\frac{n}{s}\chi(n)\,q'^n = \sum 2^l\psi(p)\,q'^{2^l p},$$

wobei einerseits n alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞ zu durchlaufen hat und s den grössten ungeraden Factor bedeutet, der in n enthalten ist, während andererseits l alle positiven ganzen Zahlen von der Null an, und p alle ungeraden positiven Zahlen durchläuft. Bei Benutzung der letzteren Darstellung geht die Formel 13) über in die folgende:

$$E = \frac{1+4\log\frac{1}{q'}\Sigma 2^l\psi(p).q'^{2^l.p}}{1+4\Sigma\psi(n)\,q'^{2^l.m^2.n}}$$

oder

$$14)\qquad E = \frac{1+4q'\log\frac{1}{q'}\Sigma 2^l\psi(p).q'^{2^l.p-1}}{1+4\Sigma\psi(n)\,q'^{2^l.m^2.n}}$$

und hieraus entwickelt sich auf einfache Weise:

$$15)\qquad q' = \frac{\frac{1}{4}\{E(1+4\Sigma\psi(n)\,q'^{2^l\cdot m^2\cdot n})-1\}}{\log\frac{1}{q'}\cdot\Sigma 2^l\psi(p)\,q'^{2^l\cdot p-1}},$$

statt deren zur Abkürzung gesetzt werden soll:

$$q' = L(E, q').$$

Auf Grund dieser Gleichung können wir jetzt die Inversion durch das Limitationsverfahren zur Ausführung bringen.

Der Beweis, dass die Limitation im vorliegenden Falle überhaupt zum Ziele führt, wird etwas erschwert durch den aus Gleichung 15) sofort ersichtlichen Umstand, dass keiner der beiden Grenzwerthe 0 und 1, welche die Grösse q' haben kann, einen geeigneten Ausgangspunkt für das Verfahren darbietet. Wir müssen also zwischen 0 und 1 einen beliebigen Werth auswählen, den wir mit q'_0 bezeichnen, und der entweder grösser oder kleiner sein kann, als der gesuchte Werth q'.

Angenommen erstens $q'_0 < q'$.

Setzt man dann definirend:

$$q'_1 = L(E, q'_0),$$

so sind zunächst zwei für die folgende Betrachtung durchaus wesentliche Fragen zu beantworten, nämlich einerseits, ob q'_1 kleiner oder grösser als q', andererseits, ob q'_1 kleiner oder grösser als q'_0 sein wird.

Um die erstere zur Entscheidung zu bringen, entwickeln wir in Gleichung 15) die Summen in ihren ersten Gliedern, wobei sich ergiebt:

$$16)\qquad q' = \frac{\frac{1}{4}\{E(1+4q'+4q'^2+4q'^4+\ldots)-1\}}{\log\frac{1}{q'}(1+2q'+4q'_2+4q'^3+6q'^4+\ldots)} = L(E, q'),$$

und bilden nun den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial L}{\partial q'}$, wobei wir E als constant ansehen. Derselbe ist gleich einem Bruche, dessen Nenner $\left\{\log\frac{1}{q'}(1+2q'+2q'^2+4q'^3+\ldots)\right\}^2$ heissen wird, also jedenfalls positiv ist. Der Zähler des Differentialquotienten enthält zunächst ein positives Glied, entstanden durch Multiplication des Nenners von 16) mit dem Differentialquotienten des Zählers von 16). Abgesehen von dem Factor $\frac{1}{4}$, heisst dieses Glied:

$$E\log\frac{1}{q'}(1+2q'+4q'^2+\ldots)(4+8q'+16q'^3+\ldots).$$

Sodann hat der Zähler des gesuchten Differentialquotienten ein negatives Glied, entstanden aus der Multiplication des Zählers von 16) mit dem Differentialquotienten des bez. Nenners. Dieses Glied lautet:

$$-\{E(1+4q'+4q'^2+\ldots)-1\}\left\{-\frac{1}{q'}(1+2q'+4q'^2+\ldots) + \log\frac{1}{q'}(2+8q'+12q'^2+\ldots)\right\}.$$

Löst man diese Klammern auf, so kommen aus denselben wieder zwei positive Glieder zum Vorschein, nämlich:

$$+E\frac{1}{q'}(1+4q'+4q'^2+\ldots)(1+2q'+4q'^2+\ldots)$$
$$+\log\frac{1}{q'}(2+8q'+12q'^2+\ldots)$$

und zwei Glieder bleiben negativ, nämlich:

$$-\frac{1}{q'}(1+2q'+4q'^2+4q'^3+\ldots),$$
$$-E\log\frac{1}{q'}(2+8q'+12q'^2+\ldots)(1+4q'+4q'^2+\ldots).$$

Sondert man nun einerseits $E\log\frac{1}{q'}$, andererseits $\frac{1}{q'}(1+2q'+4q'^2+\ldots)$ als Factor ab, so kann man dem Zähler des Differentialquotienten $\frac{\partial L}{\partial q'}$ die Form geben:

$$E\log\frac{1}{q'}\left\{\begin{matrix} 4+8q'+16q'^2+\ldots+8q'+16q'^2+\ldots+16q'^2+16q'^3+\ldots \\ -2-8q'-12q'^2-\ldots-8q'-32q'^2-\ldots-8q'^2-32q'^3-\ldots \end{matrix}\right\}$$
$$+\log\frac{1}{q'}(2+8q'+12q'^2+\ldots)$$
$$+\frac{1}{q'}(1+2q'+4q'^2+\ldots)\{E(1+4q'+4q'^2+\ldots)-1\}.$$

Das zweite Glied ist stets positiv, das dritte ebenfalls, weil ja bei allen in Betracht kommenden Fällen $E>1$ ist. Das erste Glied lässt sich, da in demselben die Terme mit q' sich gegenseitig aufheben, in die Form bringen:

$$E.\log\frac{1}{q'}(2+q'^2.\lambda-q'^2.\mu),$$

wobei unter λ und μ Functionen von q' verstanden sind, welche die Eigenschaft haben, mit q' zugleich stetig abzunehmen und sich dabei entweder der Null, oder irgend einem positiven, festen Grenzwerthe zu nähern.

Demnach wäre es wohl möglich, dass auch dieses erste Glied für alle Werthe von q' positiv ausfallen, dass mithin der ganze Differentialquotient $\frac{\partial L}{\partial q'}$ stets positiv sein könnte; unmöglich aber kann dieser Differentialquotient stets negativ sein; denn abgesehen von dem stets positiven zweiten und dritten Gliede, muss ja für einen gewissen kleinen Werth von q' das Glied $q'^2.\mu$ jedenfalls unter die Grösse 2 herabsinken, und dann muss für diesen und alle noch kleineren Werthe von q' der ganze Differentialquotient positiv sein. Auf diesen nothwendig existirenden Bereich schränken wir nunmehr unsere Betrachtung über die Grösse q' ein.

In dem ganzen Gebiet, wo $\frac{\partial L}{\partial q'}>0$ ist, muss L mit q' zugleich zu- und abnehmen, mithin folgt aus unserer früheren Annahme:

dass:
$$q'_0 < q',$$
$$L(E, q'_0) < L(E, q')$$
ist, wenn E beide Male denselben Werth hat, oder, was ganz dasselbe besagt, es folgt:
$$q'_1 < q',$$
und damit ist die erste der beiden vorhin gestellten Fragen entschieden. —

Bezeichnen wir jetzt denjenigen Werth von E, welcher entsteht, wenn man in der Gleichung 14) statt q' überall q'_0 einsetzt, mit E_0, so geht die Gleichung 15) über in die Form:
$$q'_0 = L(E_0, q'_0).$$

Um nun zunächst das Verhältniss zwischen E und E_0 festzustellen, muss daran erinnert werden, dass, wenn der Modulus k wächst, die Grösse q ebenfalls wächst, das Integral E aber zugleich ununterbrochen abnimmt. Dem Wachsen des Modulus k entspricht eine Abnahme des complementären Modulus k', sowie auch eine Abnahme der complementären Hilfsgrösse q'; es nehmen also k', q' und E gleichzeitig ab. Weil nun $q'_0 < q'$, so ist auch $E_0 < E$.

Durch den Augenschein überzeugt man sich aber sofort, dass die Function

17) $$L(E, q'_0) = \frac{\frac{1}{4}\{E(1 + 4q'_0 + 4q'^2_0 + \ldots) - 1\}}{\log \frac{1}{q'_0}(1 - 2q'_0 + 4q'^2_0 + \ldots)}$$

bei constantem q'_0 mit E zugleich zu- und abnehmen muss. Weil daher $E_0 < E$, so ist auch:
$$L(E_0, q'_0) < L(E, q'_0)$$
oder, was dasselbe ist:
$$q'_0 < q'_1.$$
Hierdurch ist auch die zweite unserer obigen Fragen entschieden, und man hat demnach die Relation:
$$q'_0 < q'_1 < q'.$$
Damit ist für alles Folgende Bahn gebrochen. Denn gehen wir weiter und setzen:
$$q'_2 = L(E, q'_1),$$
so wiederholt sich die vorige Betrachtung ganz in gleicher Weise und liefert das Resultat:
$$q'_0 < q'_1 < q'_2 < q'.$$

So kann man nun beliebig weit fortschreiten, wenn man nur nicht über die Grenze hinweggeht, wo $\frac{\partial L}{\partial q'}$ etwa aufhört, einen positiven Werth zu haben. Unter diesem Vorbehalt ist die Approximation eine ganz ununterbrochene, beliebig enge, und wir können schreiben:
$$q'_0 < q'_1 < q'_2 \ldots < q'_n < q',$$
18) $$q' = \lim L(E, q'_n).$$

Nun war aber die gegenwärtige Erörterung basirt auf die besondere Voraussetzung $q'_0 < q'$. Setzen wir daher zweitens den Fall $q'_0 < q'$. Dann folgt aus $\frac{\partial L}{\partial q'} > 0$, dass:

$$L(E, q'_0) > L(E, q'), \text{ also } q'_1 > q'.$$

Ferner folgt, dass $E_0 > E$, also auch

$$L(E_0, q'_0) > L(E, q'_0), \text{ mithin } q'_0 > q'_1,$$

und man hat:

$$q'_0 > q'_1 > q'.$$

Setzt man wiederum weiter:

$$q'_2 = L(E, q'_1),$$

so ergiebt sich aus denselben Gründen:

$$q'_0 > q'_1 > q'_2 > q'$$

und so fort:

$$q'_0 > q'_1 > q'_2 \ldots > q'_n > q'.$$

Es nähert sich also auch in diesem Falle jeder folgende Werth dem gesuchten, und zwar von oben, immer mehr und mehr, und das Schlussresultat ist wieder dasselbe:

$$q' = \lim L(E, q'_n).$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, aus einem vollständigen elliptischen Integral E, dessen Werth zu klein ist, als dass nach der früheren Methode q daraus leicht bestimmt werden könnte, statt dessen die complementäre Grösse q' zu ermitteln. Da aber vorhin ausdrücklich vorausgesetzt wurde, dass die ganze Erörterung nur gelten solle für einen gewissen Bereich, innerhalb dessen q' nur kleine Werthe annehmen darf, so muss nunmehr untersucht werden, ob dieser Bereich sich auch wirklich über das ganze am Anfang dieses Abschnittes bezeichnete Intervall:

$$1{,}1 < E < 1$$

ausdehnt oder nicht.

Nehmen wir also die obere Grenze desselben: $E = 1{,}1$, und versuchen, uns dem gewünschten Werthe q' zunächst von unten her zu nähern, indem wir für q'_0 eine kleinere Grösse annehmen, als der muthmassliche Werth von q' betragen wird. Dass die Null hierzu ungeeignet ist, haben wir vorhin schon erwähnt; wir gehen daher von dem kleinsten Werthe aus, den wir mit siebenstelligen Tafeln noch controliren können, und setzen:

$$q'_0 = 0{,}0000001.$$

Dann ergiebt die Rechnung folgende Resultate:

$$\begin{array}{ll} q'_1 = 0{,}002, & \ldots\ldots\ldots \\ q'_2 = 0{,}004, & q'_{12} = 0{,}0061838, \\ q'_3 = 0{,}0052, & q'_{13} = 0{,}0061839, \\ \ldots\ldots & q'_{14} = 0{,}0061839, \end{array}$$

und hieraus:

$$k = \sin 72^0\, 7'\, 31{,}47'',$$

ein Resultat, welches mit dem im vorigen Abschnitt für den Modulus desselben Integrals E auf einem andern Wege ermittelten Werthe genügend übereinstimmt.

Hiermit ist der Beweis erbracht, dass die Brauchbarkeit der zuletzt definirten Function $L(E, q')$ sich thatsächlich bis zu der Grenze $E = 1{,}1$ erstreckt, dass also die im ersten Abschnitt noch übrig gelassene Lücke durch die vorstehende Methode vollkommen ausgefüllt ist. In Wirklichkeit erstreckt sich der Spielraum für die letztere aber noch bedeutend weiter, und zwar, wie leicht nachzuweisen, mindestens bis in die Mitte des ganzen zulässigen Intervalls von $k = \sin 0$ bis $k = \sin 90^0$. Denn setzen wir etwa $k = \sin 45^0$, so hat man $k = k'$, $q = q'$, und da bekanntlich $\log q . \log q' = \pi^2$, so ergiebt sich leicht $q = q' = 0{,}0432139$.

Wenn wir uns nun für $E = 1{,}1$ dem gesuchten Werthe q' einmal von oben her nähern wollen, indem wir setzen $q'_0 = 0{,}0432139$, so ergiebt sich folgende Rechnung:

$$q'_1 = 0{,}021, \qquad \cdots\cdots$$
$$q'_2 = 0{,}012, \qquad q'_{12} = 0{,}0061840,$$
$$q'_3 = 0{,}008, \qquad q'_{13} = 0{,}0061839,$$
$$\cdots\cdots \qquad q'_{14} = 0{,}0061839,$$

was mit dem vorhin gefundenen Werthe von q' übereinstimmt.

Wäre E grösser gewählt worden als 1,1, so würde naturgemäss die Zahl der erforderlichen Näherungswerthe eine geringere gewesen sein. Wir dürfen daher als Ergebniss unserer Untersuchung über die Inversion des von Legendre definirten vollständigen elliptischen Integrals zweiter Gattung für seinen reellen Modulus dies hinstellen, dass in dem Intervall, wo dieser Modulus sich zwischen Null und $\sin 45^0$ bewegt, die Formel 10) des ersten Abschnittes zur Berechnung von q, in dem Intervall von $\sin 45^0$ bis 1 die im gegenwärtigen Abschnitte entwickelte Methode zur Berechnung von q' bequemer zum Ziele führt. In einem kleinen Gebiete von Null bis zu etwa $\sin 30^0$ wird die erstere aber noch übertroffen durch die nach Lagrange invertirte Reihe 8).

Auf Grund der bisherigen Entwickelungen sind wir nunmehr in der Lage, das in der Einleitung aufgestellte Problem zur vollständigen Lösung führen zu können.

Der Werth des Integrals E, und damit also auch die Auswahl unter den vorhin angegebenen Lösungsmitteln ist von dem Werthe der gegebenen Grösse n abhängig. Nehmen wir als solchen etwa die Zahl 20, so ist $E = \frac{10}{21} . \pi = 1{,}496 \ldots$, und nun kann die Inversion schon durch die Reihe 8) geleistet werden. Man hat dabei zu setzen:

$$u = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2E}{\pi}\right) = \frac{1}{84},$$

und die Rechnung ergiebt zunächst $q = 0{,}0126767$. Hieraus müsste k, die numerische Excentricität der Ellipse, ermittelt werden; allein infolge der

bekannten Gleichung $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ hat man für die Hälfte der als Endresultat gesuchten kleineren Axe schon sofort:

$$b = a\sqrt{1-k^2} = ak',$$

und da, wie schon angeführt, $k' = \left(\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}\right)^2$, so findet sich rasch:

$$k' = 0{,}9035396, \quad b = r.0{,}9487166.$$

Wäre der Fall angenommen worden, dass die eine Axe des rotirenden Ringes sich um ein Zehntel ihrer Länge vergrössert hätte, so wäre die Reihe 8) schon nicht mehr anwendbar gewesen zur Ermittelung von q. Man hätte die Limitation nach 10) vornehmen müssen und konnte dabei entweder von der Null oder von dem Mittelwerthe $q_0 = 0{,}0432139$, oder von einem beliebigen zwischenliegenden, aus irgendwelchen Gründen als muthmasslich richtiger erscheinenden Anfangswerthe ausgehen. In allen Fällen gelangt man zu dem Resultate:

$$q = 0{,}0257973, \quad k' = 0{,}8133757, \quad b = r.8947133.$$

Bonn. Dr. C. Isenkrahe.

XV. Ueber die Abstände dreier Punkte von einer Geraden.

Als Correlat der auf S. 64 des lauf. Jahrg. gemachten Bemerkung lässt sich folgende Frage stellen: Wie muss eine Gerade gelegen sein, damit die von den Ecken eines Dreiecks ABC auf dieselbe gefällten Lothe u, v, w die Seiten eines Dreiecks bilden?

Man kann sich zunächst auf solche Gerade beschränken, die das Dreieck ABC nicht schneiden; alsdann ist $u+v+w$ stets >0. Die Gleichungen

$$-u+v+w=0, \quad u-v+w=0, \quad u+v-w=0$$

stellen die Ecken D, E, F eines Dreiecks dar, dessen Seiten durch A, B, C parallel zu BC, CA, AB gezogen sind.

Wenn die Gerade uvw das Dreieck DEF nicht schneidet und von D um δ, von E und F, also auch A, B, C um mehr entfernt ist, so hat eine durch D gelegte Parallele die Coordinaten $u-\delta$, $v-\delta$, $w-\delta$, und es ist

$$-(u-\delta)+(v-\delta)+(w-\delta)=0,$$

also

$$-u+v+w=\delta.$$

Hieraus folgt

$$u-v+w=2w-\delta, \quad u+v-w=2v-\delta.$$

Mithin sind die Ausdrücke $-u+v+w$, $u-v+w$, $u+v-w$ positiv, und aus u, v, w ein Dreieck construirbar.

Wenn uvw das Dreieck DEF schneidet, ABC aber nicht, so liegt eine Ecke, z. B. D, auf einer Seite von uvw, während $EFABC$ auf der

andern liegen. Ist uvw von D um δ entfernt, so hat die durch D zu uvw gezogene Parallele die Coordinaten $u+\delta$, $v+\delta$, $w+\delta$; folglich ist

$$-(u+\delta)+(v+\delta)+(w+\delta)=0, \quad -u+v+w=-\delta.$$

Da nun

$$u-v+w=2w+\delta, \quad u+v-w=2v+\delta,$$

so folgt, dass für jede Gerade, welche DEF schneidet, nicht aber ABC, das Dreieck nicht construirbar ist.

Es ist nicht schwer, zu entscheiden, wie es sich mit den Geraden verhält, die ABC schneiden; man hat nur auf die nöthigen Vorzeichenänderungen zu achten.

Dresden. Prof. Dr. R. Heger.

XVI. Erklärung.

Die etwas unklare Fassung einer Stelle der historischen Einleitung meiner Arbeit, S. 66 dieses Bandes, veranlasst mich zu der Erklärung, dass die Auflösung vermöge der Relation $1+tg^2u=sec^2u$ oder der damit identischen $10^B=1+10^A$, sammt den fertigen Formeln für den Fall der quatrinomischen Gleichungen, meinem Vater im Manuscripte und durch dessen Vermittelung mir selbst von Herrn Prof. Gundelfinger zuerst mitgetheilt worden ist.

Darmstadt, Mai 1886. Alfred Wiener,
Stud. elektrotechn.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

31. Jahrgang. 4. Heft.

Mit einer lithographirten Tafel.

Ausgegeben am 23. August 1886.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1886.

XI.

Die Erzeugung polarer Elemente für Flächen und Curven durch die projectivische Verallgemeinerung des Schwerpunktes.

Von

Dr. L. Geisenheimer,

Bergschul-Director in Tarnowitz, O.-Schl.

Hierzu Taf. III Fig. 1 u. 2.

In folgender Arbeit sollen mehrere von Newton, Cotes, Mac-Laurin und Chasles gegebene Sätze über die Beziehungen zwischen einem Punkte und seiner Polargeraden (Polarebene) für ebene Curven und Flächen, wie die reciproken Sätze synthetisch aus den einfachsten Gesetzen des Schwerpunktes hergeleitet und erweitert werden. Insbesondere wird nachgewiesen werden, dass auch für jede algebraische Raumcurve polare Beziehungen zwischen linearen Elementen stattfinden und für jede derartige Curve ein Mittelpunkt im Chasles'schen Sinne als polares Element der unendlich fernen Ebene existirt. Die so erhaltenen allgemeinen Sätze werden schliesslich zur Aufstellung mehrfacher neuer Beziehungen für die Raumcurven dritter Ordnung verwandt werden.

---

§ 1.

In Fig. 1 seien k und k' zwei sich entsprechende, zur Collineationsaxe parallele Strecken in zwei perspectivischen ebenen Systemen Σ und Σ'. Die parallel zu einer bestimmten Richtung gemessenen Abstände dieser Strecken vom Collineationscentrum O seien x und x', die parallel gemessene Entfernung der Collineationsaxe von O sei l, die der ersten Gegenaxe g sei c. Die zweite Gegenaxe ist mit g' bezeichnet.

Nach bekanntem Satze über die Gegenpunkte in projectivischen Punktreihen ergiebt sich die Gleichung:

$$(x-c)(x'-l+c)=(l-c)c,$$

woraus folgt:

$$1)\qquad \frac{x'}{x}=\frac{l-c}{x-c}.$$

$l-c$ und $x-c$ bedeuten die Entfernungen der Collineationsaxe und der Strecke k von der ersten Gegenaxe g. Somit findet sich:

Das Verhältniss zweier zur Collineationsaxe parallelen sich entsprechenden Strecken in perspectivischen Systemen ist zum Abstande des Hintergliedes (k) von der zugehörigen Gegenaxe (g) umgekehrt proportional.

Hiernach lässt sich die collineare Verallgemeinerung des Schwerpunktes für ein beliebiges ebenes Punktsystem Σ bilden, indem wir zu Σ ein collineares System Σ' und in diesem den Schwerpunkt x'_0 nach gewöhnlicher Weise suchen. Für letzteren gilt bezüglich einer beliebigen Geraden die Gleichung $x'_0 = \frac{1}{n} \Sigma x'$, wo n die Anzahl der Punkte, x' die parallel einer beliebigen Richtung genommenen Abstände der Punkte von dieser Geraden bedeuten. Demnach ergiebt sich für den collinearen Punkt in Σ, wenn man x' der Gegenaxe des Systems Σ parallel wählt und den gemeinschaftlichen Factor $l-c$ forthebt:

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{1}{n} \sum \frac{x}{y}. \tag{2}$$

Hier bezeichnet x die der gewählten Gegenaxe parallele Strecke bis zu einer beliebigen Geraden, welche man als die Y-Axe des Systems Σ betrachten kann, y die zur Gegenaxe beliebig geneigte Ordinate. Die Gegenaxe stellt die X-Axe des Systems dar.

Wird die Y-Axe um eine Strecke a verschoben, so folgt:

$$\frac{x_0 + a}{y_0} = \frac{1}{n} \sum \frac{x+a}{y}$$

oder

$$\frac{1}{y_0} = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{y}. \tag{3}$$

Die Formeln für Coordinatentransformation zeigen, dass, wenn die Gleichungen 2) für eine Lage der Y-Axe bestehen, sie für jede Lage derselben richtig sind. Geht die Y-Axe speciell durch den Punkt $x_0 y_0$, so wird Gleichung 2) zu $\sum \frac{x}{y} = 0$ oder, wenn man in diesem Falle den Winkel des zum Punkte xy gehörigen Leitstrahls mit der X-Axe durch $(x_0 x)$, mit der Y-Axe durch $(y_0 y)$ bezeichnet, $\sum \frac{\sin(y_0 y)}{\sin(x_0 x)} = 0$. Letzte Gleichung stimmt aber der Form nach vollständig mit jener überein, welche den Punkt $x_0 y_0$ als Pol der X-Axe bezüglich des Vielecks der Punkte xy, letzteres als eine Curve n^{ter} Classe angesehen, bestimmt.* Hiermit ist gefunden:

* Vergl. z. B. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven, Ausgabe 1873 S. 140.

Die collineare Verallgemeinerung des Schwerpunktes für ein ebenes Punktsystem fällt mit dem Pol der zum collinearen Punktsystem gehörigen Gegenaxe in Bezug auf letzteres System zusammen.

Der Schwerpunkt selbst ist hiernach der Pol der unendlich fernen Geraden bezüglich des Punktsystems.

Der Pol einer Geraden g in Bezug auf ein Punktsystem kann nach dem Vorstehenden auch durch fortschreitende Construction von Punkt zu Punkt erhalten werden. Die aufeinander folgenden Punkte seien durch $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ bezeichnet. Man suche für g den Pol in Bezug auf $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, d. h. bilde den zu g conjugirten, mit $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2$ und g vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{a}$, welchem man das Gewicht 2 beilegt, während jeder der ursprünglichen Punkte das Gewicht 1 hat. Alsdann verbinde man $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{x}_3$ und bestimme einen Punkt $\mathfrak{b}$ in $|\mathfrak{a}\mathfrak{x}_3|$, welcher diese Strecke mit g nach dem Doppelverhältniss $-2:1$ theilt, so dass also $(\mathfrak{x}_3 \mathfrak{b} \mathfrak{a} g) = -2$. Den so erhaltenen Punkt $\mathfrak{b}$, ihm das Gewicht 3 zuschreibend, verbinde man mit $\mathfrak{x}_4$ u. s. f.

Sollen in einem beliebigen Coordinatensystem zwei Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ durch einen dritten Punkt $\mathfrak{s}$ und die Abscissenaxe (g) nach dem Doppelverhältniss $m:n$ getheilt werden, so dass $(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{s} \mathfrak{x}_2 X) = \frac{m}{n}$, so gelten allgemein die Gleichungen:

$$\frac{m}{y_2} - \frac{n}{y_1} = \frac{m-n}{y_s}, \quad m\frac{x_2}{y_2} - n\frac{x_1}{y_1} = (m-n)\frac{x_s}{y_s}. -$$

Die Beziehung zwischen einer Geraden und ihrem Pol in Bezug auf ein aus n Punkten bestehendes Punktsystem ist im Allgemeinen keine eindeutige, indem zu einem gegebenen Punkte als Pol mehrere gerade Linien g (sie mögen G e g e n g e r a d e heissen) gehören. Stellt in einem beliebig gewählten Coordinatensystem $y = ax + b$ die Gleichung der Gegengeraden dar, welcher $x_0 y_0$ als Pol entspricht, so müssen folgende zwei Gleichungen erfüllt sein:

$$\frac{n x_0}{a x_0 + b - y_0} = \sum \frac{x}{ax+b-y}, \quad \frac{n}{a x_0 + b - y_0} = \sum \frac{1}{ax+b-y}.$$

Die zweite Gleichung mit x_0 multiplicirend und die erste subtrahirend, folgt:

$$\sum \frac{x_0 - x}{ax+b-y} = 0, \text{ eine Gleichung } (n-1)^{\text{ter}} \text{ Ordnung.}$$

Die zweite Gleichung lässt sich auch in der Form schreiben:

$$\sum \left(\frac{1}{ax+b-y} - \frac{1}{a x_0 + b - y_0} \right) = \sum \frac{a(x_0 - x) - (y_0 - y)}{(ax+b-y)(\ x_0 + b - y_0)} = 0,$$

daher:

$$\sum \frac{y_0 - y}{ax+b-y} = 0, \text{ ebenfalls von } (n-1)^{\text{ter}} \text{ Ordnung.}$$

Somit ergiebt sich für a oder b eine Resolvente der Ordnung $(n-1)^2$.* Offenbar genügt aber die Verbindungslinie je zweier Punkte des gegebenen Vielecks diesen Gleichungen, da für eine solche Gerade je zwei Nenner in den beiden Gleichungen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden. Die Anzahl der gesuchten Gegengeraden ist also $(n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Für ein Dreieck ist die Beziehung der Gegengeraden zu ihrem Pol hiernach eine eindeutige; die Gegengerade ist die Harmonikale des Pols.

Fällt ein Punkt irgend eines Punktsystems in die Gegengerade, so fällt ihr Pol mit diesem Punkte zusammen. Liegen zwei Punkte des Systems in der Gegengeraden, so wird der Pol ein beliebiger Punkt dieser Geraden. —

Die entsprechenden Entwickelungen gelten für ein räumliches Punktsystem. Wählen wir die für das System genommene Gegenebene zur XY-Ebene, so ergiebt sich aus den Gleichungen 2) für die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des zum Schwerpunkte in einem collinearen System entsprechenden Punktes:

$$4)\qquad \frac{x_0}{z_0} = \frac{1}{n}\sum\frac{x}{z}, \quad \frac{y_0}{z_0} = \frac{1}{n}\sum\frac{y}{z}, \quad \frac{1}{z_0} = \frac{1}{n}\sum\frac{1}{z},$$

und hieraus folgt in gleicher Weise wie vorhin, dass dieser Punkt mit dem Pol der Gegenebene in Bezug auf das System der n Punkte, letzteres als eine Fläche n^{ter} Classe angesehen, zusammenfällt. Ebenso lässt sich dieser Pol durch Construction von Punkt zu Punkt bestimmen. Falls ein, zwei oder drei Punkte des körperlichen n-Ecks in die Gegenebene fallen, liegt der Pol in diesem Punkte, ihrer Verbindungsgeraden oder Verbindungsebene.

Um die Zahl der Gegenebenen zu finden, welche bei einem körperlichen n-Eck einem gegebenen Pole entsprechen, lösen wir die reciproke Aufgabe, wieviele Punkte bei einem n-Flach eine gegebene Ebene als Polarebene besitzen. Wir bilden zu dem Zwecke für drei Punkte der gegebenen Polarebene die ersten Polarflächen bezüglich des n-Flachs, deren jede von $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist und deren Schnittpunkte die gesuchten Punkte sind. Die zwei ersten Polarflächen schneiden sich in einer Raumcurve von der Ordnung $(n-1)^2$, welcher aber sämmtliche Schnittlinien des n-Flachs angehören, so dass sich die Ordnung der eigentlichen Schnittcurve C^m auf $(n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ reducirt. Diese Schnittcurve C^m enthält die Ecken des n-Flachs als einfache Punkte, während sie in einer der Polarflächen als Doppelpunkte einbegriffen sind. Die Raumcurve C^m schneidet hiernach die Polarfläche des dritten Punktes in $(n-1)\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 2\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ Punkten, die Ecken des n-Flachs als doppelt zu zählende

* Vergl. Salmon-Fiedler a. a. O. S. 59.

singuläre Schnittpunkte abgerechnet. Somit ergeben sich $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}$ Punkte, welche bei einem n-Flach eine gegebene Ebene als Polarebene, oder $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}$ Ebenen, welche bei einem körperlichen n-Eck einen gegebenen Punkt als Pol besitzen. Die Beziehung zwischen Gegenebene und Pol ist also nur für das Tetraeder eine gegenseitig eindeutige. —

Bilden wir überhaupt zu den vorstehenden die reciproken Entwickelungen, so ergiebt sich, dass einem gegebenen Punkte (derselbe möge im Folgenden der Deutlichkeit wegen als Gegenpunkt bezeichnet werden) in Bezug auf ein n-Flach (ebenes n-Seit) eine Polarebene (Polargerade) entspricht, welche zunächst, gemäss der vorhin entwickelten Construction des Pols durch Fortschreiten von Punkt zu Punkt, durch Fortschreiten von Seite zu Seite erhalten werden kann. Sind ξ_1, ξ_2, ... die Seiten des n-Flachs, $\mathfrak{p}$ der Gegenpunkt, so lege man durch $\mathfrak{p}$ und die Schnittgerade $|\xi_1\xi_2|$ eine Ebene und suche zu dieser bezüglich ξ_1 und ξ_2 die vierte harmonische Ebene α; bringe α, welcher man das Gewicht 2 zuschreibt, mit der folgenden Seite ξ_3 zum Schnitt, lege durch $|\alpha\xi_3|$ und $\mathfrak{p}$ wieder eine Ebene, zu welcher man bezüglich α und ξ_3 die anharmonische sucht u. s. f. Legt man durch $\mathfrak{p}$ eine beliebige Gerade l und bezeichnet man die Polarebene mit ξ_0, so giebt die Anwendung der für das Doppelverhältniss entwickelten ersten Formel auf diese Construction:

5) $$\frac{1}{|\mathfrak{p}\xi_0|}=\frac{1}{n}\sum\frac{1}{|\mathfrak{p}\xi|},$$

durch $|\mathfrak{p}\xi_0|$, $|\mathfrak{p}\xi_1|$, ... immer die Strecken auf l vom Gegenpunkte bis zur betreffenden Ebene darstellend. Es ist dies die bekannte Bedingung für die Polarebene eines Punktes in Bezug auf eine Fläche n^{ter} Ordnung, als welche hier das n-Flach auftritt.

Falls der Gegenpunkt $\mathfrak{p}$ in eine Seitenebene, Kante oder Ecke des n-Flachs fällt, coincidirt seine Polarebene mit dieser Seitenebene oder wird zu einer durch die Kante oder Ecke beliebig gelegten Ebene.

Für das Dreieck und Tetraeder werden die Beziehungen zwischen Gegenebene (Gegengerade) und Pol, wie zwischen Gegenpunkt und Polare nicht nur gegenseitig eindeutige, sondern auch involutorische, indem dieselben linearen Gebilde sowohl als Gegenpunkt und Polare, wie auch als Gegenebene (Gegengerade) und Pol aufgefasst werden können. Der Beweis hierfür folgt aus den bekannten Eigenschaften des Schwerpunktes dieser Figuren.

Die polaren Beziehungen für Raum, Punkt und Ebene werden durch folgende Sätze verknüpft:

Ist $\mathfrak{x}_0$ der Pol der Gegenebene π in Bezug auf das n-Eck $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$... und wählt man in π einen be-

Ist ξ_0 die Polarebene des Gegenpunktes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf das n-Flach $\xi_1\xi_2$... und legt man

liebigen Punkt $\mathfrak{e}$, so ist die Gerade $|\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0|$ die Polare von π in Bezug auf das n-Kant $\mathfrak{e}(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\ldots)$.

Fallen $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\ldots$ in eine Gerade oder Ebene, liegt auch $\mathfrak{x}_0$ in dieser Geraden oder Ebene.

durch $\mathfrak{p}$ eine beliebige Ebene ε, so ist die Gerade $|\varepsilon\xi_0|$ die Polare von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Schnittfigur zwischen ε und $\xi_1\xi_2\ldots$

Bilden $\xi_1\xi_2\ldots$ ein Ebenenbüschel oder Bündel, geht ξ_0 durch die Axe oder den Scheitel desselben.

Die vorstehenden Entwickelungen werden im Weitern auf folgende Figuren Anwendung finden:

Die Ecken eines ebenen n-Ecks bilden Punkte einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung.

Die Ecken eines räumlichen n-Ecks bilden:

1. Punkte einer beliebigen Fläche n^{ter} Ordnung;
2. Punkte einer abwickelbaren Fläche;
3. Punkte einer Raumcurve.

Die Seiten eines ebenen n-Seits bilden Tangenten einer ebenen Curve n^{ter} Classe.

Die Seiten eines n-Flachs bilden:

1. Tangentialebenen einer Fläche n^{ter} Classe;
2. die eine Raumcurve tangirenden Ebenen;
3. die Schmiegungsebenen einer Raumcurve.

§ 2.

Wenn eine ebene Curve n^{ter} Ordnung durch ein System paralleler Sehnen geschnitten wird, so bildet das Centrum der mittleren Entfernungen der n Schnittpunkte einer jeden Sehne (der Schwerpunkt dieser Schnittpunkte) in dieser Sehne einen eindeutig bestimmten Punkt. Der geometrische Ort dieser Schwerpunkte muss daher eine Gerade sein, falls nicht der unendlich ferne Punkt der Sehnen in ein- oder mehrfacher Weise für irgendwelche Sehnen der Schaar das Centrum der mittleren Entfernungen darstellt. Letzteres kann aber nur der Fall sein, wenn die Sehnen einer Asymptote der Curve parallel laufen, in welchem Falle der Mittelpunkt für die Schnittpunkte aller Sehnen unendlich fern fällt, der gesuchte geometrische Ort also zur unendlich fernen Geraden der Ebene wird.

Die betrachtete Curve besitzt in den Tangenten der Schnittcurve mit der unendlich fernen Geraden n Asymptoten. Wird in Bezug auf das aus letzteren bestehende n-Seit die Polare zum unendlich fernen Punkte der Sehnenschaar gebildet, so muss sich diese mit der Polaren desselben Punktes in Bezug auf die Curve in der unendlich fernen Geraden schneiden. Die beiden Polaren müssen also zusammenfallen oder parallel laufen, in letzterem Falle sich aber asymptotisch nähern. Da es unmöglich ist, dass sich zwei

gerade Linien asymptotisch nähern, ergiebt sich die Coincidenz beider Polaren und hiermit der Newton'sche Satz:

Die Polare eines unendlich fernen Punktes in Bezug auf eine Curve n^{ter} Ordnung fällt mit der Polaren desselben Punktes in Bezug auf das aus sämmtlichen Asymptoten der Curve gebildete n-Seit zusammen.

Eine bekannte Folgerung des Satzes lautet:

Die algebraische Summe der Abschnitte zwischen einer Curve und ihren Asymptoten ist gleich Null.

Die collineare Verallgemeinerung liefert die Sätze von Cotes und Mac-Laurin:

Bildet man für alle durch einen festen Punkt $\mathfrak{p}$ gehenden Leitstrahlen die collineare Verallgemeinerung $\mathfrak{x}_0$ des Schwerpunktes für die Schnittpunkte $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \ldots$ mit einer Curve in Bezug auf $\mathfrak{p}$ als Gegenpunkt $\left(\frac{1}{|\mathfrak{p}\mathfrak{x}_0|} = \frac{1}{n}\sum \frac{1}{|\mathfrak{p}\mathfrak{x}|}\right)$, so ist der Ort der Punkte $\mathfrak{x}_0$ eine gerade Linie, die Polargerade oder kurz die Polare des Punktes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Curve genannt. Diese Polare fällt mit der Polaren des Punktes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf das Vielseit derjenigen Tangenten zusammen, welche sich in den Schnittpunkten eines durch $\mathfrak{p}$ gezogenen Leitstrahls mit der Curve an letztere legen lassen.

Die duale Ergänzung dieses Satzes liefert:

Legt man aus einem beliebigen Punkte einer Geraden (Gegengeraden) g die Tangenten t_1, t_2, ... an eine Curve n^{ter} Classe und zieht im Büschel dieser Tangenten einen Strahl t_0 derart, dass $cotg(gt_0) = \frac{1}{n} \Sigma\, cotg(gt)$, so gehen alle Strahlen t_0 durch einen festen Punkt, welcher als Pol der Geraden g in Bezug auf die Curve bezeichnet wird. Dieser Pol fällt mit dem Pol derselben Geraden g in Bezug auf das Vieleck zusammen, welches durch die Berührungspunkte der aus einem beliebigen Punkte von g an die Curve gelegten Tangenten gebildet wird.

Rückt die Gegengerade g ins Unendliche, so folgt als Vervollständigung eines von Chasles gegebenen Satzes:*

Der Pol der unendlich fernen Geraden bezüglich einer Curve stimmt mit dem Schwerpunkte für die Berührungspunkte eines Systems paralleler Tangenten überein.

Dieser Schwerpunkt der Berührungspunkte ist also ein für die Curve fester Punkt, welcher nach Chasles als Centrum der Curve bezeichnet wird. —

---

* A. a. O. S. 141.

Die vorstehenden Entwickelungen lassen sich leicht auf den Raum übertragen. Um in hier betrachtetem Sinne das polare Gebilde eines Punktes (Gegenpunktes) $\mathfrak{p}$ in Bezug auf eine Fläche zu erhalten, bilde man die $\mathfrak{p}$ entsprechenden Polargeraden bezüglich der Schnittcurven in den durch $\mathfrak{p}$ gelegten Ebenen. Der Ort dieser Polargeraden, in jedem seiner Punkte beliebig viele Geraden enthaltend, kann also nur eine Ebene sein. Hebt man einen bestimmten Leitstrahl l durch $\mathfrak{p}$ heraus und legt in dessen Schnittpunkten die Berührungsebenen an die Fläche, so ergiebt sich durch die Betrachtung der Polargeraden für die Schnittcurven in den durch l gelegten Ebenen, dass die Polarebene bezüglich der Fläche mit derjenigen bezüglich des aus den Berührungsebenen gebildeten Vielflachs coincidirt.

Die Polarebene eines Punktes in Bezug auf eine Fläche fällt mit der Polarebene desselben Punktes in Bezug auf das Vielflach derjenigen Tangentialebenen zusammen, welche sich in den Schnittpunkten eines durch den Punkt gezogenen Leitstrahls an die Fläche legen lassen.

Der Pol einer Ebene in Bezug auf eine Fläche fällt mit dem Pol derselben Ebene in Bezug auf das Vieleck derjenigen Punkte zusammen, in welchen die aus einer Geraden der Ebene an die Fläche gelegten Tangentialebenen letztere berühren.

Aus dem Satze links ergiebt sich als weitere Folgerung, dass ein Punkt $\mathfrak{p}$ dieselbe Polarebene bezüglich der gegebenen Fläche und bezüglich einer Developpabeln besitzt, welche die Schnittcurve der Fläche in einer durch $\mathfrak{p}$ gehenden Ebene abwickelt Bei Flächen zweiter Ordnung z. B. wird für alle unendlich fernen Punkte $\mathfrak{p}$ diese Developpable zum Asymptotenkegel.

Der Pol einer Ebene ε in Bezug auf eine Fläche lässt sich nach dem Vorstehenden bestimmen: 1. indem man aus einer Geraden der Ebene ε die Berührungsebenen $\tau_1, \tau_2, \ldots$ an die Fläche legt und den gemeinschaftlichen Schnittpunkt aller durch die Gleichung $cotg(\varepsilon\tau_0) = \frac{1}{n} \Sigma\, cotg(\varepsilon\tau)$ bestimmten Ebenen τ_0 sucht; 2. indem man den Pol von ε in Bezug auf die Berührungspunkte von $\tau_1, \tau_2, \ldots$ darstellt; 3. indem man aus einem beliebigen Punkte der Ebene ε einen Tangentialkegel an die Fläche legt und die Polargerade zu ε in Bezug auf diesen Kegel, welche stets durch den Pol gehen muss, nimmt. Eine weitere Construction mit Hilfe der Berührungscurve dieses Kegels wird später hergeleitet werden.

Rückt die Gegenebene ε unendlich weit, so ergiebt sich wieder:

Der Schwerpunkt für die Berührungspunkte eines Systems paralleler Berührungsebenen einer Fläche ist als Pol der unendlich fernen Ebene ein fester Punkt, welcher als Centrum der Fläche bezeichnet wird. —

Legen wir durch eine feste Gerade g beliebige Ebenen λ und bestimmen die Pole für die Axe g des so erhaltenen Ebenenbüschels in Bezug auf die Schnittcurven einer Fläche F mit diesen Ebenen, so fallen, wie im Folgenden bewiesen werden wird, diese Pole in eine Gerade. Behufs einfacherer Ausdrucksweise soll dieser Beweis nur für den Fall geführt werden, dass g im Unendlichen liegt; doch wird sich aus der Form des Beweises seine allgemeine Geltung ergeben.

Wir beschreiben um die Fläche F einen sie berührenden Cylinder, dessen Kanten die unendlich ferne Axe g treffen, also zu den in diesem Falle parallelen Schnittebenen parallel laufen. Schneiden wir diesen Cylinder durch eine der Schnittebenen λ, so fällt die Mittellinie der parallelen Seitenkanten, in welchen sich Cylinder und Ebene durchsetzen, und hiermit das Centrum der Schnittcurve $|F\lambda|$, in eine der Cylinderkante parallele Ebene. Wir erhalten letztere, indem wir den Cylinder durch eine gegen λ geneigte neue Ebene μ schneiden und zum unendlich fernen Punkte der Geraden $|\lambda\mu|$ in Bezug auf die Schnittcurve des Cylinders die Polargerade suchen. Diese Polargerade ist die Spur der gesuchten Ebene mit μ. Umschreibt man der Fläche F einen zweiten derartigen Cylinder, so ergiebt sich eine zweite Ebene und hiermit eine Gerade als Ort für die Centra der in die Parallelebenen λ fallenden Schnittcurven.

Stellt man dem hiermit gewonnenen Satze den reciproken gegenüber, so erkennt man, dass jeder Geraden g in Bezug auf eine beliebige Fläche zwei im Allgemeinen verschiedene gerade Linien als polare Gebilde entsprechen, deren Verschiedenheit darauf beruht, dass g einmal als Träger eines die Fläche F schneidenden Ebenenbüschels, also als Axe, ein anderes Mal als Träger einer Reihe von Punkten, aus welchen Tangentialkegel an die Fläche gelegt werden, also als Strahl erscheint. Hiernach lauten die bezüglichen Sätze:

Die Pole, welche der Axe eines Ebenenbüschels in Bezug auf die Schnittcurven seiner Ebenen mit einer Fläche entsprechen, bilden eine gerade Punktreihe.

Die Polarebenen, welche dem Strahle einer Punktreihe in Bezug auf die aus diesen Punkten an eine Fläche gelegten Berührungskegel entsprechen, bilden ein Ebenenbüschel erster Ordnung.

Bei Flächen zweiter Ordnung, für welche die Beziehung zwischen polaren Elementen stets eine involutorische ist, findet auch die Coincidenz der beiden einer gegebenen Geraden entsprechenden polaren Geraden statt. Ferner umhüllen in diesem speciellen Falle die in Bezug auf die Fläche selbst gebildeten Polarebenen für alle Punkte einer Geraden wieder eine Gerade (nämlich die vorerwähnte Polare), was im Allgemeinen nicht stattfindet. Bei einer Fläche n^{ter} Ordnung bilden diese Polarebenen vielmehr eine Developpable der $(n-1)^{ten}$ Classe, für Flächen dritter Ordnung also einen

Kegel zweiten Grades. Die Spitze dieses Kegels fällt nach früherem Satze in den Schnittpunkt der drei Tangentialebenen, welche sich in den Schnittpunkten der ursprünglich gegebenen Geraden mit der cubischen Fläche an letztere legen lassen.

§ 3.

Die vorstehend für Flächen entwickelten Sätze lassen sich mit gewissen Modificationen auf Raumcurven übertragen.

Eine Raumcurve kann in zwei sich reciprok gegenüberstehenden Weisen aufgefasst werden, als Strictionslinie einer Developpabeln oder als Grenze einer Röhrenfläche. Bei der ersten Auffassung löst sich der aus einem beliebigen Punkte des Raumes an die Developpabele gelegte Tangentialkegel in ein System singulärer Ebenen, bei der zweiten Auffassung die Schnittcurve einer beliebigen Ebene in ein System singulärer Punkte auf.

Von der Polaren eines Punktes in Bezug auf ein System singulärer Punkte lässt sich allgemein nicht reden, die Lage derselben hängt von der Form der quadratischen Factoren, welche jeder singuläre Punkt repräsentirt, also vom Uebergang der degenerirenden Curve in die als Grenzfall derselben auftretenden Punkte ab. Dies zeigt sich schon bei einem isolirten Punkte, wo die zu einem beliebigen Punkte gehörige Polare durch die Art des in den isolirten Punkt übergegangenen Kegelschnittes bestimmt wird. Unter Zuhilfenahme der reciproken Betrachtung ergiebt sich:

Wird eine Raumcurve als Strictionslinie einer Developpabeln angesehen, so wird hiermit jedem Punkte des Raumes eine Polarebene, nicht aber einer Ebene ein bestimmter Pol zugeordnet. Wird aber die Raumcurve als Grenze einer Röhrenfläche betrachtet, so wird umgekehrt zu jeder Ebene ein Pol, nicht aber zu einem Punkte die Polarebene bestimmt.

Die Zuordnung des Pols zu einer gegebenen Ebene ε im letzten Falle erfolgt genau wie bei Flächen. Man wähle in ε eine beliebige Gerade, lege durch diese die tangirenden Ebenen $\tau_1, \tau_2, \ldots$ an die Raumcurve und bestimme in diesem Ebenenbüschel die Ebene τ_0 durch die Formel $cotg\, \tau_0 = \frac{1}{n} \Sigma\, cotg\, \tau$, so schneiden sich alle Ebenen τ_0 im Pol der Ebene ε in Bezug auf die Raumcurve. Da letztere als Grenze einer Röhrenfläche auftritt, ist streng genommen den Berührungsebenen $\tau_1, \tau_2, \ldots$ immer das Gewicht 2 beizuschreiben, wodurch aber das Resultat nicht geändert wird. Derselbe Pol wird natürlich erhalten, wenn die Raumcurve aus einem beliebigen Punkte der Ebene ε projicirt und die Polare der Ebene ε in Bezug auf den hiermit gebildeten Kegel gesucht wird; alle diese Polaren gehen durch den Pol der Ebene ε. Ferner kann die Curve, ebenso wie die Fläche, durch das System der zu $\tau_1, \tau_2, \ldots$ gehörigen Berührungspunkte ersetzt werden.

Aus letzter Construction fliessen sofort die dualen Sätze:

Der Pol einer Ebene in Bezug auf eine Fläche fällt mit dem Pole dieser Ebene in Bezug auf die Curve zusammen, in welcher der aus einem beliebigen Punkte der Ebene an die Fläche gelegte Tangentialkegel letztere berührt.

Die Polarebene eines Punktes in Bezug auf eine Fläche fällt mit der Polarebene dieses Punktes in Bezug auf die Developpabele derjenigen Curve zusammen, in welcher eine beliebig durch den Punkt gelegte Ebene die Fläche durchschneidet.

Der Satz rechts ist eine schon erwähnte Folge des Mac Laurin'schen Satzes. Der Satz links ist besonders für den Fall, dass die Berührungscurve eben wird, anwendbar; der Pol fällt dann in die Ebene der Berührungscurve.

Den Pol der unendlich fernen Ebene in Bezug auf eine Raumcurve, diese also als Grenze einer Röhrenfläche betrachtet, bezeichnen wir wieder als das Centrum der Raumcurve. Die Mittellinien aller durch eine Raumcurve gelegten Cylinder schneiden sich also in einem festen Punkte, dem Centrum derselben.

Der vorstehende Satz lässt sich auch leicht durch die Methode der descriptiven Geometrie nachweisen. Wir projiciren zu dem Zwecke die Raumcurve C zweimal durch verschieden gerichtete Parallelstrahlen auf eine Projectionsebene in die Curven k_1 und k_2. Diese Curven können völlig unabhängig von einander sein; wird aber C zum dritten Male durch Parallelstrahlen, welche mit den erstgewählten Projectionsstrahlen derselben Ebene parallel laufen, auf dieselbe Projectionsebene in die Curve k_3 projicirt, so ist k_3 durch k_1 und k_2 bestimmt, indem die einem Punkte von C entsprechenden Punkte dieser drei Curven ähnliche und ähnlich liegende Punktreihen bilden. Sind daher die bezüglichen Abscissen für je drei einander zugehörige Punkte x_1, x_2 und x_3, so ist $x_3 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$, wo μ_1 und μ_2 Constanten. Legt man an die beiden ersten projicirenden Cylinder die zu ihren beiden Projectionsstrahlen parallelen Tangentialebenen, so werden diese in gemeinschaftliche Tangenten an k_1 und k_2 projicirt, welche auch k_3 berühren. Die Abscisse des Schwerpunktes für die Berührungspunkte dieses Systems paralleler Tangenten an k_1, k_2 und k_3 sei bezüglich ξ_1, ξ_2, ξ_3, so ist

$$\xi_1 = \frac{1}{n} \Sigma x_1, \quad \xi_2 = \frac{1}{n} \Sigma x_2, \quad \xi_3 = \frac{1}{n} \Sigma x_3 = \mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2,$$

wo x_1, x_2, x_3 die Abscissen der Berührungspunkte bedeuten. Da $\xi_3 = \mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2$, entspricht den Centren aller durch Projection der Raumcurve entstandenen Curven k_1, k_2, k_3 stets derselbe Punkt des Raumes.

Der hier geführte Beweis setzt offenbar voraus, dass die Curven k_1, k_2, k_3 gleicher Classe sind und jedem Punkte dieser Curven nur ein einziger Punkt der Raumcurve entspricht, die Strahlen der projicirenden Cylinder die Raumcurve also nicht in mehreren Punkten treffen. Derartige singuläre

Cylinder bezüglich Kegel müssen also bei Aufsuchung des, einer durch ihren Scheitel gelegten Ebene zugehörigen Poles ausgeschlossen oder diejenigen mehrfachen und imaginären Berührungsebenen berücksichtigt werden, welche bei Uebergang des allgemeinen in den singulären Kegel für letzteren resultiren. Ein Beispiel hierfür bietet die Raumcurve vierter Ordnung, welche entsteht, wenn sich zwei zu einander senkrecht stehende normale Kreiscylinder excentrisch durchdringen; das Centrum der Schnittcurve kann nur mit Hilfe ihrer schiefen Projection, also einer Curve vierter Ordnung erhalten werden. Das Entsprechende gilt für die Kegel zweiter Ordnung, in welchen sich der Schnitt zweier beliebigen quadratischen Flächen aus den Ecken ihres gemeinschaftlichen Polartetraeders projicirt.

Ein weiterer bemerkenswerther Specialfall bei Aufsuchung des Pols zu einer Ebene ε ergiebt sich, wenn man den Scheitel des die Raumcurve projicirenden Kegels in einen Schnittpunkt der Ebene ε mit der Curve fallen lässt. Vom allgemeinen Kegel sondert sich dann diejenige Ebene ab, welche sich durch die betreffende Curventangente t und das letzte Element der Bahn legen lässt, auf welcher sich der Scheitel des projicirenden Kegels der Raumcurve nähert. Diese Ebene ist also variabel und wird nur bei einer speciellen Annäherung des Scheitels zur Schmiegungsebene, ist aber in Bezug auf die Classenzahl des Kegels doppelt zu rechnen, da bei dem Uebergang zur Grenze die benachbarten Abstände zwischen Kegel und Ebene von vierter Ordnung werden. Ist e der Polarstrahl der Ebene ε in Bezug auf den durch Absonderung dieser variablen Ebene in seiner Classe (um 2) auf n reducirten Kegel, so erhält man den Polarstrahl von ε in Bezug auf diesen Kegel mit Einschluss der Doppelebene in demjenigen Strahl, welcher die Strahlen e und t in Bezug auf die Ebene ε nach dem Doppelschnittverhältniss $-2:n$ theilt; e muss das Gewicht n, der Tangente t das Gewicht 2 zugeschrieben werden.

Entsprechend erhält man die reciproke Figur, indem man durch einen Punkt eine Schmiegungsebene an die Raumcurve legt. Die Schnittcurve mit der Developpabeln der Schmiegungsebenen sinkt dann in ihrer Ordnung um zwei Einheiten, welche auf die Tangente der betreffenden Schmiegungsebene übertragen werden.

Die Uebertragung der für Flächen über die Polaren einer Geraden entwickelten Sätze auf Raumcurven liefert:

1. Die Raumcurve als Strictionslinie einer Developpabeln aufgefasst:

Die Pole, welche einer beliebigen Axe in Bezug auf die Curven entsprechen, welche die Schmiegungsebenen einer Raumcurve in den durch diese Axe gelegten Ebenen umhüllen, bilden eine Gerade.

Die Polarebenen, welche einem Strahl bezüglich jedem Kant der Schmiegungsebenen an eine Raumcurve entsprechen, welches sich aus einem Punkte des Strahls an die Raumcurve legen lässt, gehen durch eine feste Gerade.

2. Die Raumcurve als Grenze einer Röhrenfläche ansehend:

Die Polarebenen, welche irgend einem Strahl bezüglich der Kegel entsprechen, welche sich aus einem Punkte des Strahles durch eine Raumcurve legen lassen, schneiden sich in einer festen Geraden.

Die Pole, welche einer beliebigen Axe in den durch diese Axe gelegten Ebenen bezüglich der Schnittpunkte mit einer Raumcurve entsprechen, bilden eine Gerade.

Die auf derselben Seite vertikal untereinander stehenden Sätze sind einander reciprok zugeordnet.

Degenerirt die Raumcurve, so dass sie in eine Curve niederer Ordnung und eine oder mehrere Gerade zerfällt, so sondern sich für einen beliebigen Punkt die durch diesen und die Geraden gelegten Ebenen als singuläre Schmiegungsebenen oder als singuläre Ebenen der die Raumcurve projicirenden Kegel ab. Die obigen vier Sätze behalten auch in diesem Falle ihre Giltigkeit, wenn nur diese sich absondernden Ebenen in gleicher Weise, wie dies auf Seite 204 für die eine Raumcurve tangirende Ebene geschah, jedesmal mit dem ihnen zukommenden Gewichte in die Construction eingeführt werden. Trennt sich z. B. eine Gerade von einer Raumcurve und projicirt man aus einem beliebigen Punkte, so werden die aus letzterem an die Curve gehenden Schmiegungsebenen zu Osculationsebenen des projicirenden Kegels. Die Zahl dieser Osculationsebenen hängt von den vielfachen Strahlen des Kegels, also von der Zahl der aus der Kegelspitze an die Raumcurve möglichen Secanten ab.* Mit der Bestimmung dieser ergiebt sich also auch, wie oft eine durch die sich absondernde Gerade gelegte Ebene als Schmiegungsebene der allgemeinern Raumcurve gerechnet werden muss.

Durch genau dieselbe Betrachtung, wie sie für ebene Curven bei Construction der Polaren eines unendlich fernen Punktes angestellt wurde, ergiebt sich, dass die Pole einer unendlich fernen Axe bezüglich der Schnittpunkte einer Raumcurve mit den Ebenen des diese Axe enthaltenden Parallelebenenbüschels zusammenfallen mit den Polen derselben Axe bezüglich der Schnittpunkte, in welchen die Asymptoten der betrachteten Raumcurve jene Ebenen durchsetzen. Die collineare und reciproke Verallgemeinerung hiervon liefert im Anschluss an die letzten rechts verzeichneten Sätze folgende:

Bei Construction der Polaren zur Axe eines Ebenenbüschels in Bezug auf die Schnittpunkte einer Raumcurve mit

Bei Construction der Polaren zum Strahl einer Punktreihe in Bezug auf die Schmiegungsebenen, welche sich aus

---

* Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven, S. 69 flg.

den Ebenen des Büschels kann die Raumcurve ersetzt werden durch das System ihrer Tangenten in den Schnittpunkten einer dieser Ebenen.

den Punkten des Strahls an eine Raumcurve legen lassen, kann die Raumcurve ersetzt werden durch ihre Tangenten in den Berührungspunkten der aus einem Punkte des Strahls an die Raumcurve möglichen Schmiegungsebenen.

Falls eine Raumcurve sich in ein System gerader Linien auflöst, wird — bei Auffassung dieses Systems als Strictionslinie einer abwickelbaren Fläche — die irgend einem Punkte des Raumes entsprechende Polarebene unbestimmt. Denn jede durch diesen Punkt gelegte Ebene schneidet die Developpable in einer Curve, welche sich in ein System isolirter Punkte (die Durchbohrungspunkte der Systemgeraden) aufgelöst hat, und wie schon oben erwähnt, wird die Polare eines Punktes in Bezug auf ein System singulärer Punkte unbestimmt. Ebenso wird — das System der Geraden als Grenze einer Röhrenfläche ansehend — der einer beliebigen Ebene entsprechende Pol unbestimmt.

Bezüglich der einer Geraden entsprechenden verschiedenen Polaren erkennt man sofort, dass bei Auflösung der Raumcurve in ein System gerader Linien die beiden für eine Axe und ebenso die beiden für einen Strahl geltenden Sätze zusammenfallen; es lässt sich aber weiter zeigen, dass auch die zwei hiernach noch übrig bleibenden Constructionen auf dieselbe Gerade führen, einer Geraden also stets dieselbe Polare entspricht, mag man diese Gerade als Axe oder Strahl auffassen.

Es genügt, dieses für die Polare einer unendlich fernen Geraden nachzuweisen. Die Gleichung einer Geraden des in n gerade Linien zerfallenden Systems sei, bei beliebig gewählten Coordinatenaxen:

$$\begin{cases} x = az + b, \\ y = cz + d. \end{cases}$$

Für die Coordinaten ξ, η, ζ derjenigen Geraden, welche in Bezug auf das durch diese n Geraden dargestellte System der unendlich fernen Geraden der XY-Ebene als Axe eines Parallelebenenbüschels polar entspricht, folgt:

$$n.\xi = \Sigma(a\zeta + b),$$
$$n.\eta = \Sigma(c\zeta + d).$$

Betrachten wir diese unendlich ferne Gerade der XY-Ebene auch als Strahl und legen aus einem beliebigen Punkte derselben, für welchen wir bei der willkürlichen Wahl des Coordinatensystems die Richtung der X-Axe wählen können, Ebenen durch die n Geraden des Systems. Als Schnitt des hierdurch gebildeten n-Flachs mit der YZ-Ebene ergeben sich gerade Linien, deren Gleichungen lauten $x = 0$, $y = cz + d$, während der zu Grunde gelegte Strahl die YZ-Ebene im unendlich fernen Punkte der Y-Axe trifft.

Wir müssen also zum Netz dieser Schnittgeraden die zum unendlich fernen Punkte der Y-Axe gehörige Polare (den Durchmesser) bestimmen, für welche wir finden:

$$n.\eta = \Sigma(c\zeta + d).$$

Da die durch diesen Durchmesser parallel der X-Axe gelegte Ebene nach den obigen Gleichungen auch die vorhin gefundene, der unendlich fernen Axe entsprechende Polare enthält, ergiebt sich der Satz:

Einer Geraden entspricht bezüglich eines Systems fester, eine Raumcurve vertretenden geraden Linien stets dieselbe Polare, man mag diese Gerade als Strahl oder Axe auffassen.

Dieser Satz stellt eine principielle Eigenschaft des in gerade Linien zerfallenden Systems dar. Während also für eine beliebige Raumcurve, diese bald als Strictionslinie einer Developpabeln, bald als Grenze einer Röhrenfläche betrachtend, jeder Ebene ein Punkt und speciell der unendlich fernen Ebene ein als Centrum der Raumcurve bezeichneter Punkt des Raumes, jedem beliebigen Punkte eine Ebene, jeder Geraden, je nachdem sie als Strahl oder Axe aufgefasst wird, vier im Allgemeinen verschiedene Geraden polar entsprechen, kann bei einem nur aus Geraden bestehenden System einer Geraden nur eine einzige Gerade polar zugeordnet werden, während zu einem Punkte oder einer Ebene im Allgemeinen kein polares Element gehört. Daher kann auch vom Centrum eines aus Geraden bestehenden Systems in dem oben definirten Sinne nicht gesprochen werden.

§ 4.

Die bisher allgemein entwickelten Sätze gestatten mehrfache Anwendungen auf die Raumcurven dritter Ordnung, wobei wir behufs der Herleitung der sich ergebenden Resultate auf eine in dieser Zeitschrift* früher veröffentlichte Arbeit „Ueber den Mittelpunkt der Raumcurve dritter Ordnung" hinweisen. Wie dort, werde vorausgesetzt, dass die Raumcurve $C^{(3)}$ drei reelle unendlich ferne Punkte $\mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{b}_\infty$, $\mathfrak{c}_\infty$ besitze, sich also durch dieselbe drei hyperbolische Cylinder legen lassen, deren Axen a, b, c seien und auf welchen die Asymptoten $t_\mathfrak{a}$, $t_\mathfrak{b}$, $t_\mathfrak{c}$ verlaufen. Der Mittelpunktskegelschnitt $\mu^{(2)}$ treffe die Cylinderaxen a, b, c in den Punkten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{o}$ (Fig. 2), die Asymptoten $t_\mathfrak{a}$, $t_\mathfrak{b}$, $t_\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$; endlich mögen die Verbindungslinien $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{m}|$, $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{n}|$, $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{o}|$ den zugehörigen Cylinder zum zweiten Male in den auf der Raumcurve liegenden Punkten $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$ durchsetzen. Die letztgenannten Geraden schneiden sich nach den Entwickelungen der angeführten Arbeit in einem Punkte $\mathfrak{u}$, in welchen der Pol der den Mittelpunktskegelschnitt $\mu^{(2)}$ enthaltenden Ebene μ, der Mittelpunkt dieses Kegelschnittes selbst und der Mittelpunkt des durch die Asymptoten gelegten Hyperboloids zusammenfielen und welchen wir mit Rücksicht auf weitere Eigenschaften als den Mittel-

* Bd XXVII S. 321 flg.

punkt der cubischen Raumcurve bezeichneten. Nach dem Früheren ergiebt sich sofort, dass dieser Punkt $\mathfrak{u}$ in dem oben entwickelten Sinne der Pol der unendlich fernen Ebene ε_∞ in Bezug auf die Raumcurve ist. Diese Ebene schneidet $C^{(3)}$ in den Punkten $\mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{b}_\infty$ und $\mathfrak{c}_\infty$. Nach dem auf S. 204 behandelten Specialfall zerfällt der die $C^{(3)}$ projicirende Kegel für einen dieser Schnittpunkte, z. B. $\mathfrak{a}_\infty$, in einen Cylinder zweiten Grades und eine die Asymptote t_a enthaltende Ebene. Der Pol der Ebene ε_∞ liegt nach der dort geführten Entwickelung in einer Geraden, welche die Axe a des Cylinders und die Tangente t_a bezüglich der Ebene ε_∞ nach dem Verhältniss $-2:2$ theilt, also im Mittelstrahl der letztgenannten Geraden, welcher für alle drei unendlich fernen Punkte durch $\mathfrak{u}$ geht.

Bei einer $C^{(3)}$ entspricht bekanntlich jedem Punkte des Raumes ein hierzu conjugirter, welcher die aus dem ersten Punkte an die Raumcurve gelegte Secante harmonisch theilt. Die aus $\mathfrak{u}$ an die $C^{(3)}$ gelegte und durch diesen Punkt halbirte Secante g trifft die Ebene ε_∞ im Schnittpunkte $\mathfrak{e}_\infty$ der drei Asymptotenebenen; der zu $\mathfrak{e}_\infty$ conjugirte Punkt $\mathfrak{u}$ ist der Pol der Gegenebene ε_∞. Ist umgekehrt zunächst $\mathfrak{u}$ als Gegenpunkt gegeben und soll dessen Polarebene bestimmt werden, so wenden wir die reciproken Constructionen in dem durch die $C^{(3)}$ inducirten Nullsystem an. Wir bilden die in diesem Nullsystem zu $\mathfrak{u}$ gehörige Ebene μ, und da die zu μ bezüglich der $C^{(3)}$ conjugirte Ebene wieder ε_∞ ist, folgt, dass dem Punkte $\mathfrak{u}$ als Gegenpunkt wieder die Ebene ε_∞ als Polarebene entspricht. Somit ergeben sich durch collineare und reciproke Verallgemeinerung folgende Sätze:

Der Pol einer beliebigen Ebene ε als Gegenebene bezüglich einer $C^{(3)}$ fällt zusammen mit demjenigen Punkte, welcher in der zu ε conjugirten Ebene ε' als Pol der letztern in Bezug auf das durch die $C^{(3)}$ inducirte Nullsystem liegt.

Die Polarebene eines beliebigen Punktes $\mathfrak{e}$ als Gegenpunkt bezüglich einer $C^{(3)}$ fällt zusammen mit derjenigen Ebene, welche durch den zu $\mathfrak{e}$ conjugirten Punkt $\mathfrak{e}'$ als Polarebene des letztern in Bezug auf das durch die $C^{(3)}$ inducirte Nullsystem geht.

Bei der cubischen Raumcurve ist die Beziehung zwischen den polaren Elementen involutorisch, d. h. zwei Elemente, welche einander bezüglich der Curve als Gegenpunkt und Polarebene entsprechen, entsprechen sich auch als Gegenebene und Pol.

Die vorstehenden Sätze enthalten Beziehungen für die Kegel dritter Ordnung und vierter Classe, durch welche die $C^{(3)}$ aus einem beliebigen Punkte projicirt wird, wie für die hierzu reciproken Curven, welche die Schmiegungsebenen der $C^{(3)}$ in einer beliebigen Schnittebene umhüllen. Der zuletzt aufgeführte Satz stellt eine Analogie zu den polaren Eigenschaften der Kegelschnitte dar, welche aber in weiterer Entwickelung nicht mehr

stattfindet. Beschreiben nämlich die Gegenpunkte eine beliebige Gerade g, so bilden die zu diesen bezüglich der cubischen Raumcurve conjugirten Punkte im Allgemeinen wieder eine cubische Raumcurve*, so dass die Polarebenen der ersten Punkte eine derartige Curve umhüllen. Unter Berücksichtigung der Specialfälle ergeben sich hiernach folgende Sätze:

Beschreibt der Gegenpunkt eine Gerade g, so umhüllt die Polarebene eine zweite cubische Raumcurve; hat die Gerade g mit der ursprünglichen $C^{(3)}$ einen Punkt gemeinschaftlich, so beschreibt die Polarebene einen Kegel zweiter Classe, und nur, wenn g ausserdem in die Schmiegungsebene des gemeinschaftlichen Punktes fällt, dreht sich auch die Polarebene um eine Gerade, welche, wie in diesem Falle auch g, ein sich selbst conjugirter Strahl des durch die $C^{(3)}$ inducirten Nullsystems ist.

Dreht sich die Gegenebene um eine Gerade g, so beschreibt der Pol eine zweite cubische Raumcurve; fällt g in eine Schmiegungsebene der ursprünglichen $C^{(3)}$, so beschreibt der Pol einen ebenen Kegelschnitt, und nur, wenn g ausserdem die $C^{(3)}$ im Berührungspunkte dieser Schmiegungsebene schneidet, beschreibt der Pol eine Gerade, welche, wie in diesem Falle auch g, ein sich selbst conjugirter Strahl des durch die $C^{(3)}$ inducirten Nullsystems ist.

Ferner:

Beschreibt der Gegenpunkt eine Secante der Raumcurve, so dreht sich die Polarebene in projectivischer Abhängigkeit um den der Secante entsprechenden Schmiegungsstrahl, und umgekehrt.

Den sämmtlichen Punkten einer Ebene γ (als Gegenpunkten) entsprechen als Polarebenen die Tangentialebenen einer Fläche dritter Classe $\Gamma^{(3)}$, welche auch von den Schmiegungsebenen der gegebenen $C^{(3)}$ berührt wird. Ist P ein gemeinschaftlicher Punkt von $C^{(3)}$ und γ, so geht $\Gamma^{(3)}$ durch die Tangente von $C^{(3)}$ in P und ist allen Kegeln eingeschrieben, welche einer Geraden in γ durch P entsprechen, so dass $\Gamma^{(3)}$ auch in

Den sämmtlichen Ebenen eines Ebenenbündels durch den Punkt $\mathfrak{p}$ (als Gegenebenen) entsprechen als Pole die Punkte einer Fläche $\mathfrak{P}^{(3)}$ dritter Ordnung, welcher auch $C^{(3)}$ angehört. Ist π eine aus $\mathfrak{p}$ an die $C^{(3)}$ gelegte Schmiegungsebene, so geht $\mathfrak{P}^{(3)}$ durch die Tangente von $C^{(3)}$ in π und durch alle Kegelschnitte, welche einer durch $\mathfrak{p}$ laufenden Geraden in π entsprechen, so dass $\mathfrak{P}^{(3)}$ auch in dreifacher Weise als Ort

* Vergl. Reye, Geometrie der Lage, II. Bd., II. Aufl., S. 106 flg.

dreifacher Weise als Enveloppe eines veränderlichen Kegels zweiter Ordnung entsteht. Die Schmiegungsebene in P schneidet γ in einer Geraden, welcher auf $\Gamma^{(3)}$ eine andere Gerade entspricht; ebenso entspricht jeder Secante in γ ein Schmiegungsstrahl auf $\Gamma^{(3)}$.

eines variablen Kegelschnittes entsteht. Der Verbindungslinie des Punktes $\mathfrak{p}$ mit dem Berührungspunkte von π entspricht auf $\mathfrak{P}^{(3)}$ wiederum eine Gerade, wie auch zu jedem Schmiegungsstrahl aus $\mathfrak{p}$ eine auf $\mathfrak{P}^{(3)}$ verlaufende Secante der $C^{(3)}$ gehört.

Die durch eine cubische Raumcurve zu einer Geraden inducirten polaren Gebilde geben Anlass zu folgenden sich reciprok entsprechenden Sätzen:

1. Die $C^{(3)}$ als Strictionslinie einer Developpablen betrachtet:

Die Pole, welche einer beliebigen Axe g in Bezug auf die Curven vierter Ordnung und dritter Classe entsprechen, welche die Schmiegungsebenen in den durch diese Axen gelegten Ebenen umhüllen, bilden eine Gerade g'.

2. Die $C^{(3)}$ als Grenze einer Röhrenfläche betrachtet:

Die Polarebenen, welche einem beliebigen Strahle g in Bezug auf die, aus den Punkten des Strahls durch die $C^{(3)}$ gelegten Kegel dritter Ordnung und vierter Classe entsprechen, gehen durch eine feste Gerade g'.

Von speciellen Fällen dieser Sätze seien hervorgehoben:

Schneidet g die $C^{(3)}$ in einem Punkte, so wird dieser Punkt ein Cuspidalpunkt der Schnittcurven, der Pol von g fällt daher stets in die Tangente desselben. Somit liegt g' in der Schmiegungsebene des Schnittpunktes. Wird g eine Secante der $C^{(3)}$, so wird g' der entsprechende Schmiegungsstrahl.

Liegt der Strahl g in einer Schmiegungsebene der $C^{(3)}$, so wird letztere eine Osculationsebene dieser Kegel. Die Polarebene von g geht stets durch den betreffenden Osculationsstrahl des Kegels. Die Schnittlinie g' dieser Polarebenen läuft also durch den Berührungspunkt der g enthaltenden Schmiegungsebenen. Wird g ein Schmiegungsstrahl der $C^{(3)}$, so ist g' die entsprechende Secante.

Liegt g in einer Schmiegungsebene, so fallen sämmtliche Pole von g in den Schnittpunkt von g mit der Tangente t der $C^{(3)}$ in dieser Schmiegungsebene zusammen. Eine Ausnahme findet für die Schnittcurve in der Schmiegungsebene selbst, welche in diese Tangente und einen Kegelschnitt zerfällt, statt. Für diesen Fall wird der Pol ein nach dem Frühe-

Schneidet g die $C^{(3)}$, so wird g ein gemeinschaftlicher Strahl aller sich längs desselben in einer gemeinschaftlichen Tangentialebene berührenden Kegel. Für den Schnittpunkt selbst degenerirt dieser Kegel dritter Ordnung in die Tangente der Curve und einen Kegel zweiter Ordnung. Die in Bezug auf die letzte zusammengesetzte Figur gebildete Polar-

ren leicht zu construirender Punkt ausserhalb g und t, so dass g' die in die Schmiegungsebene fallende Verbindungslinie dieses letzten Punktes mit dem Schnittpunkte (gt) wird.

Ist g ein Schmiegungsstrahl, berührt also die Developpable in zwei Punkten, so ist der Pol für jede Schnittcurve ein beliebiger Punkt in g; g' fällt also mit g zusammen. —

Die harmonischen Ebenen für einen beliebigen Strahl g bezüglich des Dreikants der Schmiegungsebenen, welche sich aus den Punkten dieses Strahls an eine cubische Raumcurve legen lassen, schneiden sich in einer Geraden g'. Diese Gerade g' kann auch als Polare der erstgegebenen Geraden g in Bezug auf das System der drei Tangenten erhalten werden, welche sich in den Berührungspunkten eines derartigen Dreikants an die $C^{(3)}$ legen lassen.

ebene von g schneidet die gemeinschaftliche Tangentialebene in der Geraden g'.

Ist g eine Secante der $C^{(3)}$, so wird diese Gerade zum Doppelstrahl aller durch die $C^{(3)}$ gelegten Kegel, fällt also mit g' zusammen. —

Die harmonischen Pole für die Axe g eines Ebenenbüschels bezüglich des Dreiecks der Schnittcurve, in welchen die Ebenen des Büschels mit einer cubischen Raumcurve zusammentreffen, liegen in einer Geraden g'.* Diese Gerade g' kann auch als Polare der erstgegebenen Geraden g in Bezug auf das System der drei Tangenten erhalten werden, welche sich in den Schnittpunkten einer Ebene des Büschels an die $C^{(3)}$ legen lassen.

Als specielle Fälle der letzten Sätze erwähnen wir:

Schneidet g die $C^{(3)}$, so liegt g' in der Schmiegungsebene dieses Schnittpunktes. Einer Secante g entspricht hiernach als Gerade g' der zugehörige Schmiegungsstrahl.

Liegt der Strahl g in einer Schmiegungsebene, so fällt die harmonische Ebene stets mit letzterer zusammen; einem Schmiegungsstrahle g kann jede durch g gehende Ebene als harmonische zugeordnet werden. —

Liegt g in einer Schmiegungsebene, so geht g' durch deren Berührungspunkt. Ist also g ein Schmiegungsstrahl, so wird g' die entsprechende Secante.

Hat die Axe g mit $C^{(3)}$ einen Punkt gemeinschaftlich, so fällt der Pol stets mit diesem Punkte zusammen; wird g zur Secante, so ist der Pol ein beliebiger Punkt derselben. —

* Der vorstehende Satz — eine Erweiterung des bekannten Falles, wo g der Schmiegungsstrahl einer $C^{(3)}$ — wurde nach einer brieflichen Mittheilung des Herrn Professor Dr. Schröter in Breslau durch Herrn Dr. Hurwitz in Königsberg gefunden und bot den ersten Anlass zur vorliegenden Arbeit.

Wir wenden uns nochmals zu Fig. 2. Der die $C^{(3)}$ schneidenden Geraden $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$ entspricht als geometrischer Ort der bezüglich der $C^{(3)}$ zu ihren Punkten conjugirten wieder eine Gerade, und zwar, da $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$ die zur Schmiegungsebene τ_a parallelen Secanten halbirt, die unendlich ferne Gerade dieser Ebene. Die in den Endpunkten einer derartigen Secante an die $C^{(3)}$ gelegten Schmiegungsebenen schneiden sich wieder in einer zu τ_a parallelen Schmiegungsaxe und hieraus folgt, dass die eben genannten Geraden sich auch bezüglich der durch sie gelegten conjugirten Ebenen entsprechen.

Betrachten wir andererseits das durch die Asymptoten t_a, t_b, t_c bestimmte Polarsystem, so ergiebt sich leicht, dass in diesem die Geraden $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$ und die unendlich ferne Gerade der Ebene τ_a in einer ganz entsprechenden Beziehung stehen. Mit Hilfe des durch die Asymptoten gelegten Hyperboloids erkennt man, dass alle Geraden (Secanten) dieses Systems, welche die beiden erzeugenden Geraden t_b und t_c schneidend parallel zu τ_a laufen, durch $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$ für die Strecke zwischen den Schnittpunkten mit t_b und t_c halbirt werden. Ferner werden die beiden durch eine solche Secante und die beiden Erzeugenden t_b und t_c gelegten Ebenen durch die erwähnten Geraden harmonisch getheilt.

Die collineare Verallgemeinerung ergiebt:

Den drei Strahlen, in welchen die von einem Punkte an die $C^{(3)}$ gelegten Schmiegungsebenen die Verbindungsebene ihrer Berührungspunkte durchsetzen, entsprechen als Orte der conjugirten Punkte und Ebenen die in gleicher Weise construirten Strahlen der zu dieser Verbindungsebene conjugirten Ebene. Jeder Strahl schneidet die im Schnittpunkte des entsprechenden Strahls mit der $C^{(3)}$ an letztere gelegte Tangente. Je zwei dieser Tangenten in den Schnittpunkten einer der conjugirten Ebenen und die zum dritten Schnittpunkte gehörigen, einander entsprechenden Strahlen bilden vier harmonische Erzeugende eines Hyperboloids.

Legt man zu einem Durchmesser der cubischen Raumcurve, z. B. zu $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$, zwei zu ihm parallele Ebenen in gleichen, aber entgegengesetzten Abständen, so schneiden diese Ebenen die $C^{(3)}$ in zwei einander gleichen Dreiecken, deren Eckpunkte sich derart entsprechen, dass die Verbindungslinie je zweier entsprechenden Eckpunkte der dem Durchmesser zugehörigen Schmiegungsebene τ_a parallel läuft und durch den Durchmesser selbst halbirt wird. Die Mittelpunkte (Schwerpunkte) aller dieser Dreiecke bilden nach Früherem eine den Durchmesser schneidende Gerade. Das Gleiche findet nach dem Vorstehenden statt, wenn wir die $C^{(3)}$ durch das System ihrer Asymptoten ersetzen, und zwar fallen die Schwerpunkte des in einer zu $|\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1|$ parallelen Ebene einmal durch die Durchbohrungspunkte der $C^{(3)}$, dann durch die Durchbohrungspunkte der Asymptoten bestimmten Dreiecke zusammen. Denkt man sich diese, mit ihren Ecken auf der $C^{(3)}$ liegenden,

unter sich und zu $|\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1|$ parallelen Dreiecke mit homogener Masse gefüllt, so fällt der Schwerpunkt eines solchen, durch zwei gleichweit von $|\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1|$ abstehende Ebenen begrenzten Körpers in den Durchmesser $|\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1|$. Alle nach vorstehender Construction gebildeten Schwerlinien bilden ein hyperbolisches Paraboloid, dessen eine Leitebene zu $\tau_{\mathfrak{a}}$ und dessen zweite Leitebene zu den Asymptoten $t_{\mathfrak{b}}$ und $t_{\mathfrak{c}}$ parallel läuft. Die alle drei Durchmesser enthaltende Mittelebene μ ist die einzige, für welche die zugehörige Schwerlinie — nämlich in diesem Falle die aus dem Mittelpunkte $\mathfrak{u}$ an die Raumcurve gelegte Secante — der geometrische Ort der den parallelen Schnittebenen entsprechenden Pole ist, und zwar sowohl bezüglich der $C^{(3)}$ selbst, wie bezüglich des durch die $C^{(3)}$ inducirten Nullsystems und bezüglich des durch die Asymptoten gelegten Hyperboloids.

Tarnowitz, im Mai 1886.

XII.

Zur Theorie der Elimination.

Von

Dr. Carl Schmidt

in Giessen.

In Serret's Höherer Algebra, Bd. I Cap. 4, sind Untersuchungen von Bézout über Elimination dargestellt, gegen welche sich noch einige Einwendungen erheben lassen. Da im Uebrigen die dort angewandte Methode in directer und theoretisch einfacher Weise die Bildung und Beschaffenheit der Eliminationsresultante kennen lehrt, so ist es wohl gerechtfertigt, wenn ich im Folgenden die Lücken, welche in den Betrachtungen noch geblieben sind, beseitige.

Gegeben seien n algebraische Gleichungen

$$V_1=0,\quad V_2=0,\quad \ldots,\quad V_n=0$$

der Unbekannten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ beziehungsweise vom Grade $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Es wird vorausgesetzt, dass jede Gleichung möglichst allgemein sei, d. h. jede Gleichung enthält alle Glieder, die überhaupt vermöge ihres Grades vorkommen können, und die Coefficienten sind von einander unabhängige, unbestimmte Grössen. Es handelt sich darum, alle Unbekannten bis auf z_n zu eliminiren, den Grad der Eliminationsresultante zu ermitteln, und zu bestimmen, wieviel Werthsysteme es giebt, die den gegebenen Gleichungen genügen.

Da man schon von vornherein vermuthen kann, dass die Eliminationsresultante in Bezug auf z_n vom Grade $m_1 . m_2 \ldots m_n$ ist und ebenso, wie bei zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, durch Composition der Functionen $V_1, V_2, \ldots, V_n$ mit geeigneten ganzen Functionen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ erhalten wird, so wird zur Abkürzung $m_1 . m_2 \ldots m_n = m$ gesetzt und nun folgende Aufgabe gestellt: Es sollen die ganzen Functionen $T_1, T_2, \ldots T_n$ beziehungsweise vom Grade $m-m_1, m-m_2, \ldots, m-m_n$ so bestimmt werden, dass

$$T_1 V_1 + T_2 V_2 + \ldots + T_n V_n = R(z_n)$$

eine ganze Function von z_n allein und zwar genau vom Grade m wird.

In der Darstellung von Serret wird für T_n nicht die allgemeinste ganze Function vom Grade $m-m_n$ eingeführt, sondern eine Function, welche in Bezug auf $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ in einer bestimmten Weise reducirt ist. Infolge dessen müssen erst Betrachtungen über diese Reduction voraus-

geschickt werden, und so wird die Aufgabe complicirter; wie mir scheint, ohne irgendwelchen Vortheil. Es soll daher im Folgenden T_n nicht beschränkt werden.

Diese Aenderung hat jedoch keinen Einfluss auf die Einwände, welche gegen die Darstellung Serret's erhoben werden müssen.

Das Polynom

$$T_1 V_1 + T_2 V_2 + \ldots + T_n V_n$$

soll nur noch die Variable z_n enthalten, folglich müssen alle Glieder mit Ausnahme der $m+1$ Glieder, aus welchen eine ganze Function von z_n noch bestehen kann, wegfallen. Bezeichnet man die unbekannten Coefficienten von $T_1, T_2, \ldots, T_n$ mit $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$, so ergiebt sich folgendes Gleichungssystem:

$$1)\quad \begin{array}{llll} a_{11} & u_1 + a_{12} & u_2 + \ldots + a_{1\lambda} & u_\lambda = 0, \\ a_{21} & u_1 + a_{22} & u_2 + \ldots + a_{2\lambda} & u_\lambda = 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_{\mu-1,1} & u_1 + a_{\mu-1,2} & u_2 + \ldots + a_{\mu-1,\lambda} & u_\lambda = 0, \\ a_{\mu 1} & u_1 + a_{\mu 2} & u_2 + \ldots + a_{\mu\lambda} & u_\lambda = 1. \end{array}$$

Die letzte Gleichung entsteht, weil der Coefficient von z_n^m gleich 1 werden soll.

Die Grössen a_{ik} sind lineare homogene Functionen der Coefficienten von $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Es muss nun zunächst die Anzahl der Unbekannten und der Gleichungen festgestellt werden. Bezeichnet man mit $N(n, m)$ die Anzahl der Glieder, welche die allgemeinste ganze Function m^{ten} Grades von n Variabeln besitzen kann, so ist

$$N(n, m) = \binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}.$$

Dann ist offenbar die Anzahl der unbekannten Coefficienten $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ gleich

$$\lambda = N(n, m - m_1) + N(n, m - m_2) + \ldots + N(n, m - m_n) = \sum_{(c_1)} N(n, m - m_1).$$

Die Anzahl der Gleichungen ist

$$\mu = N(n, m) - m.$$

Nun wird im Art. 66 in Serret's Algebra aus der Eigenschaft der Combinationszahlen bewiesen, dass

$$N(n, m) - \sum_{(c_1)} N(n, m - m_1) + \sum_{(c_2)} N(n, m - m_1 - m_2) \mp \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n N(n, m - m_1 - m_2 - \ldots - m_n) = m_1 . m_2 \ldots m_n$$

ist, vorausgesetzt, dass $m \geqq (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \ldots + (m_n - 1)$ ist. Diese Bedingung ist für $m = m_1 . m_2 \ldots m_n$ sicher erfüllt. Dabei bedeutet z. B. $\sum_{(c_2)} N(n, m - m_1 - m_2)$ die Summe aller Glieder, welche aus $N(n, m - m_1 - m_2)$ entstehen, wenn man statt m_1, m_2 nach und nach alle Combinationen zweiter

Classe der Grössen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ einsetzt. Ferner ergiebt sich leicht (vergl. Art. 67), dass

$$\sum_{(c_1)} N(n, m - m_1) \geqq \sum_{(c_1)} N(n, m - m_1) - \sum_{(c_2)} N(n, m - m_1 - m_2) \pm \cdots + (-1)^{n-1} N(n, m - m_1 - m_2 - \ldots - m_n)$$

ist. Daher ist für $m = m_1 . m_2 \ldots m_n$

$$N(n, m) \leqq m + \sum_{(c_1)} N(n, m - m_1)$$

oder

$$N(n, m - m_1) + N(n, m - m_2) + \ldots + N(n, m - m_n) \geqq N(n, m) - m,$$

d. h.

$$\lambda \geqq \mu.$$

In dem Gleichungssystem 1) ist demnach die Anzahl der Gleichungen höchstens gleich der Anzahl der Unbekannten. Um nun die Frage zu entscheiden, ob diese Gleichungen auflösbar sind, betrachtet Serret den speciellen Fall, in welchem sich $V_1, V_2, \ldots, V_n$ beziehungsweise auf

$$z_1^{m_1} - a, \quad z_2^{m_2} - z_1, \quad \ldots, \quad z_n^{m_n} - z_{n-1}$$

reduciren. Wählt man hier

$$T_n = z_n^{m_1 . m_2 \ldots m_n - m_n} + z_{n-1} z_n^{m_1 . m_2 \ldots m_n - 2m_n} + \ldots + z_{n-1}^{m_1 . m_2 \ldots m_{n-1} - 1},$$
$$T_{n-1} = z_{n-1}^{m_1 . m_2 \ldots m_{n-1} - m_{n-1}} + z_{n-2} z_{n-1}^{m_1 . m_2 \ldots m_{n-1} - 2m_{n-1}} + \ldots + z_{n-1}^{m_1 . m_2 \ldots m_{n-2} - 1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$T_1 = 1,$$

so wird

$$T_1 V_1 + T_2 V_2 + \ldots + T_n V_n = z_n^m - a.$$

Nun schliesst Serret: Da die Lösung des Gleichungssystems 1) nicht unmöglich ist, wenn man den Coefficienten der gegebenen Gleichungen gewisse besondere Werthe giebt, so kann eine solche Unmöglichkeit auch im allgemeinen Falle nicht eintreten.

Dieser Schluss ist nicht gerechtfertigt.

Um zu bestimmen, ob ein Gleichungssystem von der Form des Systems 1) auflösbar ist oder nicht, hat man zunächst zu suchen, wieviel von einander linear unabhängige Gleichungen unter den ersten $\mu - 1$ homogenen Gleichungen enthalten sind. Diese Anzahl sei gleich $\nu \leqq \mu - 1$, sie heisst die Stufenzahl oder der Rang des Systems. Nicht alle Determinanten ν^{ter} Ordnung aus dem System der a_{ik} ($i = 1, 2, \ldots, \mu - 1$; $k = 1, 2, \ldots, \lambda$) werden dann identisch verschwinden, wohl aber die Determinanten höherer Ordnung, falls solche überhaupt existiren. Man darf nun das Gleichungssystem 1) eventuell so reduciren, dass nur die ν von einander unabhängigen homogenen Gleichungen und die eine nicht homogene

$$a_{\mu 1} u_1 + a_{\mu 2} u_2 + \ldots + a_{\mu \lambda} u_\lambda = 1$$

stehen bleiben. Ist jetzt in diesem reducirten System eine Determinante von der Ordnung $\nu + 1$ nicht identisch 0, so ist das System auflösbar; sind dagegen alle Determinanten von der Ordnung $\nu + 1$ identisch 0, so ist das System nicht auflösbar.

Nun ist es denkbar, dass bei dem Uebergang von dem allgemeinen zu einem speciellen Falle Determinanten, welche im allgemeinen Falle nicht identisch 0 waren, verschwinden, dass also der Rang des homogenen Gleichungssystems sich von ν auf $\nu-\varrho$ erniedrigt. Tritt dieser Fall ein, so kann das System 1) im speciellen Falle lösbar sein, im allgemeinen aber nicht. Es ist dazu nur nöthig, dass eine bestimmte Determinante von der Ordnung $\nu-\varrho+1$ im speciellen Falle, folglich auch im allgemeinen Falle nicht identisch verschwindet, dass aber alle Determinanten von der Ordnung $\nu+1$ identisch Null sind.

Um die Lücke in dem Beweise auszufüllen, werde ich Folgendes zeigen.

Es sei S die allgemeinste ganze Function der Variabeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$ vom Grade m. Dann können in dem speciellen Falle, wo

$$V_1 = z_1^{m_1} - a, \quad V_2 = z_2^{m_2} - z_1, \quad \ldots, \quad V_n = z_n^{m_n} - z_{n-1}$$

ist, die ganzen Functionen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ beziehungsweise vom Grade $m-m_1$, $m-m_2, \ldots, m-m_n$ so bestimmt werden, dass

$$S + T_1 V_1 + T_2 V_2 + \ldots + T_n V_n$$

eine ganze Function von z_n allein wird, deren Grad kleiner als m ist.

Ist dies bewiesen, so folgt, dass das Gleichungssystem

$$2)\qquad \begin{array}{l} a_{11} \quad u_1 + a_{12} \quad u_2 + \ldots + a_{1\lambda} \quad u_\lambda = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{\mu-1,1} u_1 + a_{\mu-1,2} u_2 + \ldots + a_{\mu-1,\lambda} u_\lambda = b_{\mu-1}, \\ a_{\mu 1} \quad u_1 + a_{\mu 2} \quad u_2 + \ldots + a_{\mu\lambda} \quad u_\lambda = b_\mu \end{array}$$

im speciellen Falle bei beliebig gewählten Werthen von $b_1 \ldots b_\mu$ auflösbar ist. Die μ homogenen Functionen auf der linken Seite müssen demnach im speciellen und im allgemeinen Falle von einander linear unabhängig sein, d. h.: nicht alle Determinanten μ^{ter} Ordnung können identisch verschwinden. Daher sind auch im allgemeinen Falle die Gleichungssysteme 1) und 2) auflösbar.

Die ganze Function S wird zunächst in der Weise reducirt, dass alle Glieder wegfallen, welche durch $z_1^{m_1}$ oder durch $z_2^{m_2}$ u. s. w. oder schliesslich durch $z_n^{m_n}$ theilbar sind. Man kann nämlich S folgendermassen zerlegen:

$$S = z_n^{m_n} . S' + T,$$

wo S' vom Grade $m-m_n$ ist und T nur noch solche Glieder enthält, die nicht mehr durch $z_n^{m_n}$ theilbar sind. Dann ist

$$\begin{aligned} S - S' V_n &= z_n^{m_n} S' + T - S'(z_n^{m_n} - z_{n-1}) \\ &= z_{n-1} S' + T. \end{aligned}$$

Nun sei

$$S' = z_n^{m_n} . S'' + T',$$

wo S'' vom Grade $m - 2m_n$ ist und T' nur noch Glieder enthält, die nicht mehr durch $z_n^{m_n}$ theilbar sind. Dann ist

$$S-(S'+z_{n-1}S'')V_n = z_n^{m_n}.z_{n-1}S''+z_{n-1}T'+T-z_{n-1}S''(z_n^{m_n}-z_{n-1})$$
$$= z_{n-1}^2 S''+z_{n-1}T'+T.$$

So fortfahrend, findet man eine ganze Function W_n vom Grade $m-m_n$, so dass $S+W_n V_n$ die Variable z_n nur noch in Potenzen enthält, deren Exponenten kleiner als m_n sind.

Indem man dasselbe Verfahren weiter successive auf $z_{n-1}, z_{n-2}, \ldots, z_1$ anwendet, erhält man die ganzen Functionen $W_n, W_{n-1}, \ldots, W_1$ beziehungsweise vom Grade $m-m_n, m-m_{n-1}, \ldots, m-m_1$, so dass in

$$S+W_n V_n+W_{n-1}V_{n-1}+\ldots+W_1 V_1 = \bar{S}$$

alle Glieder wegfallen, welche durch $z_1^{m_1}$ oder $z_2^{m_2}$ u. s. w. oder schliesslich durch $z_n^{m_n}$ theilbar sind. Es ist demnach $\bar{S}$ eine Summe von Gliedern von der Form

$$\alpha z_1^{h_1} z_2^{h_2} z_n^{h_n},$$

wo $h_1 \leqq m_1-1,\ h_2 \leqq m_2-1,\ \ldots,\ h_n \leqq m_n-1$ ist.

Setzt man jetzt $z_1 = z_2^{m_2}$, so geht $\alpha z_1^{h_1} z_2^{h_2}\ldots z_n^{h_n}$ über in

$$\alpha z_2^{h_1 m_2+h_2} z_3^{h_3}\ldots z_n^{h_n}.$$

Diese Substitution hat denselben Erfolg, als wenn zu das Product

$$\alpha z_1^{h_1} z_2^{h_2}\ldots z_n^{h_n}$$

$$(z_2^{m_2}-z_1).\alpha z_2^{h_2} z_3^{h_3}\ldots z_n^{h_n}.(z_1^{h_1-1}+z_1^{h_1-2}z_2^{m_2}+\ldots+z_2^{(h_1-1)m_2}) = V_2.A_2$$

hinzugefügt würde. Der Grad von A_2 ist gleich

$$-m_2+h_1 m_2+h_2+h_3+\ldots+h_n$$
$$<-m_2+h_1 m_2 m_3\ldots m_n+h_2 m_3\ldots m_n+\ldots+h_{n-1}m_n+h_n$$
$$\leqq -m_2+(m_1-1)m_2 m_3\ldots m_n+(m_2-1)m_3\ldots m_n+\ldots+(m_{n-1}-1)m_n+m_n-1$$
$$< m-m_2.$$

Setzt man jetzt in $\alpha z_2^{h_1 m_2+h_2} z_3^{h_3}\ldots z_n^{h_n}$

$$z_2 = z_3^{m_3},$$

so hat diese Substitution denselben Erfolg, als wenn das Product

$$(z_3^{m_3}-z_2)\,\alpha z_3^{h_3}\ldots z_n^{h_n}(z_2^{h_1 m_2+h_2-1}+z_2^{h_1 m_2+h_2-2}z_3^{m_3}+\ldots+z_3^{(h_1 m_2+h_2-1)m_3})$$
$$= V_3.A_3$$

hinzugefügt würde. Der Grad von A_3 ist kleiner als $m-m_3$.

Fährt man so fort, so geht schliesslich $\alpha z_1^{h_1} z_2^{h_2}\ldots z_n^{h_n}$ über in

$$\alpha z_n^{h_1 m_2 m_3\ldots m_n+h_2 m_3\ldots m_n+\ldots+h_{n-1}m_n+h_n}.$$

Der Exponent von z_n erreicht höchstens die Zahl $m-1$. Die ganze Function $\bar{S}$ verwandelt sich also in eine ganze Function von z_n allein, deren Grad kleiner als m ist. Diese Aenderung wird dadurch erzielt, dass zu $\bar{S}$ ein Polynom $U_2 V_2+\ldots+U_n V_n$ addirt wird, wo der Grad von U_i die Zahl $m-m_i$ nicht erreicht. Damit ist also die Reduction von S nachgewiesen und die Lücke in dem Beweise vollständig ausgefüllt.

Man kann demnach die ganzen Functionen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ so bestimmen, dass

$$T_1 V_1+T_2 V_2+\ldots+T_n V_n = R(z_n)$$

ist. $R(z_n)$ ist vom Grade $m = m_1 m_2\ldots m_n$. Die Coefficienten von $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sind durch lineare Gleichungen bestimmt und enthalten deshalb eine

gewisse Determinante μ^{ter} Ordnung als Nenner. Denkt man sich beide Seiten mit dieser Determinante multiplicirt, so werden die Coefficienten von T_1, $T_2, \ldots, T_n$ und von $R(z_n)$ ganze Functionen der Coefficienten von V_1, V_2, $\ldots$, V_n. Der Coefficient von $z_n{}^m$ auf der rechten Seite ist dann nicht mehr gleich 1, sondern gleich der Determinante μ^{ter} Ordnung. In dem mehrfach erwähnten speciellen Falle muss sich R auf $z_n{}^m - a$ reduciren. Diese Function ist als ganze Function von z_n und a irreducibel; folglich muss auch im allgemeinen Falle R, als ganze Function von z_n und von den Coefficienten von V_1, V_2, $\ldots$, V_n betrachtet, irreducibel sein.

Aus der Identität

$$T_1 V_1 + T_2 V_2 + \ldots + T_n V_n = R(z_n)$$

schliesst man: Ist ζ_1, ζ_2, $\ldots$, ζ_n ein Werthsystem, welches den Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $\ldots$, $V_n = 0$ genügt, so ist ζ_n eine Wurzel der Gleichung $R(z_n) = 0$.

Es fragt sich aber jetzt: Giebt es überhaupt Werthsysteme, die diesen Gleichungen genügen, und wieviele?

Nun hat Liouville im 12. Bande seines Journals eine Methode veröffentlicht, durch welche man zu jeder Wurzel der Gleichung $R(z_n) = 0$ eindeutig die zugehörigen Werthe der eliminirten Unbekannten z_1, z_2, $\ldots$, z_{n-1} erhält. Dass aber die so gefundenen Werthsysteme wirklich den gegebenen Gleichungen genügen, wird von Liouville stillschweigend als richtig angenommen, von Serret aber, wie es auch in diesem Zusammenhange nothwendig ist, in Art. 75 besonders bewiesen. Dabei wird jedoch der Satz gebraucht, dass es keine Gleichung $\varphi(z_n) = 0$ geben kann, deren Grad kleiner als m ist und welche sich als nothwendige Folge aus den gegebenen Gleichungen herleiten liesse; und zur Begründung dieses Satzes wird gesagt: Da offenbar in dem schon betrachteten speciellen Falle eine solche Gleichung unmöglich ist, so kann sie auch im allgemeinen Falle nicht existiren. Allein es lässt sich doch dagegen einwenden, dass vielleicht im allgemeinen Falle eine solche Gleichung möglich wäre, aber bei dem Uebergange zu dem speciellen Falle sich in eine Identität verwandeln könnte.

Um nun diese Lücke im Beweise auszufüllen, ohne die Existenz irgend eines alle Gleichungen befriedigenden Werthsystems schon vorauszusetzen und ohne die Functionentheorie zu Hilfe zu nehmen, kann man folgendermassen verfahren.

Setzt man nach Liouville

$$z_n = z - \alpha_1 z_1 - \alpha_2 z_2 - \ldots - \alpha_{n-1} z_{n-1}$$

in V_1, V_2, .. , V_n ein, eliminirt nun z und setzt dann wieder

$$z = z_n + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_{n-1} z_{n-1},$$

so erhält man die Identität

$$W_1 V_1 + W_2 V_2 + \ldots + W_n V_n \equiv R(z_n + \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_{n-1} z_{n-1};\ \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}).$$

Hier sind $W_1, W_2, \ldots W_n$ ganze Functionen von $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, $z_n + \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_{n-1} z_{n-1}$, deren Coefficienten selbst noch ganze Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ sind, während $V_1, V_2, \ldots, V_n$ die ursprüngliche Bedeutung haben, also von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ unabhängig sind. Ordnet man links und rechts nach Potenzen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ und vergleicht die entsprechenden Glieder, so ergiebt sich

$$
3)\quad \begin{array}{l}
T_1 \quad V_1 + T_2 \quad V_2 + \ldots + T_n \quad V_n = R(z_n),\\
T_{11} \quad V_1 + T_{12} \quad V_2 + \ldots + T_{1n} \quad V_n = R'(z_n) z_1 + R_1(z_n),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
T_{n-1,1} V_1 + T_{n-1,2} V_2 + \ldots + T_{n-1,n} V_n = R'(z_n) z_1 + R_{n-1}(z_n).
\end{array}
$$

Bezeichnet man mit Δ die Determinante der links stehenden n linearen Formen von $V_1, \ldots, V_n$, so sind umgekehrt

$$\Delta V_1,\ \Delta V_2,\ \ldots,\ \Delta V_n$$

lineare homogene Functionen von

$$R(z_n),\quad R'(z_n) z_1 + R_1(z_n),\quad \ldots,\quad R'(z_n) z_{n-1} + R_{n-1}(z_n).$$

Sind also die letzteren gleich Null, so folgt, dass die Gleichungen

$$V_1 = 0,\quad V_2 = 0,\quad \ldots,\quad V_n = 0$$

bestehen, wenn man weiss, dass Δ in diesem Falle nicht Null wird.

Es bleibt demnach nur Folgendes zu beweisen übrig. Setzt man in Δ

$$z_1 = -\frac{R_1(z_n)}{R'(z_n)},\quad \ldots,\quad z_{n-1} = -\frac{R_{n-1}(z_n)}{R'(z_n)}$$

und multiplicirt mit einer geeigneten Potenz von R', so entsteht eine ganze Function von z_n, welche **nicht** durch $R(z_n)$ theilbar ist.

Wäre dies der Fall, so würde auch in jedem speciellen Beispiele die entsprechende ganze Function von z_n durch $R(z_n)$ theilbar sein, d. h. Δ verschwinden, wenn gleichzeitig

$$R(z_n),\quad R'(z_n) z_1 + R_1(z_n),\quad \ldots,\quad R'(z_n) z_{n-1} + R_{n-1}(z_n)$$

gleich Null wären.

Dies trifft jedoch nicht zu.

Ist nämlich

$$V_1 = z_1^{m_1} - a,\quad V_2 = z_2^{m_2} - z_1,\quad \ldots,\quad V_n = z_n^{m_n} - z_{n-1},$$

so ist

$$R(z_n) = z_n^{m_1 m_2 \ldots m_n} - a \qquad = 1 . V_1 + T_2 V_2 + T_3 V_3 + \ldots + T_n \quad V_n .$$

Ebenso

$$
4)\quad \begin{array}{lcr}
z_n^{m_2 m_3 \ldots m_n} - z_1 & = & 1 . V_2 + S_{13} V_3 + \ldots + S_{1n} V_n,\\
z_n^{m_3 \ldots m_n} \quad - z_2 & = & 1 . V_3 + \ldots + S_{2n} V_n,\\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots,\\
z_n^{m_n} \qquad - z_{n-1} & = & 1 . V_n .
\end{array}
$$

Denkt man sich nun für dieses Beispiel ausserdem noch das Gleichungssystem 3) gebildet, so heisst z. B. die i^{te} Gleichung:

$$R'(z_n) z_i + R_i(z_n) = T_{i1} V_1 + T_{i2} V_2 + \ldots + T_{in} V_n .$$

Nun ist $R'(z_n)z_n^{m_{i+1}\dots m_n}+R_i(z_n)$ Null, wenn $R(z_n)$ gleich Null ist, folglich

$$R'(z_n)z_n^{m_{i+1}\dots m_n}+R_i(z_n)=R(z_n).\varphi_i(z_n),$$

also durch Subtraction

$$R'(z_n)(z_i-z_n^{m_{i+1}\dots m_n})=T_{i1}V_1+\dots+T_{in}V_n-R(z_n)\varphi_i(z_n)$$
$$=(T_{i1}-\varphi_i T_1)V_1+\dots+(T_{in}-\varphi_i T_n)V_n.$$

Andererseits ist nach 4)

$$R'(z_n)(z_i-z_n^{m_{i+1}\dots m_n})=-R'(z_n)V_{i+1}-\dots-R'(z_n)S_{in}V_n.$$

Daher ist die Differenz der rechten Seiten identisch Null. Ist aber ein Ausdruck von der Form

$$U_1V_1+U_2V_2+\dots+U_nV_n$$

oder

$$U_1(z_1^{m_1}-a)+U_2(z_2^{m_2}-z_1)+\dots+U_n(z_n^{m_n}-z_{n-1})$$

identisch Null, so muss U_1 die Form haben:

$$U_1=A_2V_2+A_3V_3+\dots+A_nV_n,$$

ebenso

$$U_2=B_1V_1+B_3V_3+\dots+B_nV_n$$

u. s. w., oder nach der bequemen Kronecker'schen Schreibweise:

$$U_1\equiv 0 \text{ modd } V_2,\ V_3,\ \dots,\ V_n,$$
$$U_2\equiv 0 \text{ modd } V_1,\ V_3,\ \dots,\ V_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$U_n\equiv 0 \text{ modd } V_1,\ V_2,\ \dots,\ V_{n-1}.$$

Denn setzt man z. B. in der identischen Gleichung

$$a=z_1^{m_1},\quad z_2=z_3^{m_3},\quad z_3=z_4^{m_4},\quad \dots,\quad z_{n-1}=z_n^{m_n},$$

so wird U_2 eine ganze Function von z_1 und z_n, welche identisch verschwinden muss. Die Substitutionen haben aber, wie früher schon nachgewiesen ist, denselben Erfolg, als wenn von U_2 ein Ausdruck von der Form

$$B_1V_1+B_3V_3+\dots+B_nV_n$$

subtrahirt würde; folglich ist

$$U_2=B_1V_1+B_3V_3+\dots+B_nV_n$$

oder

$$U_2\equiv 0 \text{ modd } V_1,\ V_3,\ \dots,\ V_n.$$

Nun ist die Function $R'(z_n).(z_i-z_n^{m_{i+1}\dots m_n})$ auf zwei verschiedene Arten als lineare homogene Function von $V_1\dots V_n$ dargestellt worden, folglich ist

$$T_{i1}\equiv\varphi_i T_1 \qquad \text{modd } V_2,\ V_3,\ \dots,\ V_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$T_{ii}\equiv\varphi_i T_i \qquad \text{modd } V_1\dots V_{i-1},\ V_{i+1}\dots V_n,$$
$$T_{i,i+1}\equiv\varphi_i T_{i+1}-R'(z_n) \qquad \text{modd } V_1\dots V_i,\ V_{i+2}\dots V_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$T_{in}\equiv\varphi_i T_n-R'(z_n)S_{in} \text{ modd } V_1,\ V_2,\ \dots,\ V_{n-1}.$$

Bestimmt man $z_n, z_1, \ldots, z_{n-1}$ aus den Gleichungen

$$R(z_n) = 0, \quad R'(z_n) z_1 + R_1(z_n) = 0, \quad \ldots, \quad R'(z_n) z_{n-1} + R_{n-1}(z_n) = 0,$$

so werden im speciellen Falle $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, ..., $V_n = 0$; daher wird

$$\Delta = [-R'(z_n)]^{n-1}$$

nicht Null.

Dies war aber das einzige Resultat, welches noch bewiesen werden musste.

Es giebt demnach genau $m_1 . m_2 \ldots, m_n$ verschiedene Werthsysteme $z_1 \ldots z_n$, welche den n gegebenen Gleichungen genügen, und zwar erhält man dieselben durch Auflösung des Systems

$$R(z_n) = 0, \quad R'(z_n) z_1 + R_1(z_n) = 0, \quad \ldots, \quad R'(z_n) z_{n-1} + R_{n-1}(z_n) = 0.$$

Giessen, im Mai 1886.

XIII.

Ueber die Auflösung der allgemeinen trinomischen Gleichung $t^n + at^{n-s} + b = 0$.

Von

Woldemar Heymann

in Dresden.

Vorbemerkung.

Die nachstehende Arbeit schliesst sich bezüglich der Fragestellung den früheren Untersuchungen des Verfassers über die einfachere trinomische Gleichung $t^n + at + b = 0$ eng an. — Vergl. Math. Annalen Bd. XXVI und den laufenden Jahrgang dieser Zeitschrift, 3. Heft.

Es handelt sich allerorts darum, die genannten trinomischen Gleichungen durch geschlossene, wenn auch transcendente Ausdrücke aufzulösen, wobei es natürlich sehr wesentlich ist, dass letztere in möglichst einfacher Weise numerisch auswerthbar sind. Diese Ausdrücke, also die Wurzeln der trinomischen Gleichung, erscheinen nach unserer früheren Darstellung in der Form von $(n-1)$ resp. n-fachen bestimmten Integralen, und eben diese Integrale wurden dadurch gefunden, dass wir jene lineare Differentialgleichung aufstellten, welcher sämmtliche Wurzeln der trinomischen Gleichung genügen, und hierauf die Differentialgleichung mittels bestimmter Integrale integrirten.

In der vorliegenden Abhandlung betrachten wir allgemeinere trinomische Gleichungen als früher und zwar insbesondere

$$\left.\begin{aligned} \eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 &= 0 \\ y^n + y^{n-s} + x &= 0 \\ uv^n + v^{n-s} + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und stellen die m^{ten} Potenzen ihrer Wurzeln mittels des Mac Laurinschen Theorems durch Reihen dar.

Aus der Gestalt dieser Reihen erschliessen wir sodann, dass sich selbige durch Doppelintegrale summiren lassen, und dass mithin die trinomischen Gleichungen ebenfalls durch Doppelintegrale aufgelöst werden können, während hierzu früher, wie schon gesagt, n-fache Integrale in Verwendung kamen.

Endlich stellen wir jene linearen Differentialgleichungen auf, denen die m^{ten} Potenzen der Wurzeln der trinomischen Gleichung genügen, und integriren dieselben durch die zuvor gefundenen Reihen und Doppelintegrale.

Es möge an dieser Stelle noch darauf hingewiesen sein, dass das ebenerwähnte Doppelintegral den Ausgangspunkt für allgemeinere Untersuchungen bildet, welche die Gleichung n^{ten} Grades

$$\eta^n + \xi_1 \eta^{n-s_1} + \ldots + \xi_{n-1} \eta^{n-s_{n-1}} + 1 = 0$$

betreffen. In der That lassen sich sämmtliche Wurzeln dieser allgemeinsten algebraischen Gleichung durch bestimmte Integrale darstellen. — Vergl. hierüber die einschlägige Arbeit des Verfassers in dem Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, Bd. 101.

I. Zusammenhang zwischen den Fundamentalformen.

Jede trinomische Gleichung kann auf folgende Hauptgleichung

$$\eta) \quad \eta^n + \xi \eta^{n-s} + 1 = 0$$

zurückgeführt werden. Die späteren Untersuchungen erfordern es, dass wir der Hauptgleichung noch die anderen beiden

$$y) \quad y^n + y^{n-s} + x = 0, \qquad v) \quad uv^n + v^{n-s} + 1 = 0$$

an die Seite stellen, und diese drei Gleichungen, welche die Fundamentalformen der trinomischen Gleichung genannt werden mögen, hängen in folgender Weise zusammen.

Sie gehen in einander über, wenn wir die Substitutionen

$$1) \qquad \xi^{-n} = x^s = u^{n-s}, \quad \eta = y x^{-\frac{1}{n}} = v u^{\frac{1}{n}}$$

gebrauchen. Ausserdem verwandelt sich Gleichung $y)$ in $v)$ und umgekehrt, falls wir

$$x,\ y,\ n-s \ \text{ resp. mit } \ u,\ v^{-1},\ s$$

vertauschen, während die Hauptgleichung $\eta)$ ungeändert bleibt, wenn

$$\eta,\ n-s \ \text{ resp. mit } \ \eta^{-1},\ s$$

verwechselt wird.

Gewisse allgemeinere algebraische Untersuchungen lassen es wünschenswerth erscheinen, dass wir von Anfang an die Potenzen

$$2) \qquad \eta^m = \zeta, \quad y^m = z, \quad v^m = w$$

in Betracht ziehen, d. h. direct diese als Functionen von ξ, resp. x, resp. u zu entwickeln versuchen.

Bezeichnen wir die Fundamentalformen $\eta)$, $y)$, $v)$, nachdem die Werthe unter 2) entsprechend eingesetzt sind, bez. mit $\zeta)$, $z)$, $w)$, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass die letzten Gleichungen mittels der Substitutionen

$$3)\qquad \xi^{-n}=x^{s}=u^{n-s},\quad \zeta=z\,x^{-\frac{m}{n}}=w\,u^{\frac{m}{n}}$$

in einander übergeführt werden können. Ausserdem verwandelt sich Gleichung z) in w) und umgekehrt, wenn wir

$$x,\ z,\ n-s,\ m \ \text{resp. mit}\ u,\ w,\ s,\ -m$$

vertauschen, während die Hauptgleichung ζ) ungeändert bleibt, wenn

$$n-s,\ m \ \text{resp. mit}\ s,\ -m$$

verwechselt wird.

II. Auflösung der Fundamentalform

$$\zeta)\quad \begin{cases} \eta^{n}+\xi\eta^{n-s}+1=0,\\ y^{m}=\zeta. \end{cases}$$

Es möge folgender Weg eingeschlagen werden.

Wir bestimmen $\left(\frac{d^h\zeta}{d\xi^h}\right)_{\xi=0}$ und entwickeln ζ als Function von ξ nach dem Theorem von Mac-Laurin. Hierbei wird sich zeigen, dass die Reihe bedingungsweise convergirt und dass sie sich durch ein Doppelintegral summiren lässt.

Nach einer bekannten Formel* von Schlömilch ergiebt sich, dass

$$\left(\frac{d^h\eta^m}{d\xi^h}\right)_{\xi=0}=m\cdot\left\{\frac{d^h}{d\xi^h}\left(\frac{\eta^{m-hs}}{m-hs}\right)\right\}_{\xi=0},\quad \eta^{-n}+\xi+1=0$$

oder

$$4)\qquad \left(\frac{d^h\zeta}{d\xi^h}\right)_{\xi=0}=\frac{m}{n}\cdot(-1)^{\frac{hs-m}{n}+h}\cdot\prod_{k=1}^{h-1}\left(k-\frac{hs-m}{n}\right),\quad \prod_1^0=1,$$

und dieser Ausdruck lässt sich mittels der Relation

$$\Gamma(\alpha).\Gamma(h-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\cdot\prod_{k=1}^{h-1}(k-\alpha),\quad \alpha>0$$

in eine für unsere Zwecke schicklichere Form setzen, nämlich

$$5)\qquad \zeta_0^{(h)}=\frac{m}{n}\cdot(-1)^{\frac{hs-m}{n}+h}\cdot\frac{\sin\frac{hs-m}{n}\pi}{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{hs-m}{n}\right)\cdot\Gamma\left(h-\frac{hs-m}{n}\right).$$

a) Reihenentwickelung.

Wir bilden

$$6)\qquad \begin{cases} \zeta=\sum_{h=0}^{h=\infty}\zeta_0^{(h)}\frac{\xi^h}{h!}=\sum_{h=0}^{h=n-1}R_h,\\ R_h=\sum_{i=0}^{i=\infty}\zeta_0^{(h+in)}\frac{\xi^{h+in}}{(h+in)!}, \end{cases}\qquad \zeta_0=(\zeta)_{\xi=0},$$

und beachten, dass aus 5)

* Diese für unsere algebraischen Untersuchungen überaus wichtige Formel lautet

$$\zeta_0^{(h+n)} = (-1)^n \zeta_0^{(h)} . \prod_{k=0}^{s-1}\left(k + \frac{hs-m}{n}\right) . \prod_{k'=0}^{n-s-1}\left(k' + h - \frac{hs-m}{n}\right)$$

folgt. Durch eine einfache Umformung des letzten Productes gelangen wir zu

7) $$\zeta_0^{(h+n)} = \Delta . \zeta_0^{(h)} . f(h),$$

wobei

8) $$\Delta = (-1)^n n^{-n} s^s (n-s)^{n-s}$$

und

9) $$f(h) = \prod_{k=0}^{s-1}\left(h - \left[\frac{m}{s} - k\frac{n}{s}\right]\right) . \prod_{k'=0}^{n-s-1}\left(h + \left[\frac{m}{n-s} + k'\frac{n}{n-s}\right]\right),$$

d. h., wo $f(h)$ die linke Seite einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades für h vorstellt, deren Wurzeln aus den Parametern der trinomischen Gleichung $\zeta)$ in bestimmter Weise zu construiren sind. Durch successive Anwendung der Formel 7) ergiebt sich

10) $$\zeta_0^{(h+in)} = \Delta^i \zeta_0^{(h)} \prod_{j=0}^{j=i-1} f(h+jn), \quad \prod_0^{-1} = 1,$$

und vermöge dieser Beziehung stellt sich die Reihenentwickelung wie folgt dar:

11) $$\zeta = \sum_{h=0}^{n-1} R_h, \quad R_h = \zeta_0^{(h)} \sum_{i=0}^{\infty}\left\{\Delta^i \frac{\xi^{h+in}}{h+in} \prod_{j=0}^{i-1} f(h+jn)\right\}.$$

Untersuchen wir die Reihe R_h bezüglich ihrer Convergenz, so gilt Folgendes: Es ist

$$\frac{U_{i+1}}{U_i} = \Delta . \xi^n . \frac{f(h+in)}{\prod_{k=1}^{k=n}(h+in+k)},$$

und hieraus finden wir für $i = \infty$

$$Lim \frac{U_{i+1}}{U_i} = \Delta . \xi^n;$$

falls aber $\Delta . \xi^n = 1$,

$$Lim\left\{i\left[1 - \frac{U_{i+1}}{U_i}\right]\right\} = \frac{3}{2}.$$

Mithin convergirt R_h unter der Bedingung, dass

$$\Delta . \xi^n \leq 1,$$

und da diese Bedingung unabhängig von h ist, so convergirt zu gleicher Zeit das unter Nr. 11 angegebene Reihenaggregat.

$$\frac{d^n f(y)}{dx^n} = D_\varrho^{n-1}\left\{\left(\frac{\varrho}{\varphi(y+\varrho) - \varphi(y)}\right)^n . f'(y+\varrho)\right\}_{\varrho=0}, \quad x = \varphi(y)$$

und findet sich in den „Vorlesungen über höhere Analysis" von O. Schlömilch. — Siehe das Capitel: Die höheren Differentialquotienten.

Infolge der n Deutigkeit von $\zeta_0^{(h)}$ ist auch ζ n-deutig, und deshalb sind durch 11) sämmtliche Wurzeln der Fundamentalform

$$\zeta) \qquad \eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0, \quad \eta^m = \zeta$$

dargestellt.

b) Reihensummation.

Da der Ausdruck $\zeta_0^{(h)}$ unter Nr. 5) das Product zweier Gammafunctionen enthält, so liegt es nahe, das Doppelintegral

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-(u_1^n + u_2^n)} u_1^{\mu_1 - 1} u_2^{\mu_2 - 1}\, du_1\, du_2 = \frac{1}{n^2}\Gamma\left(\frac{\mu_1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu_2}{n}\right)$$

in Betracht zu ziehen. Stellen wir noch allgemeiner das Integral

$$J_\xi(\varepsilon) = \frac{mn}{\pi}\varepsilon^{-m}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-(u_1^n + u_2^n)} u_1^{\mu_1 - 1} u_2^{\mu_2 - 1} e^{-\varepsilon^s u_1^s u_2^{n-s}\xi}\, du_1\, du_2$$

auf, so ergiebt sich mit Rücksicht auf das Vorhergehende

$$J_0^{(h)}(\varepsilon) = \left(\frac{d^h J(\varepsilon)}{d\xi^h}\right)_{\xi=0} = (-1)^h \frac{m}{n}\,\frac{\varepsilon^{hs-m}}{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{hs-m}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{h(n-s)+m}{n}\right),$$

$$\mu_1 = -m, \quad \mu_2 = +m.$$

Es sei nun ε irgend eine Wurzel der binomischen Gleichung

$$\varepsilon^n = 1,$$

dann darf

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

gesetzt werden, wobei die n-Deutigkeit auf das Symbol $(-1)^{\frac{1}{n}}$ geworfen ist.

Der Ausdruck

$$\varepsilon' = (-1)^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n}\right),$$

in welchem $(-1)^{\frac{1}{n}}$ genau dieselbe Wurzel bedeuten soll wie zuvor, genügt auch der Gleichung $\varepsilon^n = 1$, ist von ε verschieden und nie dem ε conjugirt. mit Ausnahme des Falles, wo n eine ungerade Zahl ist und im Speciellen aus $(-1)^{\frac{1}{n}}$ der reelle Werth -1 gezogen wird. Durchläuft ε' alle Wurzeln der Gleichung $\varepsilon^n = 1$, wie sie successive aus der Formel

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

hervorgehen, so nimmt ε gleichzeitig solche Werthe an, wie sie successive aus

$$\varepsilon_{k+1} = \cos\frac{2(k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(k-1)\pi}{n}; \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

entspringen. Bei ungeradem n würde der Specialwerth $k = \frac{n-1}{2}$ das einzig mögliche Paar conjugirter Wurzeln erzeugen.

Bilden wir die Differenz

$$\frac{1}{2i}\{J_0^{(h)}(\varepsilon)-J_0^{(h)}(\varepsilon')\},$$

so gelangen wir, wie ein Vergleich mit Nr. 5) lehrt, genau zu dem anfangs erwähnten Differentialquotienten $\zeta_0^{(h)}$. Da das Symbol $(-1)^{\frac{1}{n}}$ in jener Differenz successive die Werthe

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n};\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

durchläuft, so gestattet $\zeta_0^{(h)}$ folgende durchsichtige Schreibweise:

$$\zeta_0^{(h)}=\frac{1}{2i}\{J_0^{(h)}(\varepsilon_{k+1})-J_0^{(h)}(\varepsilon_k)\}.$$

Nun hat die Summation der unter Nr. 6) und 11) aufgestellten Reihen keine Schwierigkeit mehr; es ergiebt sich als Summe

$$\zeta=\frac{1}{2i}\{J_\xi(\varepsilon_{k+1})-J_\xi(\varepsilon_k)\},$$

d. h.

$$12)\quad\begin{cases}\zeta=\dfrac{mn}{2\pi i}\displaystyle\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-(u_1^n+u_2^n)}\,u_1^{-m-1}\,u_2^{m-1}\,S\,du_1\,du_2,\\ S=\varepsilon_{k+1}^{-m}\,e^{-\varepsilon_{k+1}^s u_1^s u_2^{n-s}\xi}-\varepsilon_k^{-m}\,e^{-\varepsilon_k^s u_1^s u_2^{n-s}\xi}.\end{cases}$$

Denn entwickeln wir die Exponentialgrösse (in S) nach fortschreitenden Potenzen von ξ, so gelangen wir nach successiver Auswerthung der einzelnen Integrale zu

$$\zeta=\frac{1}{2i}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\{J_0^{(h)}(\varepsilon_{k+1})-J_0^{(h)}(\varepsilon_k)\}\cdot\frac{\xi^h}{h!}\right]=\sum_{h=0}^{\infty}\left[\zeta_0^{(h)}\cdot\frac{\xi^h}{h!}\right],$$

d. h. zu der erwähnten Reihe. Doch es ist, bevor jene Auswerthung vorgenommen wird, noch Folgendes zu beachten. Das Integral 12) hat nur dann einen Sinn, wenn beide Exponenten in dem Potenzproduct $u_1^{-m-1}u_2^{m-1}$ grösser als -1 sind, was indessen hier keineswegs stattfindet. — Wir können jedoch den Ausdruck 12) nachträglich identisch so umgestalten, dass die erwähnten Bedingungen eintreten, wenn wir von der Relation

$$\zeta=\int_0^\xi\frac{d\zeta}{d\xi}\cdot d\xi+\zeta_0,\quad \zeta_0=(\zeta)_{\xi=0}$$

Gebrauch machen. Es entsteht alsdann

$$13)\quad\begin{cases}\zeta=-\dfrac{mn}{2\pi i}\displaystyle\int_0^\xi d\zeta\cdot\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-(u_1^n+u_2^n)}\,u_1^{s-m-1}\,u_2^{n-s+m-1}\,S'du_1\,du_2+\zeta_0,\\ S'=\varepsilon_{k+1}^{s-m}\,e^{-\varepsilon_{k+1}^s u_1^s u_2^{n-s}\xi}-\varepsilon_k^{s-m}\,e^{-\varepsilon_k^s u_1^s u_2^{n-s}\xi}.\end{cases}$$

Sollten die Exponenten auch jetzt noch nicht grösser als -1 sein, so müssten wir mit dem ν-fachen Integrale

$$13\text{a)}\qquad \zeta = {}_{\nu}\int_0^{\xi} \frac{d^\nu \zeta}{d\xi^\nu}\cdot d\xi^\nu + \zeta_0 + \zeta'_0 \frac{\xi}{1!} + \dots + \zeta_0^{(\nu-1)} \frac{\xi^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

operiren und für ν eine solche positive ganze Zahl wählen, dass

$$\nu s - m > 0 \quad \text{und} \quad \nu(n-s) + m > 0,$$

was immer möglich ist.

Sind diese Forderungen erfüllt, so stellt der Ausdruck 13) resp. 13a) die m^{ten} Potenzen* sämmtlicher Wurzeln der Fundamentalform

$$\eta)\qquad \eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0$$

dar, wenn k in

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

die Zahlen 0, 1, ..., $n-1$ durchläuft.

Bemerkenswerth ist die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n-1} \{J_\xi(\varepsilon_{k+1}) - J_\xi(\varepsilon_k)\} = 0,$$

welche zur Folge hat, dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} \eta_k^m = \sum_0^{n-1} \left\{ \zeta_0 + \zeta'_0 \frac{\xi}{1!} + \dots + \zeta_0^{(\nu-1)} \frac{\xi^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right\},$$

wo die Summe auf der rechten Seite dahin zu verstehen ist, dass in ζ_0 bis $\zeta_0^{(\nu-1)}$ successive die verschiedenen Einheitswurzeln, wie sie dem Symbol

$$(-1)^{\frac{\nu s - m}{n}} \quad \text{(vergl. Nr. 4)}$$

entsprechen, auftreten.

Zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass sämmtliche Ausdrücke 4) bis mit 13) im Wesentlichen ungeändert bleiben, wenn

$$n-s,\ m \quad \text{resp. mit} \quad s,\ -m$$

vertauscht wird, wie das auch zu erwarten stand.

III. Auflösung der Fundamentalformen

$$z)\ \begin{cases} y^n + y^{n-s} + x = 0, \\ y^m = z \end{cases} \quad \text{und} \quad w)\ \begin{cases} uv^n + v^{n-s} + 1 = 0, \\ v^m = w. \end{cases}$$

Wir betreten wieder den früher eingeschlagenen Weg und entwickeln zunächst z in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe. Durch entsprechende Vertauschung der Veränderlichen gewinnen wir alsdann auch die zur Fundamentalform w) gehörigen Reihen. — Es wird sich zeigen, dass

* Die Reihe 11), sowie das Integral 13) können für ein verschwindendes m zur Darstellung von $l\eta$ benutzt werden, wenn man den Grenzwerth $l\eta = \left(\frac{\eta^m - 1}{m}\right)_{m=0}$ hinzuzieht.

die neuen Reihen genau in den Fällen convergiren, in welchen die Reihen, die zur ersten Fundamentalform ζ) gehören, divergiren, so dass also schliesslich alle möglichen Fälle ihre Erledigung finden.

Nach Schlömilch's Formel ergiebt sich, dass

$$\left(\frac{d^h y^m}{dx^m}\right)_{x=0} = m \cdot \left\{\frac{d^h}{dx^h}\left(\frac{y^{m-h(n-s)}}{m-h(n-s)}\right)\right\}_{x=0}, \quad y^s+1+x=0$$

oder

$$14) \quad \left(\frac{d^h z}{dx^m}\right)_{x=0} = \frac{m}{s}(-1)^{\frac{m-hn}{s}+1} \cdot \prod_{k=1}^{h-1}\left(k+\frac{h(n-s)-m}{s}\right)$$

oder, wenn das Product rechts in bekannter Weise durch den Quotienten zweier Gammafunctionen ersetzt wird,

$$15) \quad z_0^{(h)} = \frac{m}{s}(-1)^{\frac{m-hn}{s}+1} \cdot \Gamma\left(h+\frac{h(n-s)-m}{s}\right) : \Gamma\left(1+\frac{h(n-s)-m}{s}\right).$$

Durch Vertauschung der entsprechenden Grössen erhalten wir sogleich noch

$$16) \quad \left(\frac{d^h w}{du^h}\right)_{u=0} = \frac{m}{n-s}(-1)^{-\frac{m+hn}{n-s}} \cdot \prod_{k=1}^{h-1}\left(k+\frac{hs+m}{s}\right)$$

oder

$$17) \quad w_0^{(h)} = \frac{m}{n-s}(-1)^{-\frac{m+hn}{n-s}} \cdot \Gamma\left(h+\frac{hs+m}{n-s}\right) : \Gamma\left(1+\frac{hs+m}{n-s}\right).$$

Der Ausdruck 14) resp. 15) stellt nur jene s Ableitungen dar, welche zu den nicht gleichzeitig mit x verschwindenden Wurzeln der Gleichung z) gehören. Für die übrigen $(n-s)$ Wurzelwerthe werden die Ableitungen im Allgemeinen unendlich gross. — Der Ausdruck 16) resp. 17) stellt nur jene $(n-s)$ Ableitungen dar, welche den $(n-s)$ endlichen Lösungen der Gleichung w) entsprechen.

a) Reihenentwickelung.

Wir bilden

$$18) \quad \begin{cases} z = \sum_{h=0}^{h=\infty} z_0^{(h)} \frac{x^h}{h!} = \sum_{h=0}^{h=s-1} R_h, \\ R_h = \sum_{i=0}^{i=\infty} z_0^{(h+is)} \frac{x^{h+is}}{(h+is)!}, \end{cases} \qquad z_0 = (z)_{x=0},$$

und beachten, dass aus 15)

$$z_0^{(h+s)} = (-1)^n z_0^{(h)} \cdot \prod_{k=0}^{n-1}\left(k+h+\frac{h(n-s)-m}{s}\right) : \prod_{k'=0}^{n-s-1}\left(k'+1+\frac{h(n-s)-m}{s}\right)$$

folgt. Eine einfache Umformung des letzten Productes ergiebt weiter

$$19) \quad z_0^{(h+s)} = \Delta^{-1} z_0^{(h)} \cdot \frac{\varphi(h)}{\psi(h+s)},$$

wobei Δ den bereits unter Nr. 8) angegebenen Werth

$$\Delta = (-1)^n n^{-n} s^s (n-s)^{n-s}$$

besitzt und φ und ψ folgende Bedeutung haben:

$$20)\quad \begin{cases} \varphi(h) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(h - \left[\frac{m}{n} - k\frac{s}{n}\right]\right), \\ \psi(h+s) = \prod\limits_{k'=0}^{n-s-1} \left(h+s - \left[\frac{m}{n-s} + k'\frac{s}{n-s}\right]\right), \end{cases}$$

d. h., es stellen φ und ψ die linken Seiten zweier algebraischen Gleichungen vom n^{ten}, resp. $(n-s)^{\text{ten}}$ Grade dar, deren Wurzeln die in den eckigen Klammern stehenden Grössen sind.*

Durch successive Anwendung der Formel 19) ergiebt sich

$$21)\quad z_0^{(h+is)} = \Delta^{-i} z_0^{(h)} \frac{\prod\limits_{j=0}^{j=i-1} \varphi(h+js)}{\prod\limits_{j=0}^{j=i-1} \psi(h+s+js)} = \Delta^{-i} z_0^{(h)} \prod_{j=0}^{j=i-1} \frac{\varphi(h+js)}{\psi(h+(j+1)s)},$$

und vermöge dieser Beziehung stellt sich die Reihenentwickelung wie folgt dar:

$$22)\quad z = \sum_{h=0}^{s-1} R_h, \quad R_h = z_0^{(h)} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \Delta^{-i} \frac{x^{h+is}}{(h+is)!} \prod_{j=0}^{j=i-1} \frac{\varphi(h+js)}{\psi(h+(j+1)s)} \right\}.$$

Untersuchen wir die Reihe R_h bezüglich ihrer Convergenz, so gilt Folgendes: Es ist

$$\frac{U_{i+1}}{U_i} = \Delta^{-1} . x^s . \frac{\varphi(h+is)}{\psi(h+is+s)} . \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{k=s} (h+is+k)}$$

und hieraus finden wir für $i = \infty$

$$Lim \frac{U_{i+1}}{U_i} = \Delta^{-1} . x^s,$$

falls aber $\Delta^{-1} x^s = 1$,

$$Lim \left\{ i \left[1 - \frac{U_{i+1}}{U_i} \right] \right\} = \frac{3}{2}.$$

Mithin convergirt R_h unter der Bedingung, dass

$$\frac{x^s}{\Delta} \leqq 1,$$

und da diese Bedingung unabhängig von h ist, so convergirt zu gleicher Zeit das unter Nr. 22) angegebene Reihenaggregat.

Infolge der s-Deutigkeit von $z_0^{(h)}$ ist auch z ein s-deutiger Ausdruck, und deshalb sind durch 22) jene s Wurzeln der Fundamentalform z) ermittelt, welche mit x nicht gleichzeitig verschwinden.

---

* Die Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$, wie auch die Gleichung $f = 0$ (vergl Nr. 9) haben für die entsprechenden trinomischen Gleichungen eine charakteristische Bedeutung. Wir werden ihnen bei Gelegenheit der Aufstellung der Differentialresolventen, Cap. IV, wieder begegnen.

Vertauschen wir in 22)

$$x,\ z,\ n-s,\ m \text{ resp. mit } u,\ w,\ s,\ -m,$$

so geht 22) über in

$$23)\left\{\begin{aligned} w &= \sum_{h=0}^{n-s-1} R_h, \\ R_h &= w_0^{(h)} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \Delta^{-i} \frac{u^{h+i(n-s)}}{(h+i(n-s))!} \prod_{j=0}^{j=i-1} \frac{\bar{\varphi}(h+j(n-s))}{\bar{\psi}(h+(j+1)(n-s))} \right\} \end{aligned}\right.$$

mit der Convergenzbedingung

$$\frac{u^{n-s}}{\Delta} \leqq 1.$$

Hierbei unterscheiden sich $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ von den früheren φ und ψ insofern, als ihre Verschwindungswerthe bei der letzten Vertauschung andere geworden sind.

Infolge der $(n-s)$-Deutigkeit von $w_0^{(h)}$ ist auch w ein $(n-s)$-deutiger Ausdruck, und deshalb sind durch 23) jene $(n-s)$ Wurzeln der Fundamentalform w) ermittelt, welche für $u=0$ nicht unendlich gross werden.

Substituiren wir in 23)

$$u^{n-s} = x^s, \quad w = z x^{-\frac{m}{n-s}} \quad \text{(vergl. Nr. 3)},$$

so erhalten wir

$$24)\left\{\begin{aligned} z &= x^{\frac{m}{n-s}} \sum_{h=0}^{n-s-1} R_h, \\ R_h &= w_0^{(h)} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \Delta^{-i} \frac{x^{\frac{hs}{n-s}+is}}{(h+i(n-s))!} \prod_{j=0}^{j=i-1} \frac{\bar{\varphi}(h+j(n-s))}{\bar{\psi}(h+(j+1)(n-s))} \right\} \end{aligned}\right.$$

mit der Convergenzbedingung

$$\frac{x^s}{\Delta} \leqq 1.$$

Der Ausdruck 24) ist $(n-s)$-deutig und stellt die noch fehlenden Wurzeln der Fundamentalform z) dar.

Vertauschen wir schliesslich in 24) abermals

$$x,\ z,\ n-s,\ m \text{ resp. mit } u,\ w,\ s,\ -m,$$

so geht 24) über in

$$25)\left\{\begin{aligned} w &= u^{-\frac{m}{s}} \sum_{h=0}^{s-1} R_h, \\ R_h &= z_0^{(h)} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \Delta^{-i} \frac{u^{\frac{h(n-s)}{s}+i(n-s)}}{(h+is)!} \prod_{j=0}^{j=i-1} \frac{\varphi(h+js)}{\psi(h+(j+1)s)} \right\} \end{aligned}\right.$$

mit der Convergenzbedingung

$$\frac{u^{n-s}}{\Delta} \leqq 1.$$

Der Ausdruck 25) ist s-deutig und stellt die noch fehlenden Wurzeln der Fundamentalform w) dar.

Da zwischen den Veränderlichen x, u und ξ die Beziehung

$$x^s = u^{n-s} = \xi^{-n}$$

bestand, so convergiren die Reihenaggregate 22), 24) und 23), 25) dann, wenn das Reihenaggregat 11) divergirt — und umgekehrt.

Es kann daher jede der drei Fundamentalformen durch convergente Reihen vollständig aufgelöst werden.

b) Anmerkung.

Es würde sich jetzt weiter darum handeln, die eben aufgestellten Reihen, also etwa Nr. 22), durch einen geschlossenen Ausdruck darzustellen, ähnlich wie dies in Abschnitt II) mit der Reihe 6) resp. 11) geschehen ist. Dabei käme es in erster Linie darauf an, ein Integral zu ermitteln, welches ausgewerthet den Quotienten zweier Gammafunctionen liefert, wie er für $z_0^{(h)}$ unter Nr. 15) auftritt.

In einer Arbeit von Liouville* findet man das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}\,d\alpha}{(x+\alpha\sqrt{-1})^{\mu}} = \frac{2\pi e^{-x}}{\Gamma(\mu)}, \quad \begin{matrix} x>0 \\ \mu>0 \end{matrix}$$

behandelt, aus dem leicht ein anderes hergeleitet werden kann, welches den Quotienten zweier Gammafunctionen darbietet. Dieses müsste dann mit dem in Frage kommenden Differentialquotienten $z_0^{(h)}$ zur Coincidenz gebracht werden.

Allein die neuen Integralformen weichen von den früheren so sehr ab, dass wir die angeregte Aufgabe im Augenblicke nicht weiter verfolgen.

IV. Lineare Differentialgleichungen (Differentialresolventen), denen die Wurzeln der Fundamentalformen genügen.

Wir könnten auf directem Wege, unter wiederholter Anwendung der Schlömilch'schen Differentialformel, die höheren Differentialquotienten, welche aus den Fundamentalformen ζ), z) und w) hervorgehen, so vereinigen, dass die verlangte Differentialgleichung erscheint. Der Kürze halber stellen wir jedoch diese Differentialgleichung sogleich an die Spitze und begnügen uns damit, einen Weg anzugeben, auf welchem die Richtigkeit des Resultates nachträglich ohne Mühe erschlossen werden kann.

Die gesuchte Gleichung lautet

$$26)\qquad \frac{d^n \zeta}{d\xi^n} = x^{s-\frac{m}{n}} \cdot \frac{d^s}{dx^s}\left\{x^{s+\frac{m}{n-s}} \frac{d^{n-s} w}{du^{n-s}}\right\},$$

* Siehe Crelle's Journal, Bd. 13.

und ihr genügen die m^{ten} Potenzen sämmtlicher Wurzeln der drei Fundamentalformen η), y), v), je nachdem durch die Substitutionen

$$3)\qquad \xi^{-n} = x^s = u^{n-s}, \quad \zeta = zx^{-\frac{m}{n}} = wu^{\frac{m}{n}}$$

die specifischen Variabelen eingeführt sind.

Die Existenz der Gleichung 26) wird durch folgenden Process erwiesen:

Wir bilden mittels Schlömilch's Formel* die Ableitung $\frac{d^{n-s}w}{du^{n-s}}$ unter Zugrundelegung der Gleichung w) und führen hierauf statt u, v die Veränderlichen x, y ein, ausserdem ersetzen wir ϱ durch $\varrho_1 x^{-\frac{1}{n-s}}$. Die rechte Seite von 26) verwandelt sich alsdann in einen n^{ten} Differentialquotienten. Nun entwickeln wir in derselben Weise unter Zugrundelegung der Gleichung ζ) den Quotienten $\frac{d^n\zeta}{d\xi^n}$, führen auch hier statt ξ, η die Veränderlichen x, y ein und ersetzen ϱ durch $\varrho_1 x^{-\frac{1}{n}}$. Dann entsteht aber auf der linken Seite genau derselbe Differentialausdruck, den wir auf der rechten fanden, und hiermit ist unsere anfängliche Behauptung erwiesen.

Die Gleichung 26) kann auch in anderen, doch unwesentlich von einander verschiedenen Formen erscheinen. Diese Unterschiede verschwinden, wenn man jene Gleichung weiter transformirt, und zu diesem Zwecke wird es nöthig sein, einen Differentialausdruck von der Gestalt

$$a)\qquad \frac{d^s x^p}{d(x^q)^s}\left[\frac{d^r x^{p_1} y}{d(x^{q_1})^r}\right] = \gamma$$

in eine geläufigere Form umzusetzen.

Integriren wir die letzte Gleichung und sehen dabei γ als eine gegebene Constante an, so erhalten wir als completes Integral einen linearen Ausdruck, der — ausser Constanten — einzig und allein nur Potenzen von x enthält. Eben deshalb kann rückwärts eine lineare Differentialgleichung $(s+r)^{\text{ter}}$ Ordnung von der Form

$$b)\qquad x^{s+r} y^{(s+r)} + \ldots + A_1 x y' + A_0 y = \beta x^\alpha$$

aufgestellt werden, welche genau dasselbe complete Integral liefern würde. Wir finden hierbei, dass

$$\alpha = qs - p + q_1 r - p_1, \quad \beta = \gamma q^s q_1^{\,r},$$

und dass die Charakteristik** der Differentialgleichung b) folgendermassen lautet:

---

* Vergl. Capitel II.

** Unter der Charakteristik der Gleichung b) wird bekanntlich jene algebraische Gleichung $(s+r)^{\text{ten}}$ Grades verstanden, welche sich für λ ergiebt, wenn verlangt wird, dass $y = x^\lambda$ eine particuläre Lösung der reducirten Differentialgleichung sei.

$$27)\quad F(\lambda)=\prod_{k=0}^{s-1}(\lambda-[kq-p+q_1 r-p_1])\cdot\prod_{k'=0}^{r-1}(\lambda-[k'q_1-p_1])=0.$$

Verknüpfen wir jetzt die beiden in Rede stehenden Differentialausdrücke a) und b) gemäss der Relation

$$\beta=\gamma q^s q_1^r,$$

so erhalten wir unmittelbar

$$28)\quad \frac{d^s x^p}{d(x^q)^s}\left[\frac{d^r x^{p_1} y}{d(x^{q_1})^r}\right]=q^{-s} q_1^{-r} x^{-\alpha}\sum_{i=s+r}^{i=0} A_i x^i y^{(i)},$$

wobei

$$\alpha=qs-p+q_1 r-p_1,\quad A_{s+r}=1,$$

und die A_i durch die Charakteristik 27) eindeutig bestimmt sind.*

Für $p_1=0,\ q_1=1,\ r=0,\ s=n$ entsteht specieller

$$29)\quad \begin{cases} \dfrac{d^n x^p y}{d(x^q)^n}=q^{-n} x^{p-nq}\displaystyle\sum_{i=n}^{i=0} A_i x^i y^{(i)}, \\ F(\lambda)=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\lambda-[kq-p])=0,\quad A_n=1. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Relationen 28) und 29) erhalten wir nun folgende endgiltige Resultate:

Die m^{ten} Potenzen sämmtlicher Wurzeln der Fundamentalform

$$\eta)\quad \eta^n+\xi\eta^{n-s}+1=0$$

genügen der Differentialgleichung

$$30)\quad \frac{d^n\zeta}{d\xi^n}=\varDelta\cdot\sum_{i=n}^{0} A_i \xi^i \zeta^{(i)}.$$

Die A_i sind durch die Charakteristik

$$F(\lambda)=\prod_{k=1}^{s-1}\left(\lambda-\left[\frac{m}{s}-k\frac{n}{s}\right)\right]\cdot\prod_{k'=0}^{n-s-1}\left(\lambda+\left[\frac{m}{n-s}+k'\frac{n}{n-s}\right]\right)=0$$

bestimmt. $\varDelta$ hat den früheren Werth

$$8)\quad \varDelta=(-1)^n n^{-n} s^s (n-s)^{n-s}.$$

Die m^{ten} Potenzen sämmtlicher Wurzeln der Fundamentalform

$$y)\quad y^n+y^{n-s}+x=0$$

genügen der Differentialgleichung

$$31)\quad \sum_{i=n}^{0} A_i x^i z^{(i)}=\varDelta^{-1} x^s\sum_{i=n}^{0} B_i x^i z^{(i)}.$$

Die A_i sind bestimmt durch die Charakteristik

* Wer die Ableitung der Formeln 28) und 29) nicht als einwurfsfrei anerkennt, kann sich durch Anwendung des Schlusses von n auf $(n+1)$ von der Richtigkeit überzeugen.

$$F(\lambda)=\prod_{k=0}^{s-1}(\lambda-k).\prod_{k'=0}^{n-s-1}\left(\lambda-\left[\frac{m}{n-s}+k'\frac{s}{n-s}\right]\right)=0,$$

die B_t hingegen durch

$$F(\lambda)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\lambda-\left[\frac{m}{n}-k\frac{s}{n}\right]\right)=0.$$

Die der dritten Fundamentalform entsprechende Differentialgleichung erhält man durch die früher angezeigte Vertauschung. — Vergl. Capitel I.

Hierzu bemerken wir noch Folgendes.

Die Charakteristik, welche zu 30) gehört, ist identisch mit der Gleichung $f(\lambda)=0$, die wir bei Gelegenheit der Reihenentwickelung fanden. — Vergl. Nr. 9.

Die erste Charakteristik, welche zu 31) gehört, enthält sämmtliche Wurzeln der Gleichung $\psi(\lambda)=0$, vergl. Nr. 20), und ausserdem die Wurzeln $0, 1, \ldots, (s-1)$, welch' Letzteres anzeigt, dass die Coefficienten A_0 bis A_{s-1} verschwinden. Die zweite Charakteristik in 31) ist identisch mit $\varphi(\lambda)=0$, vergl. Nr. 20).

Beiläufig sei erwähnt, dass man mittels Durchganges durch 26) leicht jene lineare Differentialgleichung aufstellen kann, die zu der trinomischen Gleichung

$$\eta^n+\xi^\alpha\eta^{n-s}+\xi^\beta=0,\quad \eta^m=\zeta$$

gehört.

Lineare Differentialgleichungen *(„differential resolvents“)*, denen die Wurzeln trinomischer Gleichungen genügen, hat zuerst Harley aufgestellt in einer Arbeit „On the theory of the Transcendental Solution of Algebraic Equations“, Quarterly Journal of Mathematics, Vol V. Später hat er seine Resultate verallgemeinert, und dieselben sind aufgezeichnet in Boole's Treatise on Differential Equations, Supplementary Volume, Ch. XXX, Art. 5 u. 6. An derselben Stelle befinden sich auch bemerkenswerthe Zusätze von Boole, sowie ein Beweis von Cayley, mittels dessen die Richtigkeit des von Harley durch Induction erschlossenen Resultates dargethan wird.

Jene englischen Mathematiker betrachten die Differentialresolvente in einer eleganten symbolischen Form, und wir halten es nicht für überflüssig, diese Gleichungen, insoweit sie die drei Fundamentalformen ζ), s), w) betreffen, mitzutheilen. Sie lauten

$$\left[\xi\frac{d}{d\xi}\right]^n\zeta=(-1)^n\left[\frac{n-s}{n}\xi\frac{d}{d\xi}+\frac{m}{n}-1\right]^{n-s}\left[\frac{s}{n}\xi\frac{d}{d\xi}-\frac{m}{n}-1\right]^s\xi^n\zeta,$$

$$\left[\frac{n-s}{s}x\frac{d}{dx}-\frac{m}{s}\right]^{n-s}\left[x\frac{d}{dx}\right]^s s=(-1)^n\left[\frac{n}{s}x\frac{d}{dx}-\frac{m}{s}-1\right]^n x^s s,$$

$$\left[\frac{s}{n-s}u\frac{d}{du}+\frac{m}{n-s}\right]^s\left[u\frac{d}{du}\right]^{n-s}w=(-1)^n\left[\frac{n}{n-s}u\frac{d}{du}+\frac{m}{n-s}-1\right]^n u^{n-s}w,$$

und hier bedeutet

$$[k]^n=k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1).$$

V. Integration der Differentialresolventen.

Durch die früheren Untersuchungen ist die Integration schon vorbereitet. Der Differentialresolvente

30) $$\zeta^{(n)} = \Delta \{ \xi^n \zeta^{(n)} + A_{n-1} \xi^{n-1} \zeta^{(n-1)} + \ldots + A_1 \xi \zeta' + A_0 \zeta \}$$

genügt, wie eine einfache Betrachtung lehrt, unmittelbar einzeln eine jede der n Reihen R_h, welche unter Nr. 11, Cap. II a) vorkommen, so dass mit Unterdrückung der Constanten $\zeta_0^{(h)}$ das allgemeine Integral folgende Form besitzt:

32) $$\zeta = \sum_{h=0}^{n-1} \left\{ M_h \xi^h \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \frac{\xi^{in}}{(h+in)!} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} f(h+jn) \right\},$$

$$\Delta \xi^n \leqq 1, \quad M_h = const.$$

In derselben Weise finden wir, dass der Differentialresolvente

31) $$\begin{cases} x^{n-s} z^{(n)} + A_{n-1} x^{n-s-1} z^{(n-1)} + \ldots + A_s z^{(s)} \\ \qquad = \dfrac{1}{\Delta} \{ x^n z^{(n)} + \ldots + B_1 x z' + B_0 z \} \end{cases}$$

eine jede der n Reihen R_h, wie sie unter Nr. 22) und 24) Cap. III a) angegeben sind, für sich genügt, so dass das allgemeine Integral folgendermassen lautet:

33) $$z = \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=0}^{s-1} \left\{ M_h x^h \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^{-i} \frac{x^{is}}{(h+is)!} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\psi(h+js)}{\psi(h+(j+1)s)} \right\} \\ \displaystyle + x^{\frac{m}{n-s}} \sum_{h=0}^{n-s-1} \left\{ N_h x^{\frac{hs}{n-s}} \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^{-i} \frac{x^{is}}{(h+i(n-s))!} \right. \\ \displaystyle \qquad \left. \times \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\bar{\varphi}(h+j(n-s))}{\bar{\psi}(h+(j+1)(n-s))} \right\}, \end{cases}$$

$$\frac{x^s}{\Delta} \lessgtr 1, \quad M_h = const., \quad N_h = const.$$

Durch bekannte Vertauschung der Variabelen und Parameter, resp. durch Benutzung der Ausdrücke 23) und 25), Cap. III a), würden wir das allgemeine Integral jener Differentialresolvente erhalten, welche zur dritten Fundamentalform w) gehört. Sollten in 32) oder 33) die Convergenzbedingungen nicht erfüllt sein, so gelangen wir mit Hilfe der Substitutionen

3) $$\xi^{-n} = x^s = u^{n-s}, \quad \zeta = z x^{-\frac{m}{n}} = w u^{\frac{m}{n}}$$

sicher zu brauchbaren Reihen.*

---

* Alle diese Reihen gehören zur Classe der hypergeometrischen n^{ter} Ordnung und sind anderweitig genauer untersucht. — Man vergl. hierüber die interessanten Arbeiten von J. Thomae, Mathem. Annalen Bd. II, und Goursat, Annales de l'Ecole Normale XII, 1883

Die Differentialresolvente 30) lässt sich aber auch durch bestimmte Integrale vollständig integriren. Wir fanden in Cap. II b) unter Nr. 12), dass jede Wurzel der Fundamentalform

$$\zeta)\quad \eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0, \quad \eta^m = \zeta$$

durch

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\{J_\xi(\varepsilon_{k+1}) - J_\xi(\varepsilon_k)\}$$

dargestellt ist, wenn

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Bezeichnen wir den zu einem individuellen k gehörigen Werth von ζ mit ζ_k, so wird der Differentialresolvente 30) der allgemeine Ausdruck

$$\zeta = \sum_{k=0}^{n-1} C_k\zeta_k, \quad C_k = const.$$

genügen, und führen wir statt ζ_k die Differenzen der Doppelintegrale J_ξ ein, so kommen wir zu

$$34)\qquad \zeta = \sum_{k=0}^{n-1} M_k J_\xi(\varepsilon_k).$$

Die neuen Integrationsconstanten M_k hängen mit den früheren in folgender Weise zusammen:

$$M_k = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\{C_{k-1} - C_k\}, \quad C_{-1} = C_{n-1};$$

ihre Summe ist daher augenscheinlich der Null gleich und es lässt sich demnach auf diesem Wege das allgemeinste Integral der Differentialresolvente 30) nicht erschliessen. Indessen geht aus anderen Betrachtungen* hervor, dass jener Differentialgleichung ein jedes der J_ξ für sich genügt.

---

* Im 3. Bande der Mathem. Annalen hat Spitzer darauf aufmerksam gemacht, dass der Differentialgleichung

$$\zeta^{(\nu)} = A_n\xi^n\zeta^{(n)} + \ldots + A_1\xi\zeta' + A_0\zeta$$

— mit beliebigen constanten Coefficienten A_i — durch n-fache Integrale der Form

$$\int_0^\infty{}^{n} e^{-\frac{u_1^\nu + \ldots + u_n^\nu}{\nu}} \cdot u_1^{\lambda_1 - 1} \ldots u_n^{\lambda_n - 1}\, e^{\varepsilon_k u_1 \ldots u_n \xi}\, du_1 \ldots du_n,$$

in denen ε_k irgendwelche Wurzel der Gleichung

$$\varepsilon^\nu = A_n$$

bedeutet, genügt werden kann. — Wir haben in unseren bereits citirten Arbeiten über trinomische Gleichungen das Spitzer'sche Resultat bewiesen und bemerkt, dass die λ die negativ genommenen Wurzeln der Charakteristik der Gleichung

$$\sum_{i=n}^{0} A_i\xi^i\zeta^{(i)}$$

sind. — Falls die Charakteristik von so specieller Bedeutung ist, wie in der Differentialresolvente 30), und falls $\nu = n$, so reduciren sich die eben angegebenen n fachen Integrale auf die Doppelintegrale $J_\xi(\varepsilon_k)$, wie überhaupt das n-fache

Vertauschen wir noch $\varepsilon_k^s \xi$ mit $\varepsilon_k \xi$, wobei die Differentialresolvente ungeändert bleibt, so repräsentirt sich das vollständige Integral in der Form

$$35)\quad \zeta = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u_1^n + u_2^n)} u_1^{-m-1} u_2^{m-1} . \sum_{k=0}^{n-1} M_k e^{-\varepsilon_k u_1^s u_2^{n-s} \xi} . du_1 . du_2 .$$

Für ε_k sind nach und nach sämmtliche Wurzeln der Gleichung

$$\varepsilon^n = 1$$

zu setzen, und ausserdem ist bei der Auswerthung der Integrale die in Cap. II b) angegebene identische Umformung gehörig zu beachten.

Jene Umformung hat übrigens für die Differentialresolvente 30) folgende Bedeutung:

Bei ν-maliger Differentiation der Gleichung nach ξ entsteht in Bezug auf $\zeta^{(\nu)}$ eine lineare Differentialgleichung, die sich von der früheren nur dadurch unterscheidet, dass die Wurzeln ihrer Charakteristik um die Zahl ν kleiner geworden sind. Ein Sinken dieser Wurzeln um 1 hat aber ein Steigen der Exponenten im Potenzenproducte $u_1^{-m-1} u_2^{m-1}$ um s, bez. $(n-s)$ zur Folge, so dass der hinreichend differenzirten Gleichung schliesslich ein brauchbares Integral zukommt. Rückwärts verschafft uns dann eine ν-malige Integration nach ξ das Integral der ursprünglichen Gleichung.

Was endlich das Integral unter Nr. 33) anlangt, so kann es sich ereignen, dass eine der ersten s Reihen mit einer der letzten $(n-s)$ Reihen vollständig übereinstimmt. Soll etwa die mit M_p multiplicirte Reihe R_p zusammenfallen mit der mit M_q multiplicirten Reihe R_q, wobei $p = 0, 1,$

Integral, je nach der Beschaffenheit der Charakteristik, zuweilen in ein einfaches, doppeltes, dreifaches u. s. w umgesetzt werden kann. Dieses wird direct nicht leicht erkannt, und da wir in unseren früheren Arbeiten die Auflösung der trinomischen Gleichung auf die Integration der allgemeinen Differentialgleichung basirten, so erscheinen dort die Lösungen in der Gestalt von n-fachen Integralen. Auf die Reihenentwickelung ist indessen dieser Umstand ganz ohne Einfluss, denn die Reihe 32) genügt der Gleichung 30) auch, falls die Coefficienten A_l beliebige Zahlen sind, wenn nur der Ausdruck f in der Reihe identisch mit der Charakteristik der allgemeinen Differentialgleichung ist. Es lässt sich daher mittels der Reihen leicht darthun, dass die n-fachen Integrale bei der erwähnten speciellen Charakteristik nicht wesentlich von den Doppelintegralen verschieden sind, hingegen, dass es die n-fachen, resp. Doppelintegrale unter sich sind. — Noch eine andere Reduction der Integrale ist möglich: Im Falle $\nu = n$ kann das Spitzer'sche Integral unter allen Umständen in ein $n-1$-faches verwandelt werden, wenn man an Stelle von $\frac{u_1}{u_n}$ bis $\frac{u_{n-1}}{u_n}$ die neuen Integrationsvariabelen v_1 bis v_{n-1} einführt. Mithin können die Doppelintegrale, welche der trinomischen Gleichung genügen, sogar durch einfache ersetzt werden. Die Form der Integrale erleidet indessen hierdurch eine wesentliche Veränderung, und ich möchte mich zu jener Umgestaltung nicht eher entschliessen, als bis ein zwingender Grund vorhanden ist und die in Abschnitt III b) offen gelassene Frage ihre Beantwortung gefunden hat.

..., $s-1$; $q=0, 1, \ldots, n-s-1$, so ist zunächst erforderlich, dass die Exponenten p und $\frac{m+qs}{n-s}$ nicht verschieden sind, d. h., es muss

$$m=p(n-s)-qs.$$

Wenn aber diese Bedingung stattfindet, so werden auch — wie eine einfache Rechnung zeigt — die Coefficienten gleicher x-Potenzen einander proportional und es ergiebt sich

$$R_p=-\frac{n-s}{s}R_q.$$

Der in Rede stehende Fall kann im Allgemeinen für $s(n-s)$ von einander verschiedene ganzzahlige m stattfinden.

Ist aber m eine ganze Zahl, so verschwindet, abgesehen von besonderen Fällen, die Summe der Wurzeln der Fundamentalform z) und es stellt der Ausdruck

$$z=\sum_{k=0}^{n-1} C_k y_k^m$$

nicht mehr das vollständige Integral der Differentialresolvente 31) dar. Gesetzt nun, es ist

$$\left\{\sum_{k=0}^{n-1} y_k^\mu\right\}_{\mu=m}=0,$$

so lässt sich — bei Aenderung der Constanten — z in der Form

$$z=\sum_{k=0}^{n-2} C_k y_k^m + C_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} y_k^m \left\{\frac{y_k^{\mu-m}-1}{\mu-m}\right\}_{\mu=m}$$

geben, und geht man zur Grenze über, so entsteht

36) $$z=\sum_{k=0}^{n-2} C_k y_k^m + C_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} y_k^m\, l y_k,$$

also ein Ausdruck mit der hinreichenden Anzahl von Integrationsconstanten. — Eine der letzten Entwickelung sehr ähnliche findet sich bei Boole. Vergl. a. a. O.

Die weiteren Ausnahmefälle, insbesondere wenn n und s nicht relativ prim sind, lassen wir bei Seite.

Dresden, Ende August 1885.

Kleinere Mittheilungen.

XVII. Inversion des von Weierstrass definirten vollständigen elliptischen Integrals zweiter Gattung.

Von den durch Weierstrass definirten Integralen J und J' ist das zweite bekanntlich identisch mit dem Legendre'schen Integral E', seine Inversion ist daher in unserer zweiten Abhandlung (s. diesen Jahrgang, Heft 3 S. 178) schon geleistet und wir können die darin enthaltenen Gleichungen 10) und 18) einfach mit veränderter Bezeichnung wieder benutzen, indem wir E in J' und zugleich q in q', resp. q' in q umwandeln. Dann ergiebt sich:

$$q' = lim\, \frac{u}{L(q'_n)}, \quad q' = lim\, L(J', q_n),$$

wobei u durch Gleichung 7), $L(q'_n)$ durch 9) und $L(J', q_n)$ durch 17) definirt ist. Es handelt sich also nur noch um die Inversion des Integrals J.

Zunächst ist bekanntlich $J = K - E$; sodann hat man die Reihe*:

$$J = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \frac{5}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right) k^6 + \frac{7}{8}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^8 + \ldots\right\},$$

woraus zu ersehen, dass J mit k zugleich verschwindet, mit wachsendem k stetig wächst und für $k=1$ einen unendlich grossen Werth annimmt.

Man könnte nun schon gleich diese Reihe nach Lagrange invertiren und so den Modulus k direct als Function von J darstellen; es ist aber dankbarer, die Vermittelung der Grösse q dabei in Anspruch zu nehmen. — Wir haben nämlich in der vorigen Abhandlung S. 180 schon die Gleichung angeführt:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\left(\frac{2K}{\pi} - \frac{2E}{\pi}\right) = 8\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}}$$

und auch schon die Formel festgestellt, nach welcher die Coefficienten der aufeinander folgenden Potenzen von q zu bilden sind, wenn die rechte Seite in eine Potenzreihe entwickelt wird. Geben wir dieser Gleichung nun die Form:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2J}{\pi} = 8\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}}$$

oder:

---

* Weierstrass, Theorie der Abel'schen Functionen. Crelle's Journal Bd. 52 S. 364.

1) $$\frac{2J}{\pi} = \frac{8\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}}{\frac{2K}{\pi}},$$

so können wir auf der rechten Seite nach dem früher Dagewesenen zunächst folgendermassen entwickeln:

$$\frac{2J}{\pi} = 8q\,\frac{1+2q+4q^2+4q^3+\ldots}{1+4q+4q^2+4q^4+\ldots},$$

sodann aber auch durch eine beliebig weit ausführbare Division die Relation zwischen J und q auf die Form bringen:

$$\frac{J}{4\pi} = q(1-2q+8q^2-20q^3+50q^4-112q^5+240q^6-448q^7+957q^8 - 1800q^9+3266q^{10}-\ldots).$$

Diese Reihe lässt sich ohne besondere Mühe invertiren und liefert, wenn man zur Abkürzung $\frac{J}{4\pi} = u$ setzt, das Resultat:

$$q = u+2u^2-20u^4-66u^5+84u^6 \pm \ldots$$

In einem weiteren Gebiete, als diese letztere Formel, ist aber die Inversion nach der Limitationsmethode anwendbar. Aus Gleichung 1) findet sich z. B. direct folgende:

2) $$q = \frac{\frac{2J}{\pi}\cdot\frac{2K}{\pi}}{8\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^{n-1}}{1-q^{2n}}},$$

wofür, da $\frac{2K}{\pi}$ als Function von q bekannt ist, geschrieben werden kann:

3) $$q = L(J, q).$$

Um nunmehr zur Entscheidung der Frage nach der Convergenz der beabsichtigten Limitation zunächst über das Vorzeichen des Differentialquotienten $\frac{\partial L}{\partial q}$ Etwas zu erfahren, bringen wir die Gleichung 2) durch Reihenentwickelung und Division auf die Form:

4) $$q = \frac{2J}{\pi}(1+2q-4q^2-4q^3+14q^4-8q^5-24q^6+56q^7-29q^8 - 104q^9+250q^{10}-\ldots)$$

und bilden

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{2J}{\pi}(2-q[8+12q-56q^2+\ldots]).$$

Hieraus ist ersichtlich, dass der Werth von $\frac{\partial L}{\partial q}$ für kleinere Werthe von q nothwendig positiv ausfallen muss, dass also in diesem Bereich aus der Relation $q_n \gtrless q_{n+1}$ bei constantem J die weitere Relation folgt:

$$L(J, q_n) \gtrless L(J, q_{n+1}).$$

Wählen wir für den Beginn der Limitation irgend eine Grösse q_0, so sind, gerade wie in der vorigen Abhandlung S. 186, zwei Fälle zu unterscheiden. Angenommen erstens: $q_0 < q$, so ist auch $L(J, q_0) < L(J, q)$. Setzt man jetzt:

$$q_1 = L(J, q_0),$$

so folgt aus 3):

5) $$q_1 < q.$$

Werde nun derjenige Werth von J, welcher entsteht, wenn man in Gleichung 1) die Grösse q mit q'_0 vertauscht, durch J_0 bezeichnet, so geht zunächst Gleichung 3) über in die Form:

$$q_0 = L(J_0, q_0).$$

Ferner folgt aus der Relation $q_0 < q$ und aus dem zu Anfang dieses Abschnittes hervorgehobenen Umstande, dass das Integral J mit seinem Modulus k, also auch mit der Grösse q zugleich stetig zu- und abnimmt, dass auch $J_0 < J$ sein muss. — Nunmehr lehrt ein Blick auf die Gleichung 4), dass auch $L(J_0, q_0) < L(J, q_0)$ ist oder, was ganz dasselbe bedeutet, $q_0 < q_1$. Combinirt man dieses Resultat mit 5), so ergiebt sich die fundamentale Relation:

$$q_0 < q_1 < q.$$

Ganz dieselben Schlüsse, wie wir sie schon mehrmals aneinander gereiht haben, führen auch hier wieder zu dem Resultate:

6) $$q_0 < q_1 < q_2 \ldots < q_n < q, \quad q = \lim L(J, q_n).$$

Wäre aber zweitens der Anfangswerth q_0 grösser als die unbekannte Grösse q gewesen, so würden sich nacheinander folgende Relationen ergeben:

$$q_0 > q, \quad L(J, q_0) > L(J, q), \quad q_1 > q,$$
$$J_0 > J, \quad L(J_0, q_0) > L(J, q_0), \quad q_0 > q_1,$$
$$q_0 > q_1 > q \text{ etc.},$$
$$q_0 > q_1 > q_2 \ldots > q_n > q, \quad q = \lim L(J, q_n).$$

Es findet also in diesem Falle eine Annäherung von oben her statt. — Indessen besitzt, wie vorhin schon angedeutet, die Anwendung dieser Limitation irgendwo eine obere Grenze und daher muss nun über den zulässigen Spielraum Etwas constatirt werden.

Nehmen wir den Mittelwerth $k = \sin 45^0$, so ist:

$$q = 0{,}0432139, \quad K = 1{,}8540747, \quad E = 1{,}3506439,$$

also:

$$J = 0{,}5034308.$$

Soll nun versucht werden, ob aus diesem Integral der oben angegebene Werth von q durch die eben entwickelte Limitation sich ermitteln lässt, so können wir von der Null ausgehen. Für $q_0 = 0$ folgt aber aus 4):

$$q = L(J, 0) = \frac{J}{4\pi} = 0{,}0400618.$$

Sodann ist:

$$q_2 = 0{,}0430055, \quad q_3 = 0{,}0432001,$$
$$q_4 = 0{,}0432130, \quad q_5 = 0{,}0432139, \quad q_6 = 0{,}0432139.$$

Für diesen und alle kleineren Werthe von q führt das gegenwärtige Verfahren also zum Ziele. Ohne Zweifel reicht seine Anwendbarkeit aber über den Mittelwerth $k = \sin 45^0$ noch eine Strecke hinaus. Indessen, da jedenfalls doch ein Restintervall übrig bleibt, wo die Formel 6) uns im Stiche lässt, so wollen wir den ganzen übrigen Spielraum:

$$\sin 45^0 < k < 1$$

lieber mit einem Schlage erledigen, indem wir q' als Function von J ausdrücken.

Zu einer Gleichung zwischen J und q' kann man auf verschiedenen Wegen gelangen. Da wir indess früher schon die Beziehungen der Grössen K und E zu q' entwickelt haben, so scheint es hier am einfachsten, J als Differenz dieser beiden Integrale darzustellen.

Aus $q' = e^{-\frac{\pi K}{K'}}$ ergiebt sich:

$$\log \frac{1}{q'} = \frac{\pi K}{K'} \quad \text{und} \quad K = \frac{1}{2} \log \frac{1}{q'} \cdot \frac{2K'}{\pi}.$$

Ferner entnehmen wir aus der vorigen Abhandlung die Gleichung 13), wonach:

$$E = \frac{1 + 4 \log \frac{1}{q'} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q'^n}{1 - q'^{2n}}}{1 + 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{q'^{2n-1}}{1 - q'^{2n-1}}}$$

oder, was dasselbe ist:

$$E = \frac{1 + 4 \log \frac{1}{q'} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q'^n}{1 - q'^{2n}}}{\frac{2K'}{\pi}}.$$

Demnach erhält man durch Subtraction:

$$J = K - E = \frac{\frac{1}{2} \log \frac{1}{q'} \left\{ \left(2 \frac{K'}{\pi}\right)^2 - 8 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q'^n}{1 - q'^{2n}} \right\} - 1}{\frac{2K'}{\pi}}.$$

Nun kann man die in der Klammer enthaltene Differenz folgendermassen vereinfachen:

$$\left(\frac{2K'}{\pi}\right)^2 = 1 + 8 \left\{ \frac{q'}{1 - q'} + \frac{2q'^2}{1 + q'^2} + \frac{3q'^3}{1 - q'^3} + \frac{4q'^4}{1 + q'^4} + \ldots \right\},^*$$

$$8 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q'^n}{1 - q'^{2n}} = \qquad 8 \left\{ \frac{q'}{1 - q'^2} + \frac{2q'^2}{1 - q'^4} + \frac{3q'^3}{1 - q'^6} + \frac{4q'^4}{1 - q'^8} + \ldots \right\},$$

* Fund. n. p. 103 Nr. 8.

$$\left(\frac{2K'}{\pi}\right)^2 - 8\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n q'^n}{1-q'^{2n}} = 1 + 8\left\{\frac{q'(1+q')-q'}{1-q'^2} + \frac{2q'^2(1-q'^2)-2q'^2}{1-q'^4} + \dots\right\}$$

$$= 1 + 8\left\{\frac{q'^2}{1-q'^2} - \frac{2q'^4}{1-q'^4} + \frac{3q'^6}{1-q'^6} - \dots\right\}$$

$$= 1 + 8\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\frac{n q'^{2n}}{1-q'^{2n}}.$$

Also hat man:

$$7)\qquad J = \frac{\frac{1}{2}\log\frac{1}{q'}\left\{1 + 8\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\frac{n q'^{2n}}{1-q'^{2n}}\right\} - 1}{\frac{2K'}{\pi}}.$$

Aus dieser Gleichung isoliren wir den Logarithmus und erhalten:

$$8)\qquad \log\frac{1}{q'} = \frac{2\left\{J\cdot\frac{2K'}{\pi} + 1\right\}}{1 + 8\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\frac{n q'^{2n}}{1-q'^{2n}}}.$$

Hiermit kann nun die Limitation vollzogen werden. Wir setzen also statt 8) zur Abkürzung:

$$9)\qquad \log\frac{1}{q'} = L(J, q').$$

Bezüglich der Entwickelung in Potenzreihen ist hier auf die schon erwähnte Formel von Borchardt zu verweisen:

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + 4\,\Sigma\psi(n)\,q^{2^l\cdot m^2 n},$$

sowie auf die in der vorigen Abhandlung S. 182 von mir angegebene Formel:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n q^{2n}}{1-q^{2n}} = \sum_{p=1}^{p=\infty}(\chi(p)-\xi(p))\,q^{2p}.$$

Man erhält:

$$\log\frac{1}{q'} = \frac{2 + 2J(1 + 4q' + 4q'^2 + 4q'^4 + 8q'^5 + 4q'^8 + \dots)}{1 + 8q'^2 - 8q'^4 + 32q'^6 - 40q'^8 + \dots}.$$

Nunmehr lässt sich wieder durch Bildung des partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial L}{\partial q}$ leicht nachweisen, dass ein Intervall existiren muss, innerhalb dessen die Function L mit q' zugleich wächst und abnimmt. Berücksichtigt man ferner, dass mit zunehmendem Werthe von q' der $\log\frac{1}{q'}$ abnimmt und umgekehrt, so gelangt man durch Schlüsse, welche den im Vorigen mehrmals wiederholten ganz analog sind, zu dem Resultat:

$$10)\qquad \begin{gathered} q'_0 < q'_2 < q'_4 \dots < q'_n < q' < q'_{n+1} \dots < q'_3 < q'_1, \\ q' = \lim L(J, q'_n). \end{gathered}$$

Es findet also eine oscillirende Annäherung statt; je zwei aufeinander folgende Näherungen haben die erwünschte Eigenschaft, den gesuchten Werth stets zwischen sich einzuschliessen. — Nun nimmt bekanntlich in dem Intervall $\sin 45^0 < k < 1$ die Grösse q' stetig ab. Wenn daher Gleichung 10) den Mittelwerth $k = \sin 45^0$ noch beherrscht, so beherrscht sie das ganze Intervall. Führt man diese Probe aus, und zwar, um die Annäherung durch den ganzen Zwischenraum hindurchzuleiten, mit dem Anfangswerth $q'_0 = 0$, so ergiebt sich:

$$\log \frac{1}{q'_1} = 2J + 2 \doteq 0{,}0494466,$$

sodann

$$q'_2 = 0{,}0426670,\quad q'_3 = 0{,}0432659,\quad q'_4 = 0{,}0432089,\quad q'_5 = 0{,}0432147,$$
$$q'_6 = 0{,}0432138,\quad q'_7 = 0{,}0432139,\quad q'_8 = 0{,}0432139.$$

Dieser Werth von q' stimmt mit dem vorhin für q gefundenen vollständig überein, wie es ja offenbar auch sein muss.

Hiermit ist die letzte noch übrige Lücke ausgefüllt und der Zweck unserer Untersuchungen über die Inversion der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung erreicht. Es haben sich die Mittel gefunden, um aus jedem möglichen Werthe der Grössen K, K', E, E', J, J' den zugehörigen reellen Modulus mit beliebiger Genauigkeit berechnen zu können.

Bonn. Dr. C. Isenkrahe.

XVIII. Zur mathematischen Statistik.

Antwort auf die Angriffe des Herrn Dr. H. Zimmermann.

In der Schrift „Ueber Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse“, Berlin 1886, bei Puttkammer & Mühlbrecht, wird von Herrn Dr. Zimmermann der folgende, von mir aufgestellte und zuerst in dieser Zeitschrift Jahrgang XXV Heft 1, veröffentlichte Satz angegriffen:

> Wenn n Ereignisse, die von n von einander unabhängigen Ursachen bedingt werden, sich sämmtlich oder theilweise ausschliessen, d. h., wenn das vorherige Eintreffen des einen oder des andern das Eintreffen mehrerer oder aller übrigen unmöglich macht, so kann bei einem unendlich kleinen Zeitintervall doch dieses Abhängigkeitsverhältniss nicht in Frage kommen, weil, wenn die Aufeinanderfolge zweier oder mehrerer Ereignisse von dem Zusammentreffen durch unsere Sinne unterschieden werden soll, immer ein endliches, wenn auch noch so kleines Zeitintervall zwischen denselben liegen muss. Für ein unendlich kleines Zeitintervall werden daher derartige abhängige Ereignisse unabhängig von einander und die Sätze der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten sind auf sie anwendbar.

Genannter Autor sagt S. 8 a. a. O. wörtlich:

> „Dieser Satz ist nicht nur in seiner Anwendung auf den vorliegenden Fall, sondern im Allgemeinen falsch“

und begründet dies damit, dass man nicht *a priori* für die Aufstellung der Grundgleichung in Infinitesimalgrössen Bedingungen ändern oder vernachlässigen könne, welche für endliche Grössen gegeben seien.

Man muss bekennen, dass Herr Dr. Zimmermann in seinen Behauptungen bewundernswerth klar und verständlich ist, verständlicher, als in seinen Begründungen. Ich bin ja auch der Ansicht, dass man *a priori* nicht Bedingungen verändern oder vernachlässigen darf; aber ich meine, dass das Letztere hier gar nicht geschehen ist. Die dem Satze vorausgeschickten Betrachtungen, die mein Gegner zunächst ganz ignorirt, genügen nach meinem Dafürhalten vollkommen, um einzusehen, dass in einem unendlich kleinen Zeitintervall die hier in Frage kommende Abhängigkeit verschwindet.

Nun gebe ich aber gern zu, dass man hierüber auch anderer Ansicht sein kann, zumal wenn man, wie Herr Dr. Zimmermann, den Standpunkt vertritt, dass bei mathematischen Untersuchungen nur die Grenzmethode zulässig ist, wie ich aus der folgenden Aeusserung dieses Herrn schliesse. Derselbe fährt nämlich fort:

> „Was vernachlässigt werden darf, zeigt sich, wenn man die Gleichung in endlichen Grössen aufstellt und dann zur Grenze übergeht.“

Um nun meinen Satz auch einer solchen Auffassung gegenüber aufrecht zu erhalten, wird mir nichts weiter übrig bleiben, als denselben nach der Grenzmethode abzuleiten. Dass die Aufgabe keine schwierige ist, trotzdem sie Herr Dr. Zimmermann für unmöglich hält, werde ich sogleich zeigen.

Es handelt sich im vorliegenden Falle darum, den Beweis zu erbringen, dass die folgenden Wahrscheinlichkeiten, nämlich, dass 1. keines von den n abhängigen Ereignissen, dass 2. ein beliebiges dieser n Ereignisse und dass endlich 3. ein bestimmtes dieser n Ereignisse innerhalb des unendlich kleinen Zeitintervalls von x bis $x + dx$ stattfindet, genau dieselben sind, als wenn die n Ereignisse vollständig unabhängig von einander wären. Die Wahrscheinlichkeiten, dass zwei und mehrere der n Ereignisse innerhalb x bis $x + dx$ hinter einander eintreten, sind hier kein Gegenstand der Untersuchung, da mein Satz auf Grund der ihm vorausgeschickten Betrachtungen auf solche Fälle nicht angewandt werden kann.

Sei allgemein die Wahrscheinlichkeit, dass unter der Einwirkung der übrigen $(n-1)$ Ereignisse das i^{te} Ereigniss innerhalb der Zeit von x bis $x + \Delta x$ stattfindet, gleich $x_i \Delta x$ und die Wahrscheinlichkeit, dass keines dieser n Ereignisse innerhalb der angegebenen Zeit eintritt, gleich $1 - \Delta y$, so würde, wenn die Ereignisse alle unabhängig von einander wären, nach dem Satze von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit

$$1) \quad 1-\varDelta y=(1-x_1\varDelta x)(1-x_2\varDelta x)\ldots(1-x_n\varDelta x)$$
$$=1-x_1\varDelta x-x_2\varDelta x-\ldots-x_n\varDelta x+N_2\varDelta x^2-N_3\varDelta x^3$$
$$+-\ldots\pm N_n\varDelta x^n$$

sein. Hierbei ist es gleichgiltig, ob man sich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als constant oder von $\varDelta x$ abhängig vorstellt. Jedenfalls ist, was auch $\varDelta x$ sein mag, keine der Grössen $x_1, x_2, \ldots$ unendlich gross.

Aus 1) folgt

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=x_1+x_2+\ldots+x_n-N_2\varDelta x+N_3\varDelta x^2-+\ldots\mp N_n\varDelta x^{n-1}$$

und, wenn jetzt zur Grenze übergegangen wird, in aller Strenge

$$\lim\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{dy}{dx}=x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

Für ein unendlich kleines Zeitintervall ist daher

$$2) \quad dy=x_1\,dx+x_2\,dx+\ldots+x_n\,dx,$$
$$1-dy=1-x_1\,dx-x_2\,dx-\ldots-x_n\,dx.$$

Nun sollen aber diese n Ereignisse dergestalt von einander abhängig sein, dass das vorherige Eintreffen des einen das Eintreffen des andern oder aller übrigen unmöglich macht. In diesem Falle wird in dem Ausdrucke 1) die Wahrscheinlichkeit für verschiedene der daselbst auftretenden zusammengesetzten Ereignisse eine Verminderung erfahren. Wäre z. B. der Eintritt des zweiten Ereignisses nach dem ersten, nicht aber umgekehrt der Eintritt des ersten nach dem zweiten möglich, so würde die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieser beiden Ereignisse nicht $x_1x_2\varDelta x^2$, sondern nur $\varepsilon x_1x_2\varDelta x^2$ sein, wo $0<\varepsilon<1$ ist. Es ist daher klar, dass in diesem Falle die Reihe

$$3) \quad N_2\varDelta x^2-N_3\varDelta x^3+-\ldots\pm N_n\varDelta x^n=S_1$$

durch eine andere

$$4) \quad N'_2\varDelta x^2-N'_3\varDelta x^3+-\ldots\pm N'_n\varDelta x^n=S_2$$

ersetzt werden muss, deren Coefficienten kleiner als die der ersteren sind.

Zur Ermittelung der Grenzen, innerhalb deren S_2 liegen muss, führen folgende einfache Betrachtungen.

In den Fällen, wo alle zusammengesetzten Ereignisse unmöglich sind, ist offenbar

$$5) \quad 1-\varDelta y=1-x_1\varDelta x-x_2\varDelta x-\ldots-x_n\varDelta x$$

und somit das auf der rechten Seite noch zuzusetzende Glied

$$S=0.$$

Könnte aber z. B. das i^{te} Ereigniss in einer Verbindung mit dem k^{ten} eintreten, vielleicht so, dass das erstere vor dem letzteren möglich ist, so würde die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen beider Ereignisse, da solche sowohl in $x_i\varDelta x$, als auch in $x_k\varDelta x$ mit enthalten wäre, auf der rechten Seite der Gleichung 5) einmal zuviel in Abzug gebracht sein und wieder hinzugefügt werden müssen, woraus sofort folgt, dass unter dieser Voraussetzung

$$S>0$$

ist. Die soeben gefundene Eigenschaft findet aber in unserem Falle, wo nur das vorherige Eintreffen des einen oder des andern das Eintreffen mehrerer oder aller übrigen unmöglich macht, erst recht statt; denn hier sind offenbar sehr viele von den zusammengesetzten Ereignissen noch möglich, deren Wahrscheinlichkeiten in den Wahrscheinlichkeiten der einfachen Ereignisse alle wiederholt enthalten sind. Am grössten wird, wie leicht einzusehen ist, jedoch S sein, wenn die n Ereignisse in allen möglichen Combinationen stattfinden können, d. h. also, wenn alle n Ereignisse vollkommen unabhängig von einander sind. In diesem Falle ist

$$S = S_1.$$

Die Grenzen für S_2 sind daher durch die Ungleichung

$$0 < S_2 < S_1$$

und die Grenzen für die Wahrscheinlichkeit $1 - \Delta y$, wenn die n Ereignisse die angegebene Abhängigkeit besitzen, durch

$$6)\quad 1 - \Delta y \begin{cases} < 1 - x_1 \Delta x - x_2 \Delta x - \ldots - x_n \Delta x + N_2 \Delta x^2 - N_3 \Delta x^3 \\ \qquad + - \ldots \pm N_n \Delta x^n \\ > 1 - x_1 \Delta x - x_2 \Delta x - \ldots - x_n \Delta x \end{cases}$$

gegeben.

Aus 6) folgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{cases} > x_1 + x_2 + \ldots + x_n - N_2 \Delta x + N_3 \Delta x^2 - + \ldots \mp N_n \Delta x^{n-1} \\ < x_1 + x_2 + \ldots + x_n \end{cases}$$

und, wenn jetzt zur Grenze übergegangen wird,

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

also genau dasselbe, was wir unter 2) für unabhängige Ereignisse gefunden haben, nämlich

$$7)\qquad dy = x_1\, dx + x_2\, dx + \ldots + x_n\, dx,$$

$$8)\qquad 1 - dy = 1 - x_1\, dx - x_2\, dx - \ldots - x_n\, dx.$$

Durch analoge Schlüsse erhält man behufs Ermittelung der noch festzustellenden Wahrscheinlichkeit Δy_i, dass innerhalb der Zeit von x bis $x + \Delta x$ von den n Ereignissen nur allein das i^{te} stattfindet,

für unabhängige Ereignisse:

$$\Delta y_i = x_i \Delta x (1 - x_1 \Delta x)(1 - x_2 \Delta x) \ldots (1 - x_{i-1} \Delta x)(1 - x_{i+1} \Delta x) \ldots (1 - x_n \Delta x)$$

$$= x_i \Delta x - A_2 \Delta x^2 + A_3 \Delta x^3 - + \ldots \pm A_n \Delta x^n$$

und

für abhängige Ereignisse:

$$\Delta y_i \begin{cases} > x_i \Delta x - A_2 \Delta x^2 + A_3 \Delta x^3 - + \ldots \pm A_n \Delta x^n, \\ < x_i \Delta x, \end{cases}$$

woraus, wenn zur Grenze übergegangen wird, für beide Fälle übereinstimmend

9) $$dy_i = x_i dx$$

gefunden wird.

Damit ist aber bewiesen, dass für ein **unendlich kleines Zeitintervall** Ereignisse von der besprochenen Abhängigkeit insofern als unabhängig von einander betrachtet werden können, als die Sätze der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten auf sie anwendbar sind.

Ich weiss nicht, ob Herr Dr. Zimmermann jetzt noch die Behauptung aufrecht erhält, die er den bereits angeführten Auslassungen anfügt, nämlich:

> „Wendet man aber einen solchen Satz an, wie den obigen, so setzt man etwas voraus, was erst bewiesen werden müsste, was aber nicht bewiesen werden kann; denn man kann nicht beweisen, dass man vorhandene Bedingungen als nicht vorhanden betrachten darf." —

Was nun das sogenannte zweite Argument betrifft, das Herr Dr. Zimmermann gegen meinen Satz ins Feld führt, so steht dies auf sehr schwachen Füssen. Herr Dr. Zimmermann meint, es sei ebenso ungereimt, anzunehmen, dass eine Person gleichzeitig im Zustande der Diensttauglichkeit sterben und auch dienstunfähig werden könne, als den Fall zuzulassen, dass sie zuerst stürbe und später dienstunfähig würde. Hierüber bin ich allerdings anderer Ansicht. Das Zusammenfallen, d. h. das gleichzeitige Eintreffen dieser zwei Ereignisse ist durchaus keine Absurdität, sondern thatsächlich möglich. Warum soll nicht Jemand in dem Augenblicke sterben können, wo er seine Arbeit als Activer für immer einstellen will. oder die der Invalidität vorangehende Krankheitsdauer eben absolvirt hat, oder endlich von einer Körperschaft als invalid erklärt wird? Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist freilich, wie wir gesehen haben, ein Unendlichkleines zweiter Ordnung und daher gegen die Wahrscheinlichkeit der einfachen Ereignisse verschwindend klein; aber etwas Ungereimtes ist das Zusammentreffen dieser zwei Ereignisse nicht.

Ob endlich mein Satz eine falsche Interpretation des Grundsatzes von der Vernachlässigung des Unendlichkleinen höherer Ordnung ist, mag Herr Dr. Zimmermann mit seinen philosophischen Ansichten über das Unendlichkleine abmachen; für mich handelt es sich nur darum, ob meine „Interpretation" zulässig und zur Einleitung der Rechnung zweckmässig ist. Das Erstere ist hier erwiesen und das Letztere, glaube ich, steht ausser allem Zweifel.

Burgk bei Dresden. W. Küttner.

XIX. Ueber gewisse merkwürdige Punkte des Dreiecks.

(Hierzu Taf. III Fig. 3 u. 4.)

Wenn die Ecken eines Dreiecks ABC zu Mittelpunkten von Kreisen genommen werden, deren Halbmesser gleich dem Radius des um ABC beschriebenen Kreises sind, so schneiden sich jene Kreise in vier Punkten M, A_1, B_1, C_1, von denen M das Centrum des Umkreises ist und A_1 ausserhalb des Dreiecks gegenüber A, ebenso B_1 gegenüber B, C_1 gegenüber C liegen möge; die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 gehen dann durch einen und denselben Punkt O, der u. A. folgende Eigenschaften besitzt.

Sind AD, BE, CF (Fig. 3) die Höhen des Dreiecks, MP, MQ, MR die Abstände des Punktes M von den Dreiecksseiten BC, CA, AB, und OU, OV, OW die entsprechenden Abstände des Punktes O, so halbiren U, V, W die Strecken DP, EQ, FR. Wird ferner auf AD der Abschnitt $AP_1 = MP$ genommen und ebenso $BQ_1 = MQ$, $CR_1 = MR$, so gehen PP_1, QQ_1, RR_1 gleichfalls durch den Punkt O. Aus diesen Bemerkungen ergeben sich zwei anderweite Constructionen von O.

Für $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $MA = r$ und bei der üblichen Bezeichnung der Dreieckswinkel erhält man

$$AA_1 = \sqrt{r^2 + 2bc\cos\alpha}, \text{ analog } BB_1 \text{ und } CC_1,$$

oder, wenn $a^2 + b^2 + c^2 + r^2 = k^2$ gesetzt wird,

$$AA_1 = \sqrt{k^2 - 2a^2} \text{ u. s. w.}$$

Die Entfernungen AO, BO, CO sind die Hälften von AA_1, BB_1, CC_1. Ferner ist

$$OU = \tfrac{1}{2} r \cos(\beta - \gamma), \text{ analog } OV, OW,$$

$$MO = \tfrac{1}{2}\sqrt{9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Diese Ergebnisse sind wahrscheinlich specielle Fälle des folgenden Theorems:

> Drei mit gleichen, aber sonst beliebigen Radien um A, B, C beschriebene Kreise schneiden sich in sechs Punkten, von denen A_1, B_1, C_1 die äusseren, A_2, B_2, C_2 die inneren sein mögen; die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 gehen dann im Allgemeinen durch einen Punkt O_1, ebenso AA_2, BB_2, CC_2 durch einen von O_1 verschiedenen Punkt O_2 (Fig. 4).

Es muss jedoch bemerkt werden, dass dieser Satz Ausnahmen erleidet und dass mitunter nur O_1 existirt, manchmal weder O_1, noch O_2. Man kann daher die Frage stellen:

> Unter welchen Bedingungen lässt sich in jedes der gleichseitigen Sechsecke $AB_1CA_1BC_1A$ und $AB_2CA_2BC_2A$ oder nur in eines oder in keines derselben ein Kegelschnitt beschreiben?

Für jetzt muss ich es bei diesen Andeutungen bewenden lassen, meine aber, dass eine weitere Untersuchung hierüber nicht ohne Interesse sein dürfte.

Schlömilch.

XX. Beitrag zur Theorie der Potentialfunction.

Der Satz von der sprungweisen Aenderung des Differentialquotienten der Potentialfunction beim Durchgang des afficirten Punktes durch eine Fläche in der Richtung der Normale wird von Dirichlet* in anderer Art bewiesen wie von Gauss**. Dirichlet's Beweis setzt nur die Stetigkeit der Dichte der Fläche voraus, während bei Gauss noch überdies die Endlichkeit der Differentialquotienten der Dichte vorausgesetzt werden muss.

Die Grundlage des erwähnten Satzes besteht in der Auswerthung des bestimmten Integrals

$$J=\int_0^\varepsilon \frac{(a-x)\,\varrho\,d\varrho}{((a-x)^2+\varrho^2)^{3/2}},$$

wo (a, b, c) die Coordinaten des Punktes der Fläche, $(x, 0, 0)$ die des afficirten Punktes bezeichnen; die Berührungsebene im Coordinatenanfang ist die bc-Ebene; für die rechtwinkligen Coordinaten b und c sind durch

$$b=\varrho\cos\vartheta,\quad c=\varrho\sin\vartheta$$

Polarcoordinaten eingeführt. Die Grösse x wird gegen die unendlich kleine Grösse ε als unendlich klein vorausgesetzt. Zerlegt man das Integral J in die beiden Theile

$$K=\int_0^\varepsilon \frac{a\,\varrho\,d\varrho}{r^3},\quad L=-x\int_0^\varepsilon \frac{\varrho\,d\varrho}{r^3},$$

so bietet die Bestimmung des Integrals K gar keine Schwierigkeit. Nicht so die von L. Für dessen Auswerthung setzt Dirichlet x in einer gewissen Grösse gegen a voraus. Diese Voraussetzung lässt sich durch die bekannte Darstellung des Ausdruckes der Gleichung einer Fläche bei obigem Coordinatensystem beseitigen, wodurch zugleich Dirichlet's Behandlung an Durchsichtigkeit gewinnt.

Die dazu nöthigen Integralformeln sind, wenn $Z=(\alpha+\beta z+\gamma z^2)^{1/2}$ gesetzt wird,

$$\text{I)}\quad \int\frac{dz}{Z^3}=\frac{2(2\gamma z+\beta)}{(4\alpha\gamma-\beta^2)Z},$$

$$\text{II)}\quad \int\frac{z\,dz}{Z^3}=\frac{-2(2\alpha+\beta z)}{(4\alpha\gamma-\beta^2)Z},$$

$$\text{III)}\quad \int\frac{z^2\,dz}{Z^3}=-\frac{(4\alpha\gamma-2\beta^2)-2\alpha\beta}{\gamma(4\alpha\gamma-\beta^2)Z}+\frac{1}{\sqrt{\gamma^3}}\log(2\gamma z+\beta+2\sqrt{\gamma}\,Z).$$

welche aus der bekannten Grundformel

---

* Vorlesungen, herausgegeben von Grube, § 14.

** Allgemeine Lehrsätze u. s. w., Art. 15 und 16. C. F. Gauss' Werke, Bd. V.

$$\int \frac{dz}{Z} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log (2\gamma z + \beta + 2\sqrt{\gamma}\, Z)$$

durch Differentiation nach α, β, γ erhalten werden.

1. Wird in dem durch den Winkel ϑ bestimmten Normalschnitt ein endlicher Krümmungsradius ($1:2l$, wo l eine homogene Function zweiten Grades von $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ ist) vorausgesetzt, so ist mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$a = l\varrho^2.$$

Dadurch wird das Integral K schon bei Vernachlässigung von $(a-x)^2$ in r^2 mit ε unendlich klein.

Für das Integral L setze man $l\varrho^2 - x = z$; damit erhält man nach I)

$$L = \frac{-x}{\text{Absolut}\, x} = \mp 1,$$

je nachdem x positiv oder negativ ist.

Es möge bemerkt werden, dass derselbe Werth von L auch erhalten wird, wenn man in $(a-x)^2 + \varrho^2$ die Grösse a gegen x vernachlässigt.

2. Wird im Coordinatenanfang eine scharfe Spitze vorausgesetzt, so ist näherungsweise

$$a = l\varrho;$$

damit wird nach III) das Integral K unendlich, während das Integral L nach II) den Werth

$$L = \mp 1 - \frac{l}{\sqrt{l^2+1}}$$

annimmt.

3. Ist in dem durch den Winkel ϑ bestimmten Normalschnitt der Krümmungsradius unendlich klein, so ist näherungsweise

$$a = l\varrho^{1+\mu}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Das Integral K ist, wie in 1., mit ε zugleich unendlich klein. Für die Bestimmung von L rechne man dieses Integral für die beiden folgenden Grenzwerthe:

$$a = l\varrho^2 \text{ (oder } a = 0),$$

d. h. a verkleinert, wofür nach 1. $L = \mp 1$ folgt; setzt man

$$a = l\varepsilon^{\mu}.\varrho,$$

d. h. a vergrössert, so erhält man nach 2.

$$L = \mp 1 - \frac{l\varepsilon^{\mu}}{\sqrt{(l\varepsilon^{\mu})^2+1}} = \mp 1.$$

Es ist daher in den beiden Fällen 1. und 3. der Werth von J entweder -1 oder $+1$, je nachdem x unendlich klein positiv oder unendlich klein negativ ist.

Graz. Prof. Dr. Joh. Frischauf.

Preisaufgaben
der
Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.
Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.

---

1. Für das Jahr 1886.

Seitdem im Jahre 1818 Beudant die Abhandlung „Recherches sur les causes qui déterminent les variations des formes cristallines d'une même substance minérale" veröffentlicht hat, sind umfassendere experimentelle Untersuchungen über das Zustandekommen der verschiedenen Krystallgestalten oder deren Combinationen bei einer und derselben krystallisirenden Substanz nicht mehr angestellt oder wenigstens nicht mehr mitgetheilt worden, trotzdem die künstliche Darstellung von Krystallen seit jener Zeit erhebliche Fortschritte gemacht hat. Angesichts der Bedeutung, welche neue Forschungen auf diesem Gebiete voraussichtlich auch für das Verständniss der bei einer und derselben Mineralart hervortretenden Gestaltungsgegensätze haben würden, stellt die Gesellschaft die Aufgabe:

> Es sollen unter Berücksichtigung der den Gegenstand behandelnden Literatur auf experimentellem Wege Beiträge zur Lösung der Frage geliefert werden, von welchen Verhältnissen bei krystallisirenden Substanzen die Entstehung der verschiedenen Krystallformen oder die gegenseitige Combination der einzelnen abhängig ist. Es wird gewünscht, dass namentlich dabei solche Substanzen in Betracht gezogen werden, welche eine Verallgemeinerung der gewonnenen Resultate auf die natürlichen Mineralvorkommnisse zulassen.

Preis 1000 Mark.

2. Für das Jahr 1887.

Unser Mitglied, Herr W. Hankel, hat in seiner Abhandlung „Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes" (im 20. Bd. der Abh. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss., 12. Bd. der Abh. d. math.-phys. Classe) den Nachweis geführt, dass auf farbigen Flussspathkrystallen durch die Einwirkung des Lichtes elektrische Spannungen erregt werden. Diese photoelektrische Erregung der bezeichneten Krystalle ist eine Folge der Einwirkung des Lichtes auf den in ihnen enthaltenen Farbstoff; die hierdurch eingeleiteten Vorgänge werden durch die Structur der Substanz in bestimmter Weise beeinflusst, so dass die elektrischen Vertheilungen in strenger Abhängigkeit von der Gestalt und dem Wachsthum der Krystalle

erscheinen. Dieselben stehen ferner bei dem Flussspath in engster Beziehung zu den durch Temperaturänderungen erzeugten thermoelektrischen Spannungen, dergestalt, dass beim Belichten dieselben Polaritäten, wenn auch in grösserer oder geringerer Intensität, auftreten, wie bei steigender Temperatur. Ob bei anderen Krystallformen und namentlich bei anderen Farbstoffen die eben erwähnte Beziehung fortbesteht, lässt sich im Voraus nicht entscheiden. Für eine weitere Verfolgung der elektrischen Wirkungen des Lichtes werden wahrscheinlich nur sehr wenige Mineralien ausser dem Flussspathe tauglich sein; dagegen steht zu erwarten, dass es gelingen werde, auf künstlich dargestellten, mit geeigneten Farbstoffen imprägnirten Krystallen die photoelektrischen Erscheinungen hervorzurufen.

Die Gesellschaft wiederholt daher die bereits für das Jahr 1883 gestellte Preisaufgabe:

die Nachweisung und nähere Bestimmung der durch Einwirkung des Lichtes auf künstlich dargestellten und mit geeigneten Stoffen gefärbten Krystallen hervorgerufenen photoelektrischen Spannungen, sowie ihrer Beziehung zu den durch Temperaturänderungen erzeugten thermoelektrischen Spannungen.

Preis 1000 Mark.

3. Für das Jahr 1888.

Durch Weismann's Untersuchungen über die Metamorphose der Insekten sind wir mit der Thatsache bekannt geworden, dass die Vorgänge der Histolyse in dem Entwickelungsleben der Thiere vielfach eine hervorragende Rolle spielen. Trotzdem sind diese Erscheinungen bis jetzt nur wenig im Detail untersucht worden. Die Gesellschaft wünscht daher

eine eingehende Darstellung der Veränderungen, welche die Gewebselemente eines Thieres bei der Rückbildung seiner Organe eingehen.

Die Gesellschaft überlässt die Wahl des Untersuchungsobjectes dem Ermessen des Beobachters, erwartet aber, dass dasselbe der Zahl solcher Thiere angehört, bei denen die histolytischen Processe in grösserem Umfange stattfinden. — Preis 1000 Mark.

4. Für das Jahr 1889.

Obgleich durch die Untersuchungen von Borchardt über das arithmetisch-geometrische Mittel ein gewisser Zusammenhang der Thetafunctionen mehrerer Variabeln mit mehrfachen Integralen nachgewiesen worden, und obgleich die Ausdehnung des Abel'schen Theorems auf vielfache algebraische Integrale schon Jacobi nicht unbekannt war*, so scheinen doch

* Siehe Crelle's Journal Bd. VIII, S. 415, sowie Rosenhain in seinen an Jacobi gerichteten Briefen, Crelle's Journal Bd. XL, wo auch Integrale von der

selbst die betreffenden Doppelintegrale noch keiner erschöpfenden Betrachtung unterworfen worden zu sein. Da sich nun zeigen lässt, dass, wenn z. B. ϑ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4, ϑ_5 gewisse einer sogenannten Rosenhain'schen Gruppe (Crelle's Journal Bd. XL, S. 342) angehörige Thetafunctionen zweier Variabeln u und v bedeuten, die Determinante

$$\begin{vmatrix} \vartheta & \vartheta_1 & \vartheta_2 \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial u} & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial u} & \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial v} & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial v} & \frac{\partial \vartheta_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

dem Product ϑ_3, ϑ_4, ϑ_5 proportional ist, so ergiebt sich daraus (Leipziger Berichte 1884, S. 187) für $x = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta}\right)^2$, $y = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta}\right)^2$ eine Gleichung von der Form $du\,dv = \frac{dx\,dy}{\sqrt{R(\overset{4}{x}\overset{4}{y})}}$. Die Gesellschaft wünscht

> eine eingehende Untersuchung der allgemeineren Doppelintegrale von der Form $\int\int \frac{f(xy)\,dx\,dy}{\sqrt{R(xy)}}$, wo f eine rationale Function sei, in ihrem Zusammenhange mit den Thetafunctionen zweier Variabeln.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1886 Geh. Rath Prof. Dr. Wilhelm Roscher, An der 1. Bürgerschule 4) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Form $\int\int \frac{dt\,du}{\sqrt{F(tu)}}$ betrachtet werden, in denen $F(tu)$ das Product von sechs linearen Factoren $A + Bt + Cu$ ist. Vergl. ferner die Nöther'schen Arbeiten in den Göttinger Nachrichten 1869, Nr. 15 und Bd. II der Mathematischen Annalen, S. 239.

Leipzig, Mai 1886.

W. Roscher, Präses.

W. Hankel. A. Leskien. R. Leuckart. H. Lipsius. W. Scheibner. G. Voigt. F. Zarncke. F. Zirkel.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

31. Jahrgang. 5. Heft.

Ausgegeben am 25. October 1886.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1886.

XIV.

Auflösung linearer Gleichungen.

Von

Dr. W. Veltmann,

Docent a. d. landwirthschaftl. Akademie Poppelsdorf-Bonn.

---

§ 1. Sind n Unbekannte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus ebensoviel Gleichungen

$$\text{I)}\qquad \begin{array}{ll} (a) & a_1x_1 + a_2x_2 \ldots + a_nx_n + a_0 = 0 \\ (b) & b_1x_1 + b_2x_2 \ldots + b_nx_n + b_0 = 0 \\ (c) & c_1x_1 + c_2x_2 \ldots + c_nx_n + c_0 = 0 \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (t) & t_1x_1 + t_2x_2 \ldots + t_nx_n + t_0 = 0. \end{array}$$

zu bestimmen, so ist ein gebräuchliches und für die praktische Rechnung geeignetes Eliminationsverfahren das folgende: Man dividirt jede Gleichung durch ihren ersten Coefficienten und addirt sie dann mit entgegengesetzten Vorzeichen zu der folgenden, wodurch x_1 herausfällt. Auf gleiche Weise wird aus den erhaltenen $n-1$ Gleichungen x_2 eliminirt u. s. w. Am Schlusse der Rechnung hat man n Systeme von Gleichungen, von welchen jedes folgende eine Gleichung und eine Unbekannte weniger enthält. Das letzte System besteht blos aus einer Gleichung von der Form $x_n + p = 0$, welche also unmittelbar den Werth von x_n liefert.

Die Rechnung erfordert eine Anzahl

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 \ldots + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Divisionen und eine Anzahl

$$n(n-1) + (n-1)(n-2) + (n-2)(n-3) \ldots + 2\cdot 1 = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

Additionen von jedesmal zwei Summanden.

Da man zur Berechnung der Unbekannten von jedem System nur eine Gleichung braucht, so wird ein Verfahren vorzuziehen sein, durch welches wenigstens das Hinschreiben der übrigen erspart wird. Ein solches ist dasjenige, welches hier beschrieben werden soll.

§ 2. Die Gleichungen I) seien so geschrieben, dass a_1 jedenfalls nicht $=0$ ist. Es sollen n Gleichungen (Eliminations-Gleichungen)

$$\text{II)}\quad \begin{array}{ll} (\alpha) & x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_0 = 0 \\ (\beta) & x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 \ldots + \beta_n x_n + \beta_0 = 0 \\ (\gamma) & x_3 + \gamma_4 x_4 \ldots + \gamma_n x_n + \gamma_0 = 0 \\ (\delta) & x_4 \ldots + \delta_n x_n + \delta_0 = 0 \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (\tau) & x_n + \tau_0 = 0 \end{array}$$

und eine Anzahl $=\frac{n(n+1)}{2}$ Zahlen (Eliminations-Coefficienten)

$$\text{III)}\quad \begin{array}{c} \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \ldots \alpha'_n \\ \beta'_2 \beta'_3 \ldots \beta'_n \\ \gamma'_3 \ldots \gamma'_n \\ \cdot\quad\cdot \\ \tau'_n \end{array}$$

derart bestimmt werden, dass dieselben folgenden Bedingungen genügen.

A. Multiplicirt man die Gleichung (α) mit α'_1, so entsteht die Gleichung (a).

B. Multiplicirt man die Gleichung (α) mit α'_2 und (β) mit β'_2 und addirt die beiden Gleichungen, so entsteht die Gleichung (b).

C. Multiplicirt man die Gleichung (α) mit α'_3, (β) mit β'_3, (γ) mit γ'_3 und addirt die drei Gleichungen, so entsteht die Gleichung (c).

U. s. w.

T. Multiplicirt man die Gleichung (α) mit α'_n, (β) mit β'_n u. s. w., (τ) mit τ'_n und addirt, so entsteht die Gleichung (t).

Da die Gleichungen I) $n(n+1)$ Coefficienten enthalten, die Grössen $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$ also $n(n+1)$ Gleichungen genügen müssen und die Anzahl dieser Grössen ebenfalls $n(n+1)$ ist, so werden sich dieselben den Bedingungen gemäss bestimmen lassen. Die Gleichungen I) sind dann Folgerungen der Gleichungen II) und umgekehrt, und letztere können daher als das Resultat einer Elimination aus ersteren betrachtet werden.

Aus der Bedingung *A* ergiebt sich:

$$\text{IV)}\quad \begin{array}{lcl} \alpha'_1 = a_1 & \text{also} & \alpha'_1 = a_1 \\ \alpha'_1 . \alpha_2 = a_2 & ,, & \alpha_2 = a_2 : \alpha'_1 \\ \alpha'_1 . \alpha_3 = a_3 & ,, & \alpha_3 = a_3 : \alpha'_1 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \alpha'_1 \alpha_n = a_n & ,, & \alpha_n = a_n : \alpha'_1 \\ \alpha'_1 \alpha_0 = a_0 & ,, & \alpha_0 = a_0 : \alpha'_1 . \end{array}$$

Die Gleichung (α) entsteht also aus (a), indem man diese durch ihren ersten Coefficienten dividirt.

Aus der Bedingung *B* folgt:

$$\text{V)}\quad \begin{array}{rcl} \alpha'_2 = b_1 & \text{also} & \alpha'_2 = b_1 \\ \alpha'_2\alpha_2 + \beta'_2 = b_2 & ,, & \beta'_2 = b_2 - \alpha'_2\alpha_2 \\ \alpha'_2\alpha_3 + \beta'_2\beta_3 = b_3 & ,, & \beta_3 = (b_3 - \alpha'_2\alpha_3) : \beta'_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha'_2\alpha_n + \beta'_2\beta_n = b_n & ,, & \beta_n = (b_n - \alpha'_2\alpha_n) : \beta'_2 \\ \alpha'_2\alpha_0 + \beta'_2\beta_0 = b_0 & ,, & \beta_0 = (b_0 - \alpha'_2\alpha_0) : \beta'_2 . \end{array}$$

Die Bedingung C liefert dann:

$$\text{VI)}\quad \begin{array}{rcl} \alpha'_3 = c_1 & \text{also} & \alpha'_3 = c_1 \\ \alpha'_3\alpha_2 + \beta'_3 = c_2 & ,, & \beta'_3 = c_2 - \alpha'_3\alpha_2 \\ \alpha'_3\alpha_3 + \beta'_3\beta_3 + \gamma'_3 = c_3 & ,, & \gamma'_3 = c_3 - \alpha'_3\alpha_3 - \beta'_3\beta_3 \\ \alpha'_3\alpha_4 + \beta'_3\beta_4 + \gamma'_3\gamma_4 = c_4 & ,, & \gamma_4 = (c_4 - \alpha'_3\alpha_4 - \beta'_3\beta_4) : \gamma'_3 \\ \alpha'_3\alpha_5 + \beta'_3\beta_5 + \gamma'_3\gamma_5 = c_5 & ,, & \gamma_5 = (c_5 - \alpha'_3\alpha_5 - \beta'_3\beta_5) : \gamma'_3 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha'_3\alpha_n + \beta'_3\beta_n + \gamma'_3\gamma_n = c_n & ,, & \gamma_n = (c_n - \alpha'_3\alpha_n - \beta'_3\beta_n) : \gamma'_3 \\ \alpha'_3\alpha_0 + \beta'_3\beta_0 + \gamma'_3\gamma_0 = c_0 & ,, & \gamma_0 = (c_0 - \alpha'_3\alpha_0 - \beta'_3\beta_0) : \gamma'_3 . \end{array}$$

U. s. w.

Von den Grössen α'_1, β'_2, γ'_3, δ'_4, ... darf hier keine gleich Null werden, da durch dieselben dividirt wird. Sollte dies irgendwo vorkommen, so muss man dem durch Aenderung der Reihenfolge der Unbekannten in den gegebenen Gleichungen abhelfen. Angenommen z. B., in obigen Gleichungen VI) (rechts) sei die rechte Seite der dritten Gleichung $= 0$, für γ'_3 werde also der Werth 0 erhalten. Dann wird, auch wenn man die letzte ausschliesst, wenigstens eine der folgenden Gleichungen auf der rechten Seite nicht 0 haben. Denn wenn in allen (etwa mit Ausnahme der letzten) der Klammerausdruck auf der rechten Seite $= 0$ wäre, so würde denselben genügt werden, wenn man $\gamma'_3 = \gamma_4 = \gamma_5 \ldots = \gamma_n = 0$ setzte. Dann würde aber die linke Seite der Gleichung (c) aus denjenigen der Gleichungen (α) und (β) allein linear zusammengesetzt sein; die Gleichungen (a), (b) und (c) wären also entweder nicht unabhängig von einander oder sie würden einen Widerspruch enthalten. Es möge also z. B. die Gleichung mit γ_5 auf der rechten Seite nicht 0 haben. Man wird dann in den Gleichungen I) die Reihenfolge so ändern, dass x_5 in die dritte Colonne kommt. In den Gleichungen II) wird entsprechend x_5 an die Stelle von x_3 gesetzt und in den Gleichungen VI) ebenfalls die erforderliche Vertauschung vorgenommen. Von den ausgeführten Rechnungen ist keine vergeblich gewesen.

Nach dem Multiplicationssatz für Determinanten von Cauchy ist:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ 0 & \beta'_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha'_1\beta'_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ 0 & \beta'_2 & \beta'_3 \\ 0 & 0 & \gamma'_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha'_1\beta'_2\gamma'_3$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 \\ 0 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 \\ 0 & 0 & \gamma'_3 & \gamma'_4 \\ 0 & 0 & 0 & \delta'_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 1 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha'_1 \beta'_2 \gamma'_3 \delta'_4$$

u. s. w.

Von den Grössen α'_1, β'_2, γ'_3, ... kann also nur dann eine $=0$ werden, wenn eine der Determinanten auf den linken Seiten vorstehender Gleichungen $=0$ ist*. Die gegebenen Gleichungen würden also so geordnet werden müssen, dass von jenen Determinanten keine $=0$ wird. Von vorn herein lässt sich jedoch nicht beurtheilen, welche Reihenfolge der Unbekannten dieser Bedingung etwa nicht entspricht. Im Allgemeinen wird derselben bei jeder Reihenfolge genügt sein.

§ 3. Das in § 2 beschriebene Eliminationsverfahren lässt sich in einer Weise übersichtlich darstellen, wie jetzt an einem System von sechs Gleichungen gezeigt werden soll. Die gegebenen Gleichungen seien

$$\begin{aligned}
a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + a_6 x_6 + a_0 &= 0 \\
b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 + b_6 x_6 + b_0 &= 0 \\
c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + c_5 x_5 + c_6 x_6 + c_0 &= 0 \\
d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4 + d_5 x_5 + d_6 x_6 + d_0 &= 0 \\
e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3 + e_4 x_4 + e_5 x_5 + e_6 x_6 + e_0 &= 0 \\
f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 + f_5 x_5 + f_6 x_6 + f_0 &= 0,
\end{aligned}$$

die durch die Elimination erhaltenen:

$$\begin{aligned}
x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \alpha_6 x_6 + \alpha_0 &= 0 \\
x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta_6 x_6 + \beta_0 &= 0 \\
x_3 + \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5 + \gamma_6 x_6 + \gamma_0 &= 0 \\
x_4 + \delta_5 x_5 + \delta_6 x_6 + \delta_0 &= 0 \\
x_5 + \varepsilon_6 x_6 + \varepsilon_0 &= 0 \\
x_6 + \zeta_0 &= 0
\end{aligned}$$

und die Eliminationscoefficienten:

$$\begin{matrix}
\alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 & \alpha'_5 & \alpha'_6 \\
 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 & \beta'_5 & \beta'_6 \\
 & & \gamma'_3 & \gamma'_4 & \gamma'_5 & \gamma'_6 \\
 & & & \delta'_4 & \delta'_5 & \delta'_6 \\
 & & & & \varepsilon'_5 & \varepsilon'_6 \\
 & & & & & \zeta'_6 .
\end{matrix}$$

Die Eliminationsrechnung kann nach dem Schema auf folgender Seite ausgeführt werden. Zwischen je zwei Doppellinien steht hier die Berechnung einer Zeile der Coefficienten der Eliminationsgleichungen α, β u. s. w. und einer Colonne der Eliminationscoefficienten α', β' u. s. w. Jede Zahlen-

---

* Man vergleiche die Verwandlung einer Determinante in ein Product zweier Determinanten in § 7 meiner Schrift: „Ausgleichung von Beobachtungsfehlern etc.“ Marburg, Elwert'sche Verlagshandlung, 1886.

colonne zwischen einer Doppellinie und der nächstfolgenden einfachen Linie enthält die Summanden einer Summe mit den links stehenden Vorzeichen; der erste Summand ist eine einfache Zahl, die übrigen sind Producte. Der Buchstabe *s* bedeutet das Resultat der Summation rechts von den punktirten Linien. Jede Summe *s* wird durch den rechts stehenden Divisor α'_1,

+	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_0	
		s	s	s	s	s	s	$:\alpha'_1$
	α'_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_0	
+	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_0	
−		$\alpha'_2\alpha_2$	$\alpha'_2\alpha_3$	$\alpha'_2\alpha_4$	$\alpha'_2\alpha_5$	$\alpha'_2\alpha_6$	$\alpha'_2\alpha_0$	
			s	s	s	s	s	$:\beta'_2$
	α'_2	β'_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_0	
+	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_0	
−		$\alpha'_3\alpha_2$	$\alpha'_3\alpha_3$	$\alpha'_3\alpha_4$	$\alpha'_3\alpha_5$	$\alpha'_3\alpha_6$	$\alpha'_3\alpha_0$	
−			$\beta'_3\beta_3$	$\beta'_3\beta_4$	$\beta'_3\beta_5$	$\beta'_3\beta_6$	$\beta'_3\beta_0$	
				s	s	s	s	$:\gamma'_3$
	α'_3	β'_3	γ'_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_0	
+	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_0	
−		$\alpha'_4\alpha_2$	$\alpha'_4\alpha_3$	$\alpha'_4\alpha_4$	$\alpha'_4\alpha_5$	$\alpha'_4\alpha_6$	$\alpha'_4\alpha_0$	
−			$\beta'_4\beta_3$	$\beta'_4\beta_4$	$\beta'_4\beta_5$	$\beta'_4\beta_6$	$\beta'_4\beta_0$	
−				$\gamma'_4\gamma_4$	$\gamma'_4\gamma_5$	$\gamma'_4\gamma_6$	$\gamma'_4\gamma_0$	
					s	s	s	$:\delta'_4$
	α'_4	β'_4	γ'_4	δ'_4	δ_5	δ_6	δ_0	
+	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_0	
−		$\alpha'_5\alpha_2$	$\alpha'_5\alpha_3$	$\alpha'_5\alpha_4$	$\alpha'_5\alpha_5$	$\alpha'_5\alpha_6$	$\alpha'_5\alpha_0$	
−			$\beta'_5\beta_3$	$\beta'_5\beta_4$	$\beta'_5\beta_5$	$\beta'_5\beta_6$	$\beta'_5\beta_0$	
−				$\gamma'_5\gamma_4$	$\gamma'_5\gamma_5$	$\gamma'_5\gamma_6$	$\gamma'_5\gamma_0$	
−					$\delta'_5\delta_5$	$\delta'_5\delta_6$	$\delta'_5\delta_0$	
						s	s	$:\varepsilon'_5$
	α'_5	β'_5	γ'_5	δ'_5	ε'_5	ε_6	ε_0	
+	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_0	
−		$\alpha'_6\alpha_2$	$\alpha'_6\alpha_3$	$\alpha'_6\alpha_4$	$\alpha'_6\alpha_5$	$\alpha'_6\alpha_6$	$\alpha'_6\alpha_0$	
−			$\beta'_6\beta_3$	$\beta'_6\beta_4$	$\beta'_6\beta_5$	$\beta'_6\beta_6$	$\beta'_6\beta_0$	
−				$\gamma'_6\gamma_4$	$\gamma'_6\gamma_5$	$\gamma'_6\gamma_6$	$\gamma'_6\gamma_0$	
−					$\delta'_6\delta_5$	$\delta'_6\delta_6$	$\delta'_6\delta_0$	
−						$\varepsilon'_6\varepsilon_6$	$\varepsilon'_6\varepsilon_0$	
							s	$:\zeta'_6$
	α'_6	β'_6	γ'_6	δ'_6	ε'_6	ζ_6	ζ_0	

β'_2, γ'_3 etc. dividirt. Das Resultat der Division ist die unter dem betreffenden s stehende Grösse α, β, γ etc. Links von den punktirten Linien liefert die Addition unmittelbar die unter den einzelnen Colonnen stehenden Grössen α', β', γ' etc. Gerechnet wird in jeder Horizontalspalte in der Reihenfolge von links nach rechts, wo dann immer die Zahlen, mit welchen man rechnet, entweder ursprünglich gegebene oder schon berechnete sind. Man kann jedoch auch nach den Vertikalreihen des Schemas rechnen, die gesuchten Grössen also in der Reihenfolge bestimmen: α'_1, α'_2, α'_3, α'_4, α'_5, α'_6, α_2, β'_2, β'_3, β'_4, β'_5, β'_6, α_3, β_3, γ'_3, γ'_4 u. s. w., wo man dann ebenfalls immer mit schon bekannten Zahlen zu rechnen hat. Endlich kann man auch in der Weise rechnen, dass man in folgender Zusammenstellung:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|l}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\scriptstyle 1} & \multicolumn{1}{c}{\scriptstyle 2} & \multicolumn{1}{c}{\scriptstyle 3} & \multicolumn{1}{c}{\scriptstyle 4\quad 5} & \\
\alpha'_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \ldots \\
\alpha'_2 & \beta'_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \ldots \\
\alpha'_3 & \beta'_3 & \gamma'_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 \ldots \\
\alpha'_4 & \beta'_4 & \gamma'_4 & \delta'_4 & \delta_5 & \delta_6 \ldots \\
\alpha'_5 & \beta'_5 & \gamma'_5 & \delta'_5 & \varepsilon'_5 & \varepsilon_6 \ldots \\
\alpha'_6 & \beta'_6 & \gamma'_6 & \delta'_6 & \varepsilon'_6 & \zeta'_6 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

in welcher die Grössen $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$ so geordnet sind, wie in dem Schema S. 261, diese Grössen in der Reihenfolge bestimmt, in welcher sie durch die gebrochenen Linien abgetheilt sind, also zuerst die Grössen zwischen den Linien 1 und 2, dann zwischen 2 und 3 u. s. w. So oft dann von den Grössen α', β', ... eine Anzahl der Colonnen von III) S. 258 (im Schema auf S. 261 sind dies die Zeilen) vollständig berechnet ist, ist auch eine um 1 kleinere Anzahl Colonnen der Grössen α, β, ... vollständig berechnet. Diese Reihenfolge verdient den Vorzug, wenn man die weiter unten zu beschreibenden Proberechnungen anwenden will.

Sollte es vorkommen, dass irgend eine der Grössen α'_1, β'_2, γ'_3, ..., also irgend einer der Eliminationscoefficienten, welche unmittelbar neben den punktirten Linien stehen, $=0$ wird, so muss in der bis dahin ausgeführten Rechnung die ganze (in der ersten Zeile a_1, a_2, a_3, ... beginnende) Colonne, zu welcher die $=0$ gewordene Summe gehört, mit irgend einer späteren Colonne vertauscht werden, in welcher eine von 0 verschiedene Summe erhalten wird. Dementsprechend müssen dann auch in den Eliminationsgleichungen die zugehörigen beiden Unbekannten vertauscht werden.

Wie aus obigem Schema zu ersehen ist, besteht die Rechnung (die Zahl der Gleichungen wieder allgemein $=n$ gesetzt) aus

$$n(n-1)+(n-1)(n-2)\ldots+2\cdot 1=\frac{n(n^2-1)}{3}$$

Multiplicationen,

$$n+(n-1)+(n-2)\ldots+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

Divisionen und, falls man eine Summe von p Summanden als durch $(p-1)$-malige Addition von jedesmal zwei Summanden erhalten betrachtet, aus

links von den punktirten Linien:	rechts von den punktirten Linien:
1	$+(n-1)\cdot 1$
$+1+2$	$+(n-2)\cdot 2$
$+1+2+3$	$+(n-3)\cdot 3$
. . . .	. . . .
$+1+2+3+4\ldots+(n-1)$	$+(n-[n-1])\cdot(n-1)$

$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Additionen.

Die Zahl der Multiplicationen und der Divisionen zusammen ist

$$=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

stimmt also überein mit der Zahl der Divisionen in § 1. Die Zahl der Additionen ist derjenigen in § 1 ebenfalls gleich.

Wenn man demnach hinsichtlich des Zeitaufwandes zwischen Multiplication und Division und ebenso zwischen der Addition von z. B. zehn Summanden und neun Additionen von je zwei Summanden keinen Unterschied macht, so ist der Umfang der Rechenarbeit in § 2 genau derselbe wie in § 1. In Wirklichkeit ist jedoch eine Addition von p Summanden eine erheblich einfachere Rechnung, als $(p-1)$ Additionen von je zwei Summanden und, falls man nicht mit Logarithmen rechnet, erfordert auch das Multipliciren zweier Zahlen weniger Zeit, als das Dividiren. Ueberdies wird durch das Verfahren in § 2 eine Menge Schreibarbeit erspart, so dass dasselbe vor demjenigen in § 1 wesentliche Vorzüge besitzt.

§ 4. In folgender Gleichung

$$\begin{aligned}
&a_1\xi_1x_1+a_2\xi_1x_2+a_3\xi_1x_3\ldots+a_n\xi_1x_n+a_0\xi_1\cdot 1\\
&+b_1\xi_2x_1+b_2\xi_2x_2+b_3\xi_2x_3\ldots+b_n\xi_2x_n+b_0\xi_2\cdot 1\\
&+c_1\xi_3x_1+c_2\xi_3x_2+c_3\xi_3x_3\ldots+c_n\xi_3x_n+c_0\xi_3\cdot 1\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\text{VII)}\quad&+t_1\xi_nx_1+t_2\xi_nx_2+t_3\xi_nx_3\ldots+t_n\xi_nx_n+t_0\xi_n\cdot 1\\
&=(\alpha'_1\xi_1+\alpha'_2\xi_2+\alpha'_3\xi_3\ldots+\alpha'_n\xi_n)(x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3\ldots+\alpha_nx_n+\alpha_0\cdot 1)\\
&+(\beta'_2\xi_2+\beta'_3\xi_3\ldots+\beta'_n\xi_n)(x_2+\beta_3x_3\ldots+\beta_nx_n+\beta_0\cdot 1)\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&+\tau'_n\xi_n\cdot(x_n+\tau_0\cdot 1)
\end{aligned}$$

ist die Function der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ auf der linken Seite dadurch erhalten, dass die Gleichungen I) in § 2, nachdem die erste mit ξ_1, die zweite mit $\xi_2, \ldots$, die n^{te} mit ξ_n multiplicirt war, addirt wurden. Die rechte Seite ist in ersichtlicher Weise zusammengesetzt aus den linearen Ausdrücken in den Gleichungen II) S. 258 und ähnlichen homogenen linearen Ausdrücken, deren Coefficienten die Eliminationscoefficienten III) sind. Ordnet man die rechte Seite in derselben Weise wie die linke und setzt dann beiderseits die Coefficienten gleichnamiger Glieder einander gleich, so erhält man genau die Gleichungen IV), V), VI) u. s. w., aus welchen in § 2 die Grössen $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$ bestimmt wurden. Man kann also die dort beschriebene Rechnung auch als die Verwandlung der quadratischen Function in obiger Gleichung links in diejenige rechts betrachten. Aber nicht blos die zu dem in § 2 beschriebenen Eliminationsverfahren gehörige Rechnung, sondern auch die Begründung desselben lässt sich aus obiger Gleichung VII) ableiten. Sind nämlich die Grössen $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$ in der angegebenen Weise bestimmt, so ist die Gleichung VII) in Bezug auf die Veränderlichen x und ξ eine identische. Man setze nun für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diejenigen Werthe, welche den Gleichungen II) genügen. Dann ist die rechte Seite von VII) für beliebige Werthe der $\xi = 0$, weil in jedem von den Producten ein Factor $= 0$ ist. Mithin muss auch die linke Seite in Bezug auf die ξ identisch $= 0$ sein. Dieselbe ist aber

$$\begin{aligned} &= \xi_1(a_1 x_1 + a_2 x_2 \ldots + a_n x_n + a_0) \\ &+ \xi_2(b_1 x_1 + b_2 x_2 \ldots + b_n x_n + b_0) \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \xi_n(t_1 x_1 + t_2 x_2 \ldots + t_n x_n + t_0), \end{aligned}$$

kann also nur dann für beliebige Werthe der ξ verschwinden, wenn die Ausdrücke in den Klammern einzeln $= 0$ sind, d. h. wenn die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auch den Gleichungen I) in § 2 genügen. Die Gleichungen I) sind somit Folgerungen aus den Gleichungen II) und letztere sind daher als das Resultat einer Elimination aus ersteren zu betrachten. Zugleich lässt sich aus den Gleichungen VII) eine sehr geeignete Proberechnung ableiten, durch welche die Rechnung nicht blos am Schlusse, sondern auch während des Verlaufs derselben controlirt werden kann. Die Grössen α, $\beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$ müssen dann nach der dritten, S. 262 angegebenen Reihenfolge berechnet werden. Man sei z. B. mit der Rechnung bis zu der gebrochenen Linie 4, S. 262 gekommen. Dann sind also von den Eliminationscoefficienten III) S. 258, sowie von den Coefficienten der Gleichungen II) (den von x_1 mitgezählt) die vier ersten Colonnen bekannt. Setzt man also jetzt statt 1 eine Veränderliche x_0 und dann $x_5 = x_6 \ldots = x_n = x_0 = \xi_5 = \xi_6 \ldots = \xi_n = 0$, so verschwinden in der Gleichung VII) sämmtliche Glieder mit noch nicht bekannten Coefficienten. Der noch übrige Theil der Gleichung aber muss auf beiden Seiten gleiche Werthe liefern, wenn man für die noch

übrigen Veränderlichen beliebige Werthe, am einfachsten +1 oder −1 setzt. Nimmt man z. B. diese Grössen sämmtlich =+1, so wird die Gleichung:

$$\begin{aligned} & a_1+a_2+a_3+a_4 \\ & +b_1+b_2+b_3+b_4 \\ & +c_1+c_2+c_3+c_4 \\ & +d_1+d_2+d_3+d_4 \\ = & (\alpha'_1+\alpha'_2+\alpha'_3+\alpha'_4)(1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) \\ & +(\beta'_2+\beta'_3+\beta'_4)(1+\beta_3+\beta_4) \\ & +(\gamma'_3+\gamma'_4)(1+\gamma_4) \\ & +\delta'_4. \end{aligned}$$

Diese Probe erstreckt sich über die ganze bis dahin ausgeführte Rechnung. Rechnet man jetzt bis zur fünften gebrochenen Linie (S. 262), so kann man bei der dann auszuführenden Proberechnung einen Theil der obigen, nämlich die stattgefundenen Additionen wieder benutzen. Nur die Multiplicationen müssen bei jeder Probe von Neuem ausgeführt werden.

§ 5. Sind die aufzulösenden Gleichungen von der Beschaffenheit, dass die Coefficienten der Unbekannten ein zur Diagonale symmetrisches Zahlenquadrat bilden, so führt das in § 2 beschriebene Eliminationsverfahren für je zwei zur Diagonale symmetrische Coefficienten zu zwei ganz übereinstimmenden Rechnungen, von welchen also dann nur eine ausgeführt zu werden braucht. Um dies zu erkennen, dürfen die Eliminationscoefficienten nicht, wie in § 2, sämmtlich als neue Grössen mit einzelnen Buchstaben bezeichnet werden, sondern es darf dies nur bei einem Theil derselben geschehen, während die übrigen aus diesen und den Coefficienten der Eliminationsgleichungen zusammengesetzt werden müssen.

Es seien z. B. die Gleichungen aufzulösen:

$$\text{VIII)}\qquad \begin{aligned} A_1v+B_1w+C_1x+D_1y+E_1z+F_1&=0 \\ B_1v+B_2w+C_2x+D_2y+E_2z+F_2&=0 \\ C_1v+C_2w+C_3x+D_3y+E_3z+F_3&=0 \\ D_1v+D_2w+D_3x+D_4y+E_4z+F_4&=0 \\ E_1v+E_2w+E_3x+E_4y+E_5z+F_5&=0. \end{aligned}$$

Die Eliminationsgleichungen seien:

$$\text{IX)}\qquad \begin{aligned} v+b_1w+c_1x+d_1y+e_1z+f_1&=0 \\ w+c_2x+d_2y+e_2z+f_2&=0 \\ x+d_3y+e_3z+f_3&=0 \\ y+e_4z+f_4&=0 \\ z+f_5&=0. \end{aligned}$$

Die Eliminationscoefficienten werden jetzt in folgender Weise dargestellt:

$$\text{X)}\quad \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_1 b_1 & \alpha_1 c_1 & \alpha_1 d_1 & \alpha_1 e_1 \\ & \beta_2 & \beta_2 c_2 & \beta_2 d_2 & \beta_2 e_2 \\ & & \gamma_3 & \gamma_3 d_3 & \gamma_3 e_3 \\ & & & \delta_4 & \delta_4 e_4 \\ & & & & \varepsilon_5 . \end{array}$$

Von denselben sind also blos α_1, β_2, γ_3, δ_4, ε_5 neu eingeführte, unabhängige Grössen; die übrigen sind Producte aus diesen und den Coefficienten der Eliminationsgleichungen. Die Eliminationscoefficienten und die Coefficienten der Eliminationsgleichungen werden nun den nämlichen Bedingungen gemäss bestimmt, wie in § 2. Multiplicirt man also die ersten n der Gleichungen IX) mit den n Eliminationscoefficienten, welche in der n^{ten} Colonne von X) stehen, und zwar jede Gleichung mit dem in der gleich nummerirten Zeile stehenden, und addirt, so muss die n^{te} der Gleichungen VIII) erhalten werden. Die Gleichungen, welche sich hieraus zur Bestimmung der Grössen b_1, c_1, ..., α_1, β_2, ... ergeben, sind folgende:

$$\begin{array}{l|l|l} \alpha_1 = A_1 & \alpha_1 b_1 = B_1 & \alpha_1 c_1 = C_1 \\ \alpha_1 b_1 = B_1 & \alpha_1 b_1 b_1 + \beta_2 = B_2 & \alpha_1 c_1 b_1 + \beta_2 c_2 = C_2 \\ \alpha_1 c_1 = C_1 & \alpha_1 b_1 c_1 + \beta_2 c_2 = C_2 & \alpha_1 c_1 c_1 + \beta_2 c_2 c_2 + \gamma_3 = C_3 \\ \alpha_1 d_1 = D_1 & \alpha_1 b_1 d_1 + \beta_2 d_2 = D_2 & \alpha_1 c_1 d_1 + \beta_2 c_2 d_2 + \gamma_3 d_3 = D_3 \\ \alpha_1 e_1 = E_1 & \alpha_1 b_1 e_1 + \beta_2 e_2 = E_2 & \alpha_1 c_1 e_1 + \beta_2 c_2 e_2 + \gamma_3 e_3 = E_3 \\ \alpha_1 f_1 = F_1 & \alpha_1 b_1 f_1 + \beta_2 f_2 = F_2 & \alpha_1 c_1 f_1 + \beta_2 c_2 f_2 + \gamma_3 f_3 = F_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 d_1 = D_1 \\ \alpha_1 d_1 b_1 + \beta_2 d_2 = D_2 \\ \alpha_1 d_1 c_1 + \beta_2 d_2 c_2 + \gamma_3 d_3 = D_3 \\ \alpha_1 d_1 d_1 + \beta_2 d_2 d_2 + \gamma_3 d_3 d_3 + \delta_4 = D_4 \\ \alpha_1 d_1 e_1 + \beta_2 d_2 e_2 + \gamma_3 d_3 e_3 + \delta_4 e_4 = E_4 \\ \alpha_1 d_1 f_1 + \beta_2 d_2 f_2 + \gamma_3 d_3 f_3 + \delta_4 f_4 = F_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 e_1 = E_1 \\ \alpha_1 e_1 b_1 + \beta_2 e_2 = E_2 \\ \alpha_1 e_1 c_1 + \beta_2 e_2 c_2 + \gamma_3 e_3 = E_3 \\ \alpha_1 e_1 d_1 + \beta_2 e_2 d_2 + \gamma_3 e_3 d_3 + \delta_4 e_4 = E_4 \\ \alpha_1 e_1 e_1 + \beta_2 e_2 e_2 + \gamma_3 e_3 e_3 + \delta_4 e_4 e_4 + \varepsilon_5 = E_5 \\ \alpha_1 e_1 f_1 + \beta_2 e_2 f_2 + \gamma_3 e_3 f_3 + \delta_4 e_4 f_4 + \varepsilon_5 f_5 = F_5 . \end{array}$$

Von diesen Gleichungen stimmen je zwei, welche auf der rechten Seite übereinstimmen, auch auf der linken überein. Lässt man von je zwei solchen Gleichungen eine fort, so erhält man in jeder der übrigbleibenden das unmittelbar vor dem Gleichheitszeichen stehende Glied, indem man die übrigen Glieder links mit negativen Zeichen zu der Grösse rechts addirt, worauf Division durch α_1, β_2, ... einen der Coefficienten der Eliminationsgleich-

ungen liefert. Diese Rechnung ist im folgenden Schema übersichtlich dargestellt:

XI)

+	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	
	α_1	$\alpha_1 b_1$	$\alpha_1 c_1$	$\alpha_1 d_1$	$\alpha_1 e_1$	$\alpha_1 f_1$	$:\alpha_1$
	1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	
+		B_2	C_2	D_2	E_2	F_2	
−		$\alpha_1 b_1 b_1$	$\alpha_1 b_1 c_1$	$\alpha_1 b_1 d_1$	$\alpha_1 b_1 e_1$	$\alpha_1 b_1 f_1$	
		β_2	$\beta_2 c_2$	$\beta_2 d_2$	$\beta_2 e_2$	$\beta_2 f_2$	$:\beta_2$
		1	c_2	d_2	e_2	f_2	
+			C_3	D_3	E_3	F_3	
−			$\alpha_1 c_1 c_1$	$\alpha_1 c_1 d_1$	$\alpha_1 c_1 e_1$	$\alpha_1 c_1 f_1$	
−			$\beta_2 c_2 c_2$	$\beta_2 c_2 d_2$	$\beta_2 c_2 e_2$	$\beta_2 c_2 f_2$	
			γ_3	$\gamma_3 d_3$	$\gamma_3 e_3$	$\gamma_3 f_3$	$:\gamma_3$
			1	d_3	e_3	f_3	
+				D_4	E_4	F_4	
−				$\alpha_1 d_1 d_1$	$\alpha_1 d_1 e_1$	$\alpha_1 d_1 f_1$	
−				$\beta_2 d_2 d_2$	$\beta_2 d_2 e_2$	$\beta_2 d_2 f_2$	
−				$\gamma_3 d_3 d_3$	$\gamma_3 d_3 e_3$	$\gamma_3 d_3 f_3$	
				δ_4	$\delta_4 e_4$	$\delta_4 f_4$	$:\delta_4$
				1	e_4	f_4	
+					E_5	F_5	
−					$\alpha_1 e_1 e_1$	$\alpha_1 e_1 f_1$	
−					$\beta_2 e_2 e_2$	$\beta_2 e_2 f_2$	
−					$\gamma_3 e_3 e_3$	$\gamma_3 e_3 f_3$	
−					$\delta_4 e_4 e_4$	$\delta_4 e_4 f_4$	
					ε_5	$\varepsilon_5 f_5$	$:\varepsilon_5$
					1	f_5	

Zwischen jeder Doppellinie und der nächstfolgenden einfachen Linie enthält hier jede Colonne die Summanden einer Summe mit den links stehenden Vorzeichen. Es sind dies diejenigen Summen, welche in obigen Gleichungen nach der Transposition auf der rechten Seite erscheinen. Das Resultat der Addition, also die Grösse unmittelbar vor den Gleichheitszeichen, steht unter der Colonne. Diese Grössen werden noch durch die rechts stehenden Divisoren dividirt und das Resultat steht dann jedesmal unter dem betreffenden Dividenden. Diese Quotienten sind die gesuchten Coefficienten der Eliminationsgleichungen.

In dem Schema XI) kann man jetzt noch die in X) als Producte aus zwei Grössen sich darstellenden Eliminationscoefficienten durch einzelne Buchstaben bezeichnen und zwar in zweierlei Weise, wodurch man dasselbe in einer der folgenden beiden Formen XII) und XIII) erhält.

XII)

+	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	
	α_1	β_1	γ_1	δ_1	ε_1	ζ_1	$:\alpha_1$
	1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	
+		B_2	C_2	D_2	E_2	F_2	
−		$\beta_1 b_1$	$\beta_1 c_1$	$\beta_1 d_1$	$\beta_1 e_1$	$\beta_1 f_1$	
		β_2	γ_2	δ_2	ε_2	ζ_2	$:\beta_2$
		1	c_2	d_2	e_2	f_2	
+			C_3	D_3	E_3	F_3	
−			$\gamma_1 c_1$	$\gamma_1 d_1$	$\gamma_1 e_1$	$\gamma_1 f_1$	
−			$\gamma_2 c_2$	$\gamma_2 d_2$	$\gamma_2 e_2$	$\gamma_2 f_2$	
			γ_3	δ_3	ε_3	ζ_3	$:\gamma_3$
			1	d_3	e_3	f_3	
+				D_4	E_4	F_4	
−				$\delta_1 d_1$	$\delta_1 e_1$	$\delta_1 f_1$	
−				$\delta_2 d_2$	$\delta_2 e_2$	$\delta_2 f_2$	
−				$\delta_3 d_3$	$\delta_3 e_3$	$\delta_3 f_3$	
				δ_4	ε_4	ζ_4	$:\delta_4$
				1	e_4	f_4	
+					E_5	F_5	
−					$\varepsilon_1 e_1$	$\varepsilon_1 f_1$	
−					$\varepsilon_2 e_2$	$\varepsilon_2 f_2$	
−					$\varepsilon_3 e_3$	$\varepsilon_3 f_3$	
−					$\varepsilon_4 e_4$	$\varepsilon_4 f_4$	
					ε_5	ζ_5	$:\varepsilon_5$
					1	f_5	

XIII)

+	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	
	α_1	β_1	γ_1	δ_1	ε_1	ζ_1	$:\alpha_1$
	1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	
+		B_2	C_2	D_2	E_2	F_2	
−		$b_1\beta_1$	$b_1\gamma_1$	$b_1\delta_1$	$b_1\varepsilon_1$	$b_1\zeta_1$	
		β_2	γ_2	δ_2	ε_2	ζ_2	$:\beta_2$
		1	c_2	d_2	e_2	f_2	
+			C_3	D_3	E_3	F_3	
−			$c_1\gamma_1$	$c_1\delta_1$	$c_1\varepsilon_1$	$c_1\zeta_1$	
−			$c_2\gamma_2$	$c_2\delta_2$	$c_2\varepsilon_2$	$c_2\zeta_2$	
			γ_3	δ_3	ε_3	ζ_3	$:\gamma_3$
			1	d_3	e_3	f_3	
+				D_4	E_4	F_4	
−				$d_1\delta_1$	$d_1\varepsilon_1$	$d_1\zeta_1$	
−				$d_2\delta_2$	$d_2\varepsilon_2$	$d_2\zeta_2$	
−				$d_3\delta_3$	$d_3\varepsilon_3$	$d_3\zeta_3$	
				δ_4	ε_4	ζ_4	$:\delta_4$
				1	e_4	f_4	
+					E_5	F_5	
−					$e_1\varepsilon_1$	$e_1\zeta_1$	
−					$e_2\varepsilon_2$	$e_2\zeta_2$	
−					$e_3\varepsilon_3$	$e_3\zeta_3$	
−					$e_4\varepsilon_4$	$e_4\zeta_4$	
					ε_5	ζ_5	$:\varepsilon_5$
					1	f_5	

Welche Grössen in dem Schema XI) hier in XII) und XIII) mit β_1, $\gamma_1, \ldots, \gamma_2, \delta_2, \ldots$ u. s. w. bezeichnet sind, ist durch Vergleichung von XII) und XIII) mit XI) leicht zu ersehen.

Gleichungen obiger Art erhält man bei der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern nach der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate. Ein besonderes Verfahren zur Elimination aus diesen Gleichungen hat Gauss in der „Disquisitio de elementis ellipticis Palladis etc.“ gezeigt. Die Rechnung nach obigem Schema wird nun hinsichtlich des Umfangs der Rechenarbeit mit dem Gauss'schen Verfahren im Wesentlichen übereinstimmen. Das Rechnen nach obigem Schema ist jedoch übersichtlicher und es wird dadurch das Hinschreiben einer grossen Zahl überflüssiger Gleichungen vermieden.

§ 6. Wendet man auf die Gleichungen VIII), die zugehörigen Eliminationsgleichungen IX) und die Eliminationscoefficienten X) die Gleichung VII) an, indem man v', w', x', y', z' an die Stelle von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ und u statt 1 setzt, so wird dieselbe

$$\begin{aligned}
&A_1\, v'v + B_1\, v'w + C_1\, v'x + D_1\, v'y + E_1\, v'z + F_1\, v'u \\
&+ B_1\, w'v + B_2\, w'w + C_2\, w'x + D_2\, w'y + E_2\, w'z + F_2\, w'u \\
&+ C_1\, x'v + C_2\, x'w + C_3\, x'x + D_3\, x'y + E_3\, x'z + F_3\, x'u \\
&+ D_1\, y'v + D_2\, y'w + D_3\, y'x + D_4\, y'y + E_4\, y'z + F_4\, y'u \\
&+ E_1\, z'v + E_2\, z'w + E_3\, z'x + E_4\, z'y + E_5\, z'z + F_5\, z'u \\
= &(\alpha_1 v' + \alpha_1 b_1 w' + \alpha_1 c_1 x' + \alpha_1 d_1 y' + \alpha_1 e_1 z')(v + b_1 w + c_1 x + d_1 y + e_1 z + f_1 u) \\
&+ (\beta_2 w' + \beta_2 c_2 x' + \beta_2 d_2 y' + \beta_2 e_2 z')(w + c_2 x + d_2 y + e_2 z + f_2 u) \\
&+ (\gamma_3 x' + \gamma_3 d_3 y' + \gamma_3 e_3 z')(x + d_3 y + e_3 z + f_3 u) \\
&+ (\delta_4 y' + \delta_4 e_4 z')(y + e_4 z + f_4 u) \\
&+ \varepsilon_5 z'.(z + f_5 u)
\end{aligned}$$

oder

$$\text{XIV)}\quad \begin{aligned}
&A_1\, v'v + B_1\, v'w + C_1\, v'x + D_1\, v'y + E_1\, v'z + F_1\, v'u \\
&+ B_1\, w'v + B_2\, w'w + C_2\, w'x + D_2\, w'y + E_2\, w'z + F_2\, w'u \\
&+ C_1\, x'v + C_2\, x'w + C_3\, x'x + D_3\, x'y + E_3\, x'z + F_3\, x'u \\
&+ D_1\, y'v + D_2\, y'w + D_3\, y'x + D_4\, y'y + E_4\, y'z + F_4\, y'u \\
&+ E_1\, z'v + E_2\, z'w + E_3\, z'x + E_4\, z'y + E_5\, z'z + F_5\, z'u \\
= &\,\alpha_1 (v' + b_1 w' + c_1 x' + d_1 y' + e_1 z')(v + b_1 w + c_1 x + d_1 y + e_1 z + f_1 u) \\
&+ \beta_2 (w' + c_2 x' + d_2 y' + e_2 z')(w + c_2 x + d_2 y + e_2 z + f_2 u) \\
&+ \gamma_3 (x' + d_3 y' + e_3 z')(x + d_3 y + e_3 z + f_3 u) \\
&+ \delta_4 (y' + e_4 z')(y + e_4 z + f_4 u) \\
&+ \varepsilon_5 z'(z + f_5 u).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nun ebenfalls in Bezug auf die Veränderlichen v, $w, \ldots, v', w', \ldots$ eine identische und kann daher in derselben Weise, wie S. 264 gezeigt worden, zu Proberechnungen benutzt werden. Jedoch müssen dann in dem Schema XII) oder XIII) die Coefficienten der Eliminationsgleichungen nicht zeilen- sondern colonnenweise berechnet werden. Da hierbei, mit Ausnahme der letzten Proberechnung nach Bestimmung von f_1, $f_2, \ldots$, die Veränderliche u stets $=0$, die übrigen zum Theil $=0$, zum Theil $=1$ gesetzt werden, so hat man rechts eine Summe von Quadraten. multiplicirt mit den Grössen $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3, \ldots$

§ 7. Setzt man in der Gleichung XIV) $v'=v$, $w'=w$, $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$, so wird dieselbe

$$\text{XV)}\quad \begin{aligned}
&A_1\, v^2 + B_1\, vw + C_1\, vx + D_1\, vy + E_1\, vz + F_1\, vu \\
&+ B_1\, wv + B_2\, w^2 + C_2\, wx + D_2\, wy + E_2\, wz + F_2\, wu \\
&+ C_1\, xv + C_2\, xw + C_3\, x^2 + D_3\, xy + E_3\, xz + F_3\, xu \\
&+ D_1\, yv + D_2\, yw + D_3\, yx + D_4\, y^2 + E_4\, yz + F_4\, yu \\
&+ E_1\, zv + E_2\, zw + E_3\, zx + E_4\, zy + E_5\, z^2 + F_5\, zu
\end{aligned}$$

$$= \alpha_1(v+b_1w+c_1x+d_1y+e_1z)(v+b_1w+c_1x+d_1y+e_1z+f_1u)$$
$$+\beta_2(w+c_2x+d_2y+e_2z)(w+c_2x+d_2y+e_2z+f_2u)$$
$$+\gamma_3(x+d_3y+e_3z)(x+d_3y+e_3z+f_3u)$$
$$+\delta_4(y+e_4z)(y+e_4z+f_4u)$$
$$+\varepsilon_5 z(z+f_5u).$$

Es seien nun

$$\text{XVI)}\qquad \begin{aligned} m_1v+n_1w+p_1x+q_1y+r_1z+s_1u &= \varphi_1 \\ m_2v+n_2w+p_2x+q_2y+r_2z+s_2u &= \varphi_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ m_\nu v+n_\nu w+p_\nu x+q_\nu y+r_\nu z+s_\nu u &= \varphi_\nu \end{aligned}$$

die Fehlergleichungen eines Ausgleichungsproblems, wo also $v, w, \ldots, z$ so bestimmt werden sollen, dass für $u=1$

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+\ldots+\varphi_\nu^2$$

ein Minimum wird. Die in bekannter Weise erhaltenen Bedingungen dieses Minimums mögen die Gleichungen VIII) sein, also

$$\text{XVII)}\qquad \begin{aligned} A_1v+B_1w+C_1x+D_1y+E_1z+F_1u &= P_1 \\ B_1v+B_2w+C_2x+D_2y+E_2z+F_2u &= P_2 \\ C_1v+C_2w+C_3x+D_3y+E_3z+F_3u &= P_3 \\ D_1v+D_2w+D_3x+D_4y+E_4z+F_4u &= P_4 \\ E_1v+E_2w+E_3x+E_4y+E_5z+F_5u &= P_5 \end{aligned}$$

wenn hier $u=1$ und $P_1=P_2\ldots=P_5=0$ gesetzt wird. Dann ist

$$\text{XVIII)}\qquad \begin{aligned} &P_1v+P_2w+P_3x+P_4y+P_5z \\ &= \varphi_1^2+\varphi_2^2+\ldots+\varphi_\nu^2-(s_1u\varphi_1+s_2u\varphi_2+\ldots+s_\nu u\varphi_\nu) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &P_1v+P_2w+P_3x+P_4y+P_5z \\ &= \varphi_1(\varphi_1-s_1u)+\varphi_2(\varphi_2-s_2u)+\ldots+(\varphi_\nu-s_\nu u). \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung stimmt überein mit derjenigen von XV); also sind auch die rechten Seiten gleich, d. h. es ist, wenn man zugleich statt $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die Werthe aus XVI) setzt:

$$\text{XIX)}\qquad \begin{aligned} &\alpha_1(v+b_1w+c_1x+d_1y+e_1z)(v+b_1w+c_1x+d_1y+e_1z+f_1u) \\ &+\beta_2(w+c_2x+d_2y+e_2z)(w+c_2x+d_2y+e_2z+f_2u) \\ &+\gamma_3(x+d_3y+e_3z)(x+d_3y+e_3z+f_3u) \\ &+\delta_4(y+e_4z)(y+e_4z+f_4u) \\ &+\varepsilon_5 z(z+f_5u) \\ &=(m_1v+n_1w+p_1x+q_1y+r_1z)(m_1v+n_1w+p_1x+q_1y+r_1z-s_1u) \\ &+(m_2v+n_2w+p_2x+q_2y+r_2z)(m_2v+n_2w+p_2x+q_2y+r_2z-s_2u) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+(m_\nu v+n_\nu w+p_\nu x+q_\nu y+r_\nu z)(m_\nu v+n_\nu w+p_\nu x+q_\nu y+r_\nu z-s_\nu u). \end{aligned}$$

Diese identische Gleichung kann jetzt ebenfalls in der früher angegebenen Weise zu Proberechnungen angewandt werden, so oft eine Colonne der Coefficienten der Eliminationsgleichungen vollständig berechnet ist. Diese

Probe erstreckt sich nicht blos auf die richtige Elimination aus den Gleichungen VIII), sondern auch auf die richtige Herleitung dieser Gleichungen aus den Fehlergleichungen.

Berechnet man aus den resultirenden Gleichungen die Grössen v, w, x, y, z und setzt die Werthe derselben in Gleichung XIX) ein ($u = 1$), so wird die linke, mithin auch die rechte Seite $= 0$. Da nun letztere [gleich der rechten Seite der Gleichung XVIII)] um

$$s_1 u \varphi_1 + s_2 u \varphi_2 + \ldots + s_\nu u \varphi_\nu$$

kleiner ist als die Summe der Fehlerquadrate, so ist das Minimum der Quadratsumme

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_\nu^2$$

gleich dem Ausdruck (u ist $= 1$):

$$s_1 \varphi_1 + s_2 \varphi_2 + \ldots + s_\nu \varphi_\nu,$$

wenn hier in $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ für v, w, ... die gefundenen Werthe gesetzt werden.

XV.

Zur Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante.

Von

J. Vivanti

in Mantua.

---

1. Eine binäre quadratische Form (A, B, C), deren Determinante D positiv und keine Quadratzahl ist*, heisst reducirt, wenn (Gauss, Disqu. Ar. 183):

$$\sqrt{D} - B < \text{mod.}\, A < \sqrt{D} + B,$$
$$0 < B < \sqrt{D}.$$

Dann ist auch (*l. c.* 184):

$$AC < 0,$$
$$\sqrt{D} - B < \text{mod.}\, C < \sqrt{D} + B.$$

2. Theorem. Eine Form $(a, b, -c)$ von der Determinante D, wo a, b positiv sind und $c = a + b$, ist jedenfalls eine reducirte Form.

Man muss nämlich beweisen, dass:

$$b < \sqrt{D}, \quad \sqrt{D} - b < a < \sqrt{D} + b.$$

Aus

$$D = b^2 + ac = b^2 + ab + a^2$$

folgt:

$$b < \sqrt{D}$$

und

α)
$$a < \sqrt{D}$$

oder

$$a + b < \sqrt{D} + b;$$

da aber

$$a(a+b) = D - b^2 = (\sqrt{D} + b)(\sqrt{D} - b),$$

muss

$$a < \sqrt{D} - b$$

sein.

Aus α) folgt *a fortiori*

---

* Um Wiederholungen zu vermeiden, werden wir immer stillschweigend voraussetzen, dass D diesen Bedingungen genügt.

$$a < \sqrt{D} + b,$$

womit alle unsere Behauptungen bewiesen sind.

3. Wir werden eine Form $(a, b, -c)$, wo a, b positiv sind und $c = a + b$, der Kürze wegen eine Nullform nennen. Demnach lautet der obere Satz: Jede Nullform ist reducirt.

4. Theorem. Aus jeder Nullform $(a, b, -c)$ erhält man durch Umsetzung der Coefficienten a, b eine neue Nullform $(b, a, -c)$. Die zwei Formen $(a, b, -c)$, $(b, a, -c)$ gehören zu einer und derselben Determinante.

Die erste Behauptung ist evident. Zum Beweise des zweiten Theiles des Satzes braucht man nur zu bemerken, dass

$$D = b^2 + ac = b^2 + ab + a^2 = bc + a^2.$$

Wir werden die Nullformen $(a, b, -c)$, $(b, a, -c)$ reciprok nennen.

5. Theorem. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Vorkommen von Nullformen im reducirten Formensystem von der Determinante D ist, dass bei der Zerlegung von D in Primfactoren der Factor 2 und die Primzahlen von der Form $6n + 5$ mit geraden Exponenten (0 eingeschlossen) auftreten.

a) Es muss sein:

$$\alpha)\qquad D = a^2 + ab + b^2.$$

Ist D gerade, so müssen offenbar a und b gleichfalls gerade sein, und folglich ist D durch 4 theilbar. Setzt man nun

$$\frac{D}{4} = D_1, \quad \frac{a}{2} = a_1, \quad \frac{b}{2} = b_1,$$

so folgt:

$$D_1 = a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2.$$

Durch Wiederholung derselben Schlussweise zeigt man, dass, wenn die Zahl D_1 durch 2 theilbar ist, sie durch 4 theilbar sein muss. Indem man so fortfährt, sieht man ein, dass D nicht durch 2^{2m-1} theilbar sein kann, ohne durch 2^{2m} theilbar zu sein.

b) Aus α) folgt:

$$\beta)\qquad 2D = 2a^2 + 2ab + 2b^2.$$

Die Zahl $2D$ muss also durch die Form $(2, 1, 2)$ von der negativen Determinante -3 darstellbar sein. Solcher Darstellungen giebt es zweierlei; es können nämlich a, b entweder relative Primzahlen sein, oder einen gemeinschaftlichen Theiler d zulassen. Im letzten Falle ist $2D$ durch d^2 theilbar; und aus jeder Darstellung von der zweiten Art entsteht eine Darstellung von $\frac{2D}{d^2}$:

$$\frac{2D}{d^2}=2\left(\frac{a}{d}\right)^2+2\frac{a}{d}\frac{b}{d}+\left(\frac{b}{d}\right)^2,$$

wo $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$ relative Primzahlen sind.

Bezeichnen wir allgemein durch Δ eine von den Zahlen $2D$, $\frac{2D}{d^2}$. Zur Darstellbarkeit von 2Δ durch

$$2x^2+2xy+2y^2,$$

wo x, y relative Primzahlen sind, ist es nothwendig (aber nicht hinreichend), dass (*l. c.* 182) -3 quadratischer Rest von 2Δ sei; und folglich, dass (*l. c.* 120) 2Δ weder durch 8, noch durch 9, noch durch irgendwelche Primzahl von der Form $6n+5$ theilbar sei.

Damit also Darstellungen von $2D$ durch die Form $(2, 1, 2)$ überhaupt existiren, ist es nothwendig, dass jeder Primfactor von D von der Form $6n+5$ einen geraden Exponenten habe.

c) Es bleibt jetzt übrig zu beweisen, dass die Bedingungen *a*), *b*) zur Lösbarkeit der Gleichung α) durch ganze positive Zahlen a, b hinreichend sind. Zu diesem Zwecke werden wir zeigen, wie man, jene Bedingungen als erfüllt vorausgesetzt, wenigstens eine Lösung von α) auffinden kann. Sei g^2 das grösste in D enthaltene Quadrat, und bezeichne man $\frac{D}{g^2}$ durch D'. Dann ist die Zahl D' ungerade, und weder durch g, noch durch irgend eine Primzahl von der Form $6n+5$ theilbar; folglich (*l. c.* 182) ist sie durch die Form $(1, 0, 3)$ darstellbar. Man kann also setzen:

$$D'=p^2+3q^2,$$

wo p, q ganze positive Zahlen sind. Setzt man nun:

$$x=2q,\quad y=p-q,$$

so folgt:

$$D'=x^2+xy+y^2.$$

Wenn $p>q$, so setze man

$$a=gx,\quad b=gy$$

oder

$$a=gy,\quad b=gx;$$

man erhält so:

$$D=a^2+ab+b^2.$$

Wenn dagegen $q>p$, dann ist y negativ und absolut kleiner als x; indem man

$$b=-gy,\quad c=gx$$

oder

$$a=-gy,\quad c=gx$$

setzt, erhält man:

$$D=c^2-cb+b^2=a^2+ab+b^2,$$

oder

$$D=c^2-ca+a^2=a^2+ab+b^2.$$

6. Theorem. Die reciproken Nullformen $(a, b, -c)$, $(b, a, -c)$ sind uneigentlich äquivalent. Denn man erhält die zweite Form aus der ersten durch die Substitution

$$\begin{cases} x = x', \\ y = x' - y', \end{cases}$$

deren Determinante -1 ist.

7. Theorem. Damit die reciproken Nullformen $(a, b, -c)$, $(b, a, -c)$ eigentlich äquivalent seien, ist es nothwendig und hinreichend, dass die unbestimmte Gleichung

$$x^2 \frac{D}{d^2} - 3 = y^2,$$

wo d der grösste gemeinschaftliche Theiler von a, b ist, ganzzahlige Lösungen besitze.

Geht $(a, b, -c)$ in $(b, a, -c)$ durch eine Substitution

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y', \\ y = \gamma x' + \delta y' \end{cases}$$

über, so muss sein:

$$a\alpha^2 + 2b\,\alpha\gamma - c\gamma^2 = b,$$
$$a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) - c\gamma\delta = a,$$
$$a\beta^2 + 2b\beta\delta - c\delta^2 = -c.$$

Durch Anwendung der Relation $c = a + b$ erhält man hieraus:

α) $$a(\alpha^2 - \gamma^2) + b(2\alpha\gamma - \gamma^2 - 1) = 0,$$

β) $$a(\alpha\beta - \gamma\delta - 1) + b(\alpha\delta - \beta\gamma - \gamma\delta) = 0,$$

γ) $$a(\beta^2 - \delta^2 + 1) + b(2\beta\delta - \delta^2 + 1) = 0.$$

Sind $(a, b, -c)$, $(b, a, -c)$ eigentlich äquivalent, so ist

δ) $$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Es fragt sich, wann diese Gleichungen nebeneinander bestehen können. Als Coexistenzbedingung für α), β) und für β), γ) findet man bez. durch Anwendung von δ):

$$0 = (\alpha + \gamma)(\alpha + \beta - \delta),$$
$$0 = (\beta - 2\delta)(\alpha + \beta - \delta).$$

Man hat daher, als Coexistenzbedingungen für α), β), γ):

ε) $$\text{entweder} \begin{cases} \alpha + \gamma = 0, \\ \beta - 2\delta = 0, \end{cases}$$

ζ) $$\text{oder} \quad \alpha + \beta - \delta = 0.$$

Aus ε), δ) erhält man leicht die durch ganze Zahlen unmöglich zu erfüllende Relation

$$3\alpha\delta = 1.$$

Es bleibt also nur die zweite Möglichkeit übrig.

Aus irgend einer der Gleichungen α), β), γ) erhält man, wegen δ) und ζ):

$$\eta)\qquad a(\alpha+\gamma)-b(\delta-\gamma)=0.$$

Setzt man:

$$a=da_1,\quad b=db_1,\quad D=d^2(a_1^2+a_1b_1+b_1^2)=d^2D_1,$$

wo a_1, b_1 relative Primzahlen sind, so folgt aus η):

$$\delta-\gamma=xa_1,\quad \alpha+\gamma=xb_1,$$

wo x eine ganze Zahl ist, und daraus, wegen ζ):

$$\beta-2\gamma=x(a_1-b_1).$$

Gesetzt nun

$$\gamma=xr,$$

wo γ zwar ganz sein muss, r aber nur rational zu sein braucht, hat man:

$$\vartheta)\qquad \begin{cases}\alpha=x(b_1-r),\\ \beta=x(a_1-b_1+2r),\\ \gamma=xr,\\ \delta=x(a_1+r),\end{cases}$$

also aus δ):

$$1=\alpha\delta-\beta\gamma=x^2(a_1b_1-2[a_1-b_1]r-3r^2),$$

und r wird durch die Gleichung

$$r^2+\frac{2(a_1-b_1)}{3}r-\left(\frac{a_1b_1}{3}-\frac{1}{3x^2}\right)=0$$

bestimmt.

Als Lösung dieser Gleichung ergiebt sich:

$$r=\frac{(b_1-a_1)x\pm\sqrt{x^2D_1-3}}{3n}.$$

Lässt die unbestimmte Gleichung

$$x^2D_1-3=y^2$$

ganzzahlige Lösungen zu, so ist:

$$\iota)\qquad \gamma=xr=\frac{(b_1-a_1)r+\sqrt{y^2}}{3}.$$

Man beweist leicht, dass der eine von den zwei Werthen der rechten Seite von ι) jedenfalls ganz ist.

Aus

$$y^2=x^2D_1-3=x^2(b_1-a_1)^2+3x^2a_1b_1-3$$

sieht man nämlich, dass, wenn $x(b_1-a_1)$ durch 3 theilbar ist, auch y durch 3 theilbar sein muss, so dass in diesem Falle die beiden Werthe der rechten Seite von ι) ganz sind. Ist aber $x(b_1-a_1)$ durch 3 nicht theilbar, also

$$x(b_1-a_1)\equiv\varepsilon\ (mod\ 3),$$

wo ε entweder $=+1$ oder $=-1$ ist, so ist y^2 durch 3 nicht theilbar, und die zwei Werthe von $\sqrt{y^2}$ sind bez. $\equiv\pm 1\ (mod\ 3)$. Wenn man also in ι) für y denjenigen Werth von $\sqrt{y^2}$ setzt, welcher $\equiv-\varepsilon\ (mod\ 3)$ ist, wird die rechte Seite jener Gleichung einen ganzzahligen Werth erhalten.

Demnach ist der zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Satz vollständig bewiesen, und zugleich geben uns die Gleichungen ϑ) eine Substitution, durch welche die Form $(a, b, -c)$ in die Form $(b, a, -c)$ übergeht.

8. Indem wir die allgemeine Behandlung der Frage von der Lösbarkeit der Gleichung

$$\alpha)\qquad x^2 D_1 - 3 = y^2$$

auf eine spätere Gelegenheit verschieben, wollen wir hier zwei besondere Fälle erwähnen, welche aus verschiedenen Gründen bemerkenswerth scheinen.

9) Der Fall, wo eine von den Formen $(a, b, -c)$, $(b, a, -c)$ eine ambige Form ist, muss unter den Möglichkeitsfällen des Satzes von § 7 enthalten sein; denn die Formen $(a, b, -c)$, $(b, a, -c)$ sind ja einander uneigentlich äquivalent (§ 6), und daher müssen sie auch eigentlich äquivalent sein, sobald die eine von ihnen eine ambige Form ist.

Ist $(a, b, -c)$ eine ambige Form*, so ist:

a) Entweder $$d = a,$$
also
$$a_1 = 1, \quad b_1 = \frac{b}{a}, \quad D_1 = 1 + b_1 + b_1^2,$$
und die Gleichung α) § 8 besitzt offenbar die Lösung
$$x = 2, \quad y = 2b_1 + 1.$$
Hieraus erhält man
$$2r = \frac{2(b_1 - 1) \pm (2b_1 + 1)}{3},$$
also für das untere Zeichen $r = -\frac{1}{2}$; und folglich die Substitution
$$\begin{cases} \alpha = 2b_1 + 1, \\ \beta = -2b_1, \\ \gamma = -1, \\ \delta = +1. \end{cases}$$

b) Oder $$d = \frac{a}{2},$$
also
$$a_1 = 2, \quad b_1 = \frac{2b}{a}, \quad D_1 = 4 + 2b_1 + b_1^2;$$
und die Gleichung α) § 8 ist für
$$x = 1, \quad y = b_1 + 1$$
erfüllt. Dann ist
$$r = \frac{b_1 - 2 \pm (b_1 + 1)}{3},$$
also für das untere Zeichen $r = -1$, und man erhält die Substitution

* Den Fall, wo $(b, a, -c)$ eine ambige Form ist, erledigt man ganz analog.

$$\begin{cases} \alpha = b_1 + 1, \\ \beta = -b_1, \\ \gamma = -1, \\ \delta = +1. \end{cases}$$

10. Den zweiten im § 8 angedeuteten besonderen Fall erhält man wie folgt. Setzt man in ϑ) § 7 $\beta = \gamma$, so folgt daraus:

$$r = b_1 - a_1,$$

also, wegen δ), $x = 1$, und daher:

$$\begin{cases} \alpha = a_1, \\ \beta = b_1 - a_1, \\ \gamma = b_1 - a_1, \\ \delta = b_1. \end{cases}$$

Aus ι) § 7 erhält man dann:

$$\pm y = 2(b_1 - a_1),$$

und durch Einsetzung in α) § 8:

$$a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2 - 3 = 4(a_1^2 - 2a_1 b_1 + b_1^2),$$

d. i.:

α)
$$3a_1 b_1 - a_1^2 - b_1^2 = 1.$$

Diese unbestimmte Gleichung verdient wohl, genauer betrachtet zu werden. Schreiben wir von nun an, der Einfachheit wegen, p und q statt a_1 und b_1, und lassen wir zunächst die evidente Lösung $p = 1$, $q = 1$ bei Seite, so ersehen wir aus

β)
$$q = \frac{3p \pm \sqrt{5p^2 - 4}}{2},$$

dass jedem Werthe von p zwei Werthe von q entsprechen, welche zugleich rational und ganz oder zugleich irrational sind, und deren einer kleiner, der andere grösser als p ist. Bezeichnet t_r einen Werth von p, dem ganzzahlige Werthe t_{r-1}, t_{r+1} von q entsprechen, und ist

$$t_{r-1} < t_r < t_{r+1},$$

so folgt aus der Symmetrie der Gleichung α), dass sie gleichfalls erfüllt wird, wenn man

$$q = t_r, \quad p = t_{r+1}$$

setzt. Giebt man also der unbestimmten Grösse p in β) den Werth t_{r+1}, so ist der eine der daraus entstehenden Werthe von q nothwendigerweise t_r, der zweite, welcher ganzzahlig und grösser als t_{r+1} ist, werde durch t_{r+2} bezeichnet. Indem man so fortfährt, erhält man aus einer bekannten ganzzahligen Lösung $p = t_r$, $q = t_{r-1}$ von α) eine unendliche Reihe von Zahlen

$$t_{r-1}, \quad t_r, \quad t_{r+1}, \quad t_{r+2}, \quad \ldots,$$

deren irgend zwei benachbarte eine Lösung von α) bilden.

Die Ausgangslösung findet man wie folgt. Da α) für $p=1$, $q=1$ erfüllt ist, so muss man durch Einsetzung von $p=1$ in α) einen zweiten ganzzahligen Werth von q finden; man erhält thatsächlich $q=2$. Demnach kann man als Ausgangspunkt die Lösung $p=2$, $q=1$ annehmen. Indem man $1=t_0$, $1=t_1$, $2=t_2$, ... setzt, erhält man die unendliche Folge

$$\gamma) \qquad t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_{r-1},\ t_r,\ t_{r+1},\ \ldots^{*}$$

(wo $t_0=t_1<t_2<t_3<\ldots$), deren jedes Glied von dem vorhergehenden durch die Gleichung

$$t_{r+1}=\frac{3t_r+\sqrt{5t_r^2-4}}{2}$$

und von dem nachfolgenden durch die Gleichung

$$t_{r-1}=\frac{3t_r-\sqrt{5t_r^2-4}}{2}$$

bestimmt wird. Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man die Recursionsformeln:

$$t_{r+1}=3t_r-t_{r-1}, \quad t_{r-1}=3t_r-t_{r+1}.$$

Es fragt sich jetzt, ob die Reihe γ) alle positiven Lösungen** von α) giebt. Dass die Sache sich so verhält, werden wir durch vollständige Induction beweisen. Setzen wir voraus, es gebe keine kleinere als t_r und von $t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}$ verschiedene Zahl, welche in β) für p eingesetzt ganzzahlige Werthe für q erzeuge, und sei dagegen eine solche Zahl u zwischen t_r und t_{r+1} vorhanden. Da die Function $\frac{3p-\sqrt{5p^2-4}}{2}$ von $p=2$ an mit p beständig zunimmt, und da ihre Werthe für $p=t_r$, $p=t_{r+1}$ bez. t_{r-1}, t_r sind, so wird sie für $p=u$ einen zwischen t_{r-1} und t_r eingeschlossenen Werth v annehmen. Dann hat man aber auch die Lösung

$$p=v\begin{matrix}>t_{r-1},\\<t_r,\end{matrix} \quad q=u,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Da also unsere Voraussetzung für $r=2$ offenbar richtig ist, so gilt dieselbe für jeden Werth von r, und die aufgeworfene Frage muss bejaht werden.

11. Die Reihe γ) des vorigen Paragraphen giebt uns unendliche Paare von einander eigentlich (und zugleich uneigentlich) äquivalenten reciproken Nullformen

---

* Es ist $t_{3s}\equiv 1$, $t_{3s+1}\equiv 1$, $t_{3s+2}\equiv 2 \pmod 4$; ferner enthalten die Zahlen t_r keine Factoren von der Form $4n+3$.

** Aus jeder positiven Lösung x, y von α) erhält man eine negative Lösung $-x$, $-y$ derselben Gleichung.

$$(dt_r,\ dt_{r+1},\ -d[t_r+t_{r+1}]),\quad (dt_{r+1},\ dt_r,\ -d[t_r+t_{r+1}])$$

(wo d irgend eine ganze Zahl ist); die erste Form je eines Paares geht in die zweite durch die Substitution

$$\begin{cases}\alpha = t_r, \\ \beta = t_{r+1} - t_r, \\ \gamma = t_{r+1} - t_r, \\ \delta = t_{r+1}\end{cases}$$

über.

Wir wollen sehen, ob unter den so erhaltenen Nullformen ambige Formen vorhanden sind. Aus der Gleichung:

$$t_{r+1} = \frac{3t_r + \sqrt{5t_r^2 - 4}}{2}$$

erhellt, dass für $r > 2$ $5t_r > 2t_{r+1} > 6t_r$ ist, so dass $2t_{r+1}$ durch t_r nicht theilbar ist. Die einzigen ambigen Formen von der betrachteten Art sind also

$$(1,\ 1,\ -2),\quad (1,\ 2,\ -3),\quad (2,\ 1,\ -3),\quad (2,\ 5,\ -7),$$

und diejenigen, welche aus diesen durch Multiplication aller Coefficienten mit einer und derselben Zahl entstehen.

12. Die Reste der Glieder der Reihe

α) $$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots$$

in Bezug auf irgend einen Modulus m bilden eine periodische Reihe, und die Periode kann höchstens m^2 Glieder erhalten*. Man beweist leicht, dass die Periode symmetrisch ist, wenn man sie mit dem zweiten Gliede der Reihe anfängt. Man findet insbesondere für die Moduli 3 und 7 bez. die folgenden Perioden:

$$1,\ 2,\ 2,\ 1;\quad 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 6,\ 5,\ 2,\ 1.$$

Bezeichnet man durch $D_{r,\,r+1}$ die Determinante der Formen $(t_r,\ t_{r+1},\ -[t_r+t_{r+1}])$, $(t_{r+1},\ t_r,\ -[t_r+t_{r+1}])$, so erhält man leicht:

$$D_{r,\,r+1} = 4t_r t_{r+1} - 1,$$

woraus man die Reste von $D_{r,\,r+1}$ in Bezug auf irgendwelche Moduli mit leichter Mühe berechnen kann. So erhält man für

---

* Da nämlich, wegen der Relation: $t_{r+1} = 3t_r - t_{r-1}$, jedes Glied durch die zwei vorhergehenden linear und ganz darstellbar ist, so wird die Gliederfolge sich wiederholen, sobald ein schon aufgetretenes Paar von benachbarten Termen von Neuem erscheint; und die Anzahl der verschiedenen binären Combinationen der Reste (*mod.* m) ist eben m^2. — Diese obere Grenze wird aber durch manche Ueberlegungen vermindert. Ist insbesondere m eine Potenz einer ungeraden Primzahl, so ist $2m$, wie wir hier nicht beweisen wollen, die Maximalanzahl der Terme der Periode; sie wird auch wirklich in einigen Fällen (wie z B. für $m=5$) erreicht.

$$D_{0,1}, \quad D_{1,2}, \quad D_{2,3}, \quad D_{3,4}, \quad D_{4,5}, \quad D_{5,6}$$

die folgenden Reste:

in Bezug auf 3: 0 1 0 1 0 1 ...,

" " " 7: 3 0 4 0 3 0 3 0 4 0 3 0 ...

Wir erhalten also das bemerkenswerthe Ergebniss, dass Paare von eigentlich äquivalenten reciproken Nullformen $(a, b, -c)$, $(b, a, -c)$ deren Coefficienten die Gleichung

$$3ab - a^2 - b^2 = 1$$

erfüllen, nur für solche Determinanten existiren **können**, welche entweder durch 3 oder durch 7 theilbar sind.

Es bleiben davon insbesondere alle primzahligen Determinanten ausgeschlossen.

Mantua, den 28. Februar 1886.

XVI.

Einige Beiträge zur Theorie der allgemeinen rationalen quadratischen Transformation.

Von

FRITZ HOFMANN

in München.

Lassen wir zwischen den Punkten einer x-Ebene und denen einer y-Ebene die Beziehungen bestehen:

$$\text{I)} \qquad \varrho x_1 = y_2 y_3, \quad \varrho x_2 = y_1 y_3, \quad \varrho x_3 = y_1 y_2,$$

$$\text{II)} \qquad \sigma y_1 = x_2 x_3, \quad \sigma y_2 = x_1 x_3, \quad \sigma y_3 = x_1 x_2,$$

so haben wir damit die einfachste und für die Rechnung bequemste rationale quadratische Transformation angegeben, aber auch die speciellste Transformation dieser Art.

Aus diesen Gleichungen ist sofort abzulesen, dass es bei diesen speciellen Transformationen Punkte x giebt, welchen nicht ein einzelner Punkt y entspricht, sondern eine Gerade der y-Ebene und umgekehrt; dem Punkte $x_1 = x_2 = 0$ entspricht beispielsweise die Gerade $y_3 = 0$ und ebenso dem Punkte $y_1 = y_2 = 0$ die Gerade $x_3 = 0$.

Im Nachfolgenden sollen die Sätze entwickelt werden, die zur Orientirung über die Verhältnisse bei allgemeinen quadratischen Substitutionen genügen, die somit ein sicheres Operiren gestatten auch mit Transformationen, die sich nicht mehr ausschliesslich stützen — wie die von I) und II) — auf die evidenten Eigenschaften von *a priori* als zerfallend vorgegebenen Kegelschnitten.

Ersetzt man die Gleichungen I) durch die allgemeinen:

$$\text{III)} \qquad \begin{cases} \varrho x_1 = \varphi_1(y_1 y_2 y_3), \\ \varrho x_2 = \varphi_2(y_1 y_2 y_3), \\ \varrho x_3 = \varphi_3(y_1 y_2 y_3), \end{cases}$$

wo die φ homogen geschriebene Gleichungen von Kegelschnitten vorstellen sollen, die nicht mehr direct das Product von zwei linearen Factoren bilden — die wir nur der einzigen Bedingung unterwerfen wollen, dass die drei Kegelschnitte $\varphi_i = 0$ drei Punkte, β_1, β_2, β_3 gemeinschaftlich haben —, so drängen sich Fragen mancherlei Art auf, wie etwa die folgenden: wie findet man die inversen Transformationen, d. h. wie können die Functionen ψ: $\sigma y_i = \psi_i(x)$ am einfachsten erhalten werden, welche die Auflösung des

Systems III) nach den y vorstellen? Wo liegen die Curven, geschrieben in den x, die den Hauptpunkten β in der y-Ebene entsprechen, da ja letztere Punkte durch das Einsetzen ihrer Werthe in die Gleichungen III) dieselben zunächst illusorisch machen? Und welche Beziehungen haben diese Curven zu den Transformationscurven $\sigma y_i = \psi_i(x)$? Tritt vielleicht der Fall ein, dass den Schnittpunkten α dieser den β entsprechenden Curven wiederum umgekehrt in der y-Ebene keine bestimmten Punkte, sondern Curven entsprechen — und welche Beziehungen haben diese Curven, geschrieben in den y, zu den vorgegebenen Kegelschnitten $\varphi_i(y)$?

Auf alle diese Fragen ist für den Fall einer rationalen quadratischen Transformation der einfachsten Art [Nr. I) und II)] die Antwort gegeben in der kurzen Bemerkung, die wir an jene Transformationsformeln anschlossen.

Auch für den Fall der allgemeinen Formeln Nr. III) kann die Antwort auf jene Fragen als gegeben angesehen werden, indem man von Sätzen viel allgemeinerer Art über Transformationen von beliebigem Grade eine specielle Anwendung auf jene Formeln macht (vergl. etwa Clebsch-Lindemann, Geometrie S. 474—480 oder 8. Capitel von Salmon-Fiedler's „Höheren ebenen Curven").

Wir wollen hier gleich das Ergebniss dieser allgemeineren Untersuchungen, angewendet auf unsere Formeln III), vorausschicken, wie es in den angeführten Werken gewonnen wird und zwar dort nicht direct, sondern durch Schlüsse über eindeutiges Entsprechen von Punkten, sowie vermittelst allgemeiner Curventheorie und schliesslich auch durch Infinitesimalbetrachtungen.

Wir setzten voraus, dass die drei Curven $\varphi_i(y) = 0$ durch drei Punkte β gehen. Alsdann „entspricht einem Punkte β, geschrieben in den y, eine Gerade, geschrieben in den x. Die drei so erhaltenen Geraden bilden ein Dreieck mit den Eckpunkten $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, und durch diese Punkte α gehen die Curven $\psi_i(x) = \sigma y_i$, welche die Umkehrung der Substitutionen III) repräsentiren. Sucht man aber umgekehrt für die Punkte α, geschrieben in den x, die Bilder in der y-Ebene, so würden zunächst die Formeln $\psi_i(x) = \sigma y_i$ nach der soeben gemachten Bemerkung illusorisch — man weist aber nach, dass diesen Punkten α in der x-Ebene nicht mehr einzelne Punkte der y-Ebene, sondern die Seiten des Dreiecks der β entsprechen. Schliesslich kann man noch zeigen, dass die Curven $\psi_i(x)$ selbst wieder vom zweiten Grade sind, also in den Curven φ ganz analoges Verhalten zeigen, indem auch sie ihrerseits drei feste Punkte, α, gemeinschaftlich haben".

Diese Resultate sollen im Nachfolgenden ganz direct gewonnen werden, ohne den Geschlechtsbegriff der Curven oder die Infinitesimalrechnung heranzuziehen, indem wir die Lösungen für sämmtliche in obigen Fragen gestellte Hilfsaufgaben auf elementarem Wege bringen. Auch die ebenso naheliegenden Fragen: wie construirt man sich Beispiele für

diese Theorien? wie verschafft man sich Kegelschnitte, die überhaupt durch drei Punkte gehen, wie solche, die drei bestimmte Punkte gemeinschaftlich haben? wie kann man die Gleichungen III) darstellen als das Eliminationsresultat von zwei einfacheren Gleichungen, die die Grössen x und y nur linear enthalten? finden dabei zugleich ihre Erledigung.

I. Indem wir die Coordinaten der drei Punkte $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, welche die Kegelschnitte $\varphi_i(y)=0$ gemeinschaftlich haben, als bekannt annehmen, können wir die Gleichungen der Seiten des Dreiecks der β bilden:

$$\text{IV)} \qquad \eta_1=0, \quad \eta_2=0, \quad \eta_3=0$$

Hierbei bedeuten die η lineare Functionen der y.

Diese Gleichungen IV) können wir auflösen nach y und dann in die Gleichungen III) $\varrho\, x_i=\varphi_i(y)$ die so für y gewonnenen Ausdrücke substituiren. Wir müssen dann lauter Gleichungen erhalten, in welchen η_1^2, η_2^2, η_3^2 gleichzeitig fehlen, weil eben die Kegelschnitte φ durch die Eckpunkte des Dreiecks der drei Geraden η hindurchgehen. D. h. unsere Gleichungen III) nehmen die Gestalt an

$$\text{V)} \qquad \begin{cases} \varrho\, x_1 = a_{11}(\eta_2\eta_3)+a_{12}(\eta_3\eta_1)+a_{13}(\eta_1\eta_2)=\Phi_1(\eta), \\ \varrho\, x_2 = a_{21}(\eta_2\eta_3)+a_{22}(\eta_3\eta_1)+a_{23}(\eta_1\eta_2)=\Phi_2(\eta), \\ \varrho\, x_3 = a_{31}(\eta_2\eta_3)+a_{32}(\eta_3\eta_1)+a_{33}(\eta_1\eta_2)=\Phi_3(\eta). \end{cases}$$

Bezeichne nun α_{ik} die Unterdeterminante des k^{ten} Elements in der i^{ten} Horizontalreihe der Determinante der a, so erhält man weiter:

$$\text{VI)} \qquad \begin{cases} \eta_2\eta_3 = \alpha_{11}x_1+\alpha_{21}x_2+\alpha_{31}x_3, \\ \eta_3\eta_1 = \alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{32}x_3, \\ \eta_1\eta_2 = \alpha_{13}x_1+\alpha_{23}x_2+\alpha_{33}x_3. \end{cases}$$

Diesen Formeln VI) können wir bereits Folgendes entnehmen. Es sei für einen Punkt $\eta_1=0$, so entspricht ihm der gemeinschaftliche Schnittpunkt der Geraden:

$$\alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{32}x_3=0 \quad \text{und} \quad \alpha_{13}x_1+\alpha_{23}x_2+\alpha_{33}x_3=0.$$

Wir sind demnach bereits auf Punkte — wir wollen sie α nennen — aufmerksam gemacht, welche die Eigenschaft haben, dass ihnen, als Punkte der x-Ebene aufgefasst, in der y-Ebene gerade Linien η entsprechen, nämlich die Seiten des Dreiecks der β. Und zwar sind diese drei Punkte α die Schnittpunkte der drei Geraden, welche von den rechten Seiten der Gleichungen VI) vorgestellt werden. Man kann nun aber auch die Gleichungen VI) paarweise mit einander multipliciren und erhält:

$$\text{VII)} \qquad \begin{cases} (\eta_1\eta_2\eta_3)\,\eta_3 = (\alpha_{11}x_1+\alpha_{21}x_2+\alpha_{31}x_3)\,(\alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{32}x_3), \\ (\eta_1\eta_2\eta_3)\,\eta_2 = (\alpha_{11}x_1+\alpha_{21}x_2+\alpha_{31}x_3)\,(\alpha_{13}x_1+\alpha_{23}x_2+\alpha_{33}x_3), \\ (\eta_1\eta_2\eta_3)\,\eta_1 = (\alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{32}x_3)\,(\alpha_{13}x_1+\alpha_{23}x_2+\alpha_{33}x_3). \end{cases}$$

Setzt man eine der linearen Functionen $=0$, welche die rechten Seiten de Gleichungen VII) componiren, etwa $(\alpha_{11}x_1+\alpha_{21}x_2+\alpha_{31}x_3)=0$, so ergiebt sich $\eta_3=\eta_2=0$.

Daher der Satz: Einem Eckpunkte des Dreiecks $\beta_1\beta_2\beta_3$ entspricht in der x-Ebene nicht ein einzelner Punkt, sondern es entspricht

$$\text{VIII)}\quad \begin{cases} \text{dem Punkte } \beta_1 : \eta_2=\eta_3=0 \text{ die Gerade } \alpha_{11}x_1+\alpha_{21}x_2+\alpha_{31}x_3=0, \\ \quad\text{,,}\qquad\text{,,}\qquad \beta_2 : \eta_1=\eta_3=0 \quad\text{,,}\qquad\text{,,}\qquad \alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{32}x_3=0, \\ \quad\text{,,}\qquad\text{,,}\qquad \beta_3 : \eta_1=\eta_2=0 \quad\text{,,}\qquad\text{,,}\qquad \alpha_{13}x_1+\alpha_{23}x_2+\alpha_{33}x_3=0; \end{cases}$$

während doch zunächst aus den Formeln III) oder V) die Correspondenz zwischen den Punkten β und x illusorisch zu werden scheint. — Es ist bemerkenswerth, dass dieses Resultat gewonnen wurde ohne Betrachtungen des Unendlichkleinen. Wir wiederholen rasch die Ableitung desselben Satzes an der Hand der Methoden von Salmon-Fiedler, a. a. O. Art. 339 oder Clebsch-Lindemann a. a. O. S. 481:

Wäre $\eta_2=\eta_3=0$ vorgegeben zur Transformirung in die x-Ebene, so bilde man, nach dem Taylor'schen Satze:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= \Phi_1+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta_1}\,\delta\eta_1+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta_2}\,\delta\eta_2+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta_3}\,\delta\eta_3,\\
\varrho x_2 &= \Phi_2+\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta_1}\,\delta\eta_1+\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta_2}\,\delta\eta_2+\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta_3}\,\delta\eta_3,\\
\varrho x_3 &= \Phi_3+\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta_1}\,\delta\eta_1+\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta_2}\,\delta\eta_2+\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta_3}\,\delta\eta_3 \quad \text{für}\quad \eta_2=\eta_3=0.
\end{aligned}$$

Man erhält, indem man auf die Formeln V) zurückgeht:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= a_{12}\eta_1\,\delta\eta_3+a_{13}\eta_1\,\delta\eta_2,\\
\varrho x_2 &= a_{22}\eta_1\,\delta\eta_3+a_{23}\eta_1\,\delta\eta_2,\\
\varrho x_3 &= a_{32}\eta_1\,\delta\eta_3+a_{33}\eta_1\,\delta\eta_2.
\end{aligned}$$

Dies giebt den Werth der Coordinaten x für einen Punkt in der Nachbarschaft des Punktes β_1. Indem man die Grössen ϱ, $\eta_1\delta\eta_3$, $\eta_1\delta\eta_2$ eliminirt, findet man

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13}\\ x_2 & a_{22} & a_{23}\\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

als Gleichung des dem Punkte β_1 entsprechenden Ortes der x-Ebene; in vollständiger Uebereinstimmung mit unserer Formel VIII). Wir wollen zu diesen Gleichungen VIII) noch einen Augenblick zurückkehren, um aus ihnen die Coordinaten der neuentstandenen merkwürdigen Punkte der x-Ebene, der α, abzulesen. Ersetzen wir in den ersten beiden Gleichungen des Systems VIII) die Unbekannten x_1, x_2, x_3 durch resp. a_{13}, a_{23}, a_{33}, so werden dieselben identisch erfüllt. Daher ist: $(a_{13}a_{23}a_{33})$ der Schnittpunkt der beiden ersten Geraden von VIII), d. h. wir können für die Coordinaten der drei Punkte α folgende Tabelle aufstellen, indem wir nur den soeben ge-

machten Schluss für andere Paare von Gleichungen des Systems VIII) wiederholen:

α_1 hat die Coordinaten (a_{11}, a_{21}, a_{31}),
α_2 „ „ „ (a_{12}, a_{22}, a_{32}),
α_3 „ „ „ (a_{13}, a_{23}, a_{33}).

Man hat es demnach ganz in der Hand, Beispiele von allgemeinen rationalen quadratischen Transformationen zu construiren mit vorgegebenen β-Hauptpunkten, welche hinführen auf α-Punkte von bestimmten, willkürlich angegebenen Coordinaten — man braucht eben nur zu diesem Zwecke die Coefficienten a der Formeln V) richtig zu wählen.

Die Gleichungen VII) in Verbindung mit IV) lösen nun vollständig das unseren Betrachtungen eigentlich — als wichtigstes — zu Grunde liegende Hauptproblem: die Umkehrung der Formeln III) anzugeben, eine auch für die Algebra interessante Aufgabe.

Wir haben nur noch die Gleichungen IV), die wir bereits einmal nach y auflösen mussten, nochmals zu verwerthen, indem wir in diese Lösungen, die die Form haben:

$$\text{IV}')\qquad \begin{cases} y_1 = b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2 + b_{13}\eta_3, \\ y_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + b_{23}\eta_3, \\ y_3 = b_{31}\eta_1 + b_{32}\eta_2 + b_{33}\eta_3, \end{cases}$$

die in Formel VII) erhaltenen Werthe der η einführen. Dann erhalten wir:

$$\text{IX})\qquad \begin{cases} y_1 = \psi_1(x), \\ y_2 = \psi_2(x), \\ y_3 = \psi_3(x), \end{cases}$$

wobei die Functionen ψ vom zweiten Grade in den x sind und zusammengesetzt aus Producten von je zwei linearen Functionen der x, Functionen, welche für sich allein $=0$ gesetzt, die Gleichungen der drei Seiten des Dreiecks der α vorstellen. Demnach gehen in der That die Curven $\psi_i = 0$ durch drei feste Punkte α, was wir uns vorgesetzt hatten zu beweisen.

Erstes Zahlenbeispiel.

Aufgabe. Man soll die Transformation

$$\text{III}')\qquad \begin{cases} x_1 = -\ y_1^2 - y_2^2 -\ y_3^2 + 2(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3), \\ x_2 = -3y_1^2 + y_2^2 +\ y_3^2 + 2(y_1y_2 + y_1y_3 - y_2y_3), \\ x_3 = -4y_1^2 \qquad -2y_3^2 + 2(2y_1y_2 + 3y_1y_3 + y_2y_3), \end{cases}$$

von der zugleich angegeben wird, dass die drei Kegelschnitte der rechten Seite durch die drei Punkte β (0, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 1, 0) gehen, auflösen nach den y und die Lage der Hauptpunkte α der x-Ebene bestimmen.

Indem man die Gleichungen η_1, η_2, η_3 für die drei Seiten des vorgegebenen Dreiecks bildet und nach y auflöst, findet man

$$y_1 = \eta_2 + \eta_3, \quad y_2 = \eta_1 + \eta_3, \quad y_3 = \eta_1 + \eta_2.$$

Führt man diese Ausdrücke ein, so erhält man Gleichungen, die nach Früherem nur noch die Grössen $\eta_2\eta_3$, $\eta_3\eta_1$, $\eta_1\eta_2$ enthalten:

$$\begin{aligned} x_1 &= \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_1 + \eta_1\eta_2, \\ x_2 &= -\eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_1 + \eta_1\eta_2, \\ x_3 &= \eta_2\eta_3 + 3\eta_3\eta_1 + 2\eta_1\eta_2. \end{aligned}$$

Demnach sind bereits die Coordinaten der α-Punkte bekannt und können direct nach Früherem hergestellt werden:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: (1, -1, 1), \\ \alpha_2 &: (1, \quad 1, 3), \\ \alpha_3 &: (1, \quad 1, 2). \end{aligned}$$

Indem man die letzten Gleichungen auflöst nach $\eta_2\eta_3$, $\eta_3\eta_1$, $\eta_1\eta_2$, erhält man:

$$\begin{aligned} \eta_2\eta_3 &= -x_1 + x_2, \\ \eta_3\eta_1 &= 3x_1 + x_2 - 2x_3, \\ \eta_1\eta_2 &= -4x_1 - 2x_2 + 2x_3, \end{aligned}$$

woraus man schliesst, dass beispielsweise der Geraden $\eta_1 = 0$ der Schnittpunkt von $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ entspricht. Indem man nun paarweise multiplicirt und den sich gleichmässig einstellenden Factor $(\eta_1\eta_2\eta_3)$ fortlässt, findet sich

$$\begin{aligned} \tau\eta_1 &= (3x_1 + x_2 - 2x_3)(-4x_1 - 2x_2 + 2x_3), \\ \tau\eta_2 &= (-x_1 + x_2)(-4x_1 - 2x_2 + 2x_3), \\ \tau\eta_3 &= (-x_1 + x_2)(3x_1 + x_2 - 2x_3). \end{aligned}$$

Man schliesst hieraus, dass dem Schnittpunkte β_3 von $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ eine Gerade der x-Ebene entspricht, nämlich die Gerade $-4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$. (Dieselbe Gleichung müsste man nach Obigem auch durch Differentialrechnung erhalten.)

Indem wir nun diese Werthe substituiren in die Ausdrücke für y, finden wir als Umkehrung unserer Transformation III'):

$$\text{IX}') \quad \begin{cases} y_1 = (-x_1 + x_2)([-4x_1 - 2x_2 + 2x_3] + [3x_1 + x_2 - 2x_3]), \\ y_2 = (3x_1 + x_2 - 2x_3)([-x_1 + x_2] + [-4x_1 - 2x_2 + 2x_3]), \\ y_3 = (-4x_1 - 2x_2 + 2x_3)([-x_1 + x_2] + [3x_1 + x_2 - 2x_3]), \end{cases}$$

Formeln, die jedem Punkte der x-Ebene einen einzigen Punkt der y-Ebene zuweisen.

Zweites Zahlenbeispiel.

Eine nicht zerfallende Curve dritten Grades (durch die Punkte [0, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 0] gehend), dabei vom Geschlechte 0:

$$Ay_1y_2y_3 + By_1^2y_2 + Cy_1y_2^2 + Dy_1^2y_3 + Ey_2^2y_3 = 0$$

soll durch eine rationale quadratische Transformation allgemeinster Art transformirt werden in einen Kegelschnitt. Dabei wird noch die Bedingung gestellt, dass die linearen Functionen in x, welche sich infolge der auf-

zustellenden Transformation aus der neuen Curvengleichung absondern werden, identisch werden mit drei vorgegebenen:

$$c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3=0\equiv c_1,$$
$$c_{21}x_1+c_{22}x_2+c_{23}x_3=0\equiv c_2,$$
$$c_{31}x_1+c_{32}x_2+c_{33}x_3=0\equiv c_3;$$

es sollen zugleich die Functionen φ in y angegeben werden, welche die x bei dieser Transformation eindeutig ausdrücken durch die y.

Der eine Theil dieser Aufgabe ist besonders einfach zu lösen: man setzt eben $\begin{cases} y_1=c_2c_3, \\ y_2=c_3c_1, \\ y_3=c_1c_2 \end{cases}$ und überzeugt sich durch Einsetzen in die vorgegebene Curvengleichung, dass sich dieselbe auf einen Kegelschnitt $Ac_1c_2+Bc_2c_3+Cc_1c_3+Dc_2^2+Ec_1^2=0$ reducirt.

Um den zweiten Theil der Aufgabe zu erledigen, erinnern wir uns, dass die ausscheidenden Geraden jene Seiten des Dreiecks der α sind, welche den drei Punkten β der y-Ebene entsprechen, durch welche die vorgegebene Curve geht. Die Coordinaten der α sind aber einerseits erhältlich als die Schnittpunkte der vorgegebenen Geraden c, andererseits sind sie nach Früherem identisch mit den Coefficienten a_{ik} jener Transformation (III) oder (V) $x_i=\varphi_i(y)$, die verlangt wird. Wir erhalten also einerseits für die α-Punkte die Tabelle $\begin{cases} (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}), \\ (\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{23}), \\ (\gamma_{31}, \gamma_{32}, \gamma_{33}) \end{cases}$ und können dann sofort diese Grössen, die Unterdeterminanten der c-Determinante bedeuten, einführen, um zu erhalten:

$$\begin{cases} x_1=\gamma_{11}y_2y_3+\gamma_{21}y_3y_1+\gamma_{31}y_1y_2, \\ x_2=\gamma_{12}y_2y_3+\gamma_{22}y_3y_1+\gamma_{32}y_1y_2, \\ x_3=\gamma_{13}y_2y_3+\gamma_{23}y_3y_1+\gamma_{33}y_1y_2.\text{*} \end{cases}$$

Diese Aufgabe kann auch dahin variirt werden, dass man eine allgemeine quadratische Transformation verlangt, für welche die α-Punkte bestimmte vorgegebene Coordinaten haben. Soll man haben $\left.\begin{matrix}(2,\ 1,\ 0)\\(1,\ 2,\ 3)\\(3,\ 1,\ 3)\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\alpha_1,\\\alpha_2,\\\alpha_3,\end{matrix}$

so hat man anzuwenden:

$$\begin{aligned} x_1&=2y_2y_3+\ \ y_3y_1+3y_1y_2, \\ x_2&=\ \ y_2y_3+2y_3y_1+\ \ y_1y_2, \\ x_3&=\qquad\quad +3y_3y_1+3y_1y_2, \end{aligned}$$

welche Formeln dann vor ihrer Verwendung noch nach den y aufgelöst werden müssen. —

---

* Die Formeln V) sind nämlich die allgemeinen quadratischen Transformationsformeln, wenn vom β-Dreiecke die Gleichungen η, η_2, η_3 der drei Seiten bekannt; und diese Seiten werden hier durch $0=y_1$, y_2, y_3 bestimmt.

Ueberblicken wir die bis jetzt gewonnenen Resultate, so können wir sagen: wird an Stelle einer quadratischen Transformation der **einfachsten** Art [I), II)] eine **allgemeinere** Transformation vom Typus III) verwendet, so gestaltet sich das Rechnen mit derselben und der Ueberblick über die dieselbe charakterisirenden Grundgebilde ebenso einfach, wie bei den specielleren Formeln, und eine solche allgemeinere Substitution ist von derselben Sicherheit und Beweglichkeit in der Behandlung, wie die specielle; sie gestattet eine grössere Freiheit, insofern sie über die Bestimmung gewisser Constanten, der Coordinaten der Punkte α, die Wahl lässt. Zugleich besitzen diese auf elementarem Wege erledigten Untersuchungen den Werth eines instructiven **Beispiels** für die von der allgemeinen Curventheorie durch abstractere Methoden gewonnenen Beziehungen zwischen den Hauptpunkten höherer Transformationen.*

II. Wie man sofort Gleichungen zweiten Grades hinschreiben kann, von denen man sicher sein darf, dass die durch sie vorgestellten Curven drei Punkte gemeinschaftlich haben, zeigt die folgende elegante, bei **Clebsch-Lindemann** a. a. O. S. 476 mitgetheilte Methode.

Man schreibe an

$$\text{XI)} \quad \begin{cases} Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_3 x_3 = 0, \\ Q'_1 x_1 + Q'_2 x_2 + Q'_3 x_3 = 0, \end{cases}$$

wobei die Q_1, Q_2, Q_3, Q'_1, Q'_2, Q'_3 beliebige homogene lineare Functionen n den y bedeuten, und bestimme hieraus:

$$\text{XII)} \quad \begin{cases} \varrho x_1 = Q_2 Q'_3 - Q'_2 Q_3, \\ \varrho x_2 = Q_3 Q'_1 - Q'_3 Q_1, \\ \varrho x_3 = Q_1 Q'_2 - Q'_1 Q_2. \end{cases}$$

„Die drei rechts stehenden Kegelschnitte haben immer drei Punkte gemeinschaftlich.“

Für diese Bemerkung ist ein directer Nachweis möglich. (Vergl. **Salmon**, Algebra der linearen Transform., Art. 267; sowie **Salmon**, Höhere ebene Curven, Art. 190.) Wir haben die Identität $\begin{vmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q'_1 & Q'_2 & Q'_3 \end{vmatrix} = 0$; oder

$$\text{XIII)} \quad Q_1(Q_2 Q'_3 - Q_3 Q'_2) \equiv -\{Q_2(Q_3 Q'_1 - Q_1 Q'_3) + Q_3(Q_1 Q'_2 - Q_2 Q'_1)\}.$$

Die beiden Kegelschnitte der rechten Seite haben nun offenbar den Punkt gemeinschaftlich, der zugleich auf $Q_1 = 0$ und $Q'_1 = 0$ liegt. Aber sie haben im Allgemeinen keinen Punkt der Geraden Q_1 ausserdem gemeinschaftlich. Der eine geht zwar durch den Schnittpunkt von Q_1 mit Q_3, der andere

* Die Bemerkung, dass die **allgemeine** Transformation zweiten Grades im directesten Zusammenhange steht mit der **speciell erscheinenden** Transformation der Formel I) S. 283, findet sich übrigens auch bei **Salmon**, Höhere Curven, Art. 326 am Schlusse. Von dieser Bemerkung soll eben das im Texte im Abschnitt 1 Gegebene eine Ausführung sein.

durch den von Q_1 mit Q_2, aber das sind eben getrennte Punkte. Wir können also wiederholen: im Allgemeinen haben die beiden Kegelschnitte der rechten Seite auf der Geraden Q_1 nur den Schnittpunkt von Q_1 mit Q'_1 gemeinschaftlich.

Aus der Identität XIII) schliesst man nun: der Schnittpunkt von Q_1 und Q'_1, einer der vier gemeinschaftlichen Punkte der Kegelschnitte der rechten Seite, braucht nicht auf dem Kegelschnitte $Q_2 Q'_3 - Q_3 Q'_2$ der linken Seite zu liegen, denn für ihn wird der Factor Q_1 der linken Seite von XIII) zu Null. Dagegen liegen alle anderen Schnittpunkte der beiden rechtsstehenden Kegelschnitte auf dem Kegelschnitte der linken Seite, denn für diese anderen Schnittpunkte verschwindet Q_1 nicht mehr, also muss es der Factor $Q_2 Q'_3 - Q_3 Q'_2$ thun.

Also haben in der That die drei Kegelschnitte der Tabelle XII) drei Punkte gemeinschaftlich.* —

Wir wollen noch einige kleine Aufgaben behandeln, die mit dem Vorhergehenden Zusammenhang haben.

Wenn zwei quadratische Transformationen specieller Art vorgegeben sind [Nr. I) und II)], kann man dann zwei Gleichungen von der Art der Nr. XI) angeben, durch deren Auflösung eben jene Formeln I) und II) entstehen würden?

Wir geben zur Lösung dieser Aufgabe folgende einfache Vorschrift. Man bilde eine Matrix

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

und nenne die Unterdeterminanten derselben, wie etwa $(a_2 b_3 - a_3 b_2)$ abgekürzt $(a_2 b_3)$.

„Wenn dann die sechs Zahlen $a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3$ ganz beliebig gegriffen werden und der einzigen Bedingung unterliegen, dass von den Unterdeterminanten $(a_1 b_2)$, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_1)$ keine verschwindet, so können die Substitutionen $\begin{cases} x_1 = y_2 y_3, \\ x_2 = y_1 y_3, \\ x_3 = y_1 y_2 \end{cases}$ ersetzt werden durch den Verein der beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{(a_3 b_1)(a_1 b_2)} x_1 y_1 + \dfrac{a_2}{(a_1 b_2)(a_2 b_3)} x_2 y_2 + \dfrac{a_3}{(a_2 b_3)(a_3 b_1)} x_3 y_3 = 0, \\ \dfrac{b_1}{(a_3 b_1)(a_1 b_2)} x_1 y_1 + \dfrac{b_2}{(a_1 b_2)(a_2 b_3)} x_2 y_2 + \dfrac{b_3}{(a_2 b_3)(a_3 b_1)} x_3 y_3 = 0." \end{cases}$$

* Auch bei der Bestimmung der Anzahl von Doppelpunkten, welche eine durch einen Parameter rational ausgedrückte Curve besitzt, tritt eine ähnliche Schlussweise auf. Ueberhaupt tritt derselbe Schluss in allen Gebieten der analytischen Geometrie uns entgegen; vergl. noch Salmon, Geometrie des Raumes, Bd. II Art. 2; S. 6 der deutschen Ausgabe.

Der Beweis wird durch Auflösung nach $x_1 x_2 x_3$ sichtbar. — Mit Hilfe dieser Bemerkung können wir nun darauf hinarbeiten, **allgemeine quadratische Substitutionen III) durch ein System von zwei in x und y linearen Gleichungen wie XI) zu ersetzen.** Um zu zeigen, wie sich dieses Problem besonders übersichtlich behandeln lässt, sobald erst einmal die drei gemeinschaftlichen Punkte der Kegelschnitte φ bekannt sind, nehmen wir unser früheres Zahlenbeispiel wieder auf (S. 288).

Wir können nunmehr die Gleichungen $\left\{\begin{aligned} -x_1+x_2&=\eta_2\eta_3, \\ 3x_1+x_2-2x_3&=\eta_1\eta_3, \\ -4x_1-2x_2+2x_3&=\eta_1\eta_2 \end{aligned}\right.$

ersetzen, wie wir soeben gesehen haben, durch die zwei Gleichungen:

$$0=\frac{a_1}{(a_3b_1)(a_1b_2)}\eta_1(-x_1+x_2)+\frac{a_2}{(a_1b_2)(a_2b_3)}\eta_2(3x_1+x_2-2x_3)$$
$$+\frac{a_3}{(a_2b_3)(a_3b_1)}(\eta_3-4x_1-2x_2+2x_3),$$
$$0=\frac{b_1}{(a_3b_1)(a_1b_2)}\eta_1(-x_1+x_2)+\frac{b_2}{(a_1b_2)(a_2b_3)}\eta_2(3x_1+x_2-2x_3)$$
$$+\frac{b_3}{(a_2b_3)(a_3b_1)}\eta_3(-4x_1-2x_2+2x_3),$$

und in diesen Formeln können wir schliesslich noch für die $\eta_1\eta_2\eta_3$ ihre Werthe in den y substituiren.

Wir wählen als Zahlenbeispiel die Matrix $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ mit den Unterdeterminanten $(a_1b_2)=1$, $(a_2b_3)=1$, $(a_3b_1)=-2$. Führt man diese Werthe in die beiden Gleichungen ein, ersetzt die η durch ihre Ausdrücke in den y und ordnet schliesslich nach den x, so erhält man:

$$\text{XI}')\quad \left\{\begin{aligned} (-23y_1-y_2-y_3)x_1+(-11y_1-y_2+3y_3)x_2+(14y_1-2y_2+2y_3)x_3&=0, \\ (7y_1+y_2-y_3)x_1+(3y_1+y_2-y_3)x_2-4y_1x_3&=0, \end{aligned}\right.$$

und die Auflösung dieser Gleichungen liefert in der That genau wieder das System III') (S. 287):

$$x_1=-y_1^2-y_2^2-y_3^2+2(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)\ \text{u. s. w.},$$

von dem wir bei unserem Zahlenbeispiele ausgegangen waren; eben würde die Ordnung der Gleichungen XI') nach den y und deren hierauffolgende Auflösung nach den y die Gleichungen IX') unseres Zahlenbeispieles ergeben.

III. Statt sich zu fragen: welche Werthe der x'_1, x'_2, x'_3 stellen sich ein. wenn in die Formeln $\varrho x'_1=X_1$, $\varrho x'_2=X_2$, $\varrho x'_3=X_3$ rechts **direct** gewisse Werthe von x_1, x_2, x_3 eingeführt werden, die die drei rechts stehenden Ausdrücke verschwinden machen? kann man auch die Frage so stellen, dass man den Ort für die x'_1, x'_2, x'_3 sucht, für deren Coordinatenwerthe

die drei Curven $\frac{X_1}{x'_1}=\frac{X_2}{x'_2}=\frac{X_3}{x'_3}$ sich in einem ihrer festen gemeinschaftlichen (Haupt-) Punkte berühren.*

Denn im Falle einer Berührung in einem Hauptpunkte A können die obigen Formeln zunächst nur illusorische Werthe für die Coordinaten der x' geben, da die Curven X in solchem Falle ausser dem Berührpunkte (und den beiden *a priori* immer festen anderen Hauptpunkten) weiter keinen Schnittpunkt aufweisen, so dass also der für die Cremona-Transformation wesentliche, freie vierte Schnittpunkt eben diesmal gleichfalls in den gemeinschaftlichen Hauptpunkt A der Curven X hineingerückt ist.

Verfolgt man das Problem von diesem Gesichtspunkte aus weiter, so stellt sich das Resultat überaus einfach dar.

Es seien also x'_1, x'_2, x'_3 die Coordinaten eines Punktes x' von der gewünschten Eigenschaft — d. h., sie sollen drei Curven $\frac{X_1}{x'_1}=\frac{X_2}{x'_2}=\frac{X_3}{x'_3}$ liefern, die sich in A (von den Coordinaten x_1, x_2, x_3) berühren. Alsdann hat man zur Ermittelung der x' zunächst zu schreiben:

$$\frac{X_1}{x'_1}=\frac{X_2}{x'_2}=\frac{X_3}{x'_3}$$

oder

$$x'_2 X_1 - x'_1 X_2 = 0, \quad x'_3 X_1 - x'_1 X_3 = 0.$$

Sollen diese beiden Curven sich berühren, so müssen die ersten Differentialquotienten derselben entsprechend proportional sein — genommen in Bezug auf die drei Grössen x_1, x_2, x_3, die Coordinaten des Hauptpunktes A. D. h. es muss sein:

$$x'_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - x'_1 \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = \sigma\left(x'_3 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - x'_1 \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right),$$

$$x'_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - x'_1 \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = \sigma\left(x'_3 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - x'_1 \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right);$$

demnach muss die folgende Determinante verschwinden:

$$0=\begin{vmatrix} x'_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - x'_1 \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & x'_3 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - x'_1 \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \\ x'_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - x'_1 \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & x'_3 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - x'_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber nach dem Multiplicationssatze der Determinanten diese Determinante identisch mit dem Producte der beiden Matrices:

$$\begin{vmatrix} x'_2 & -x'_1 & 0 \\ x'_3 & 0 & -x'_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

* Die Entwickelungen dieses Abschnittes III sind allgemeiner Art, sie beziehen sich nicht ausschliesslich auf quadratische rationale Transformationen.

Andererseits ist aber nach den Elementen der Determinantentheorie bekannt, dass dieses Product auch entwickelt werden kann als Summe von drei Producten, welche als paarweise zu nehmende Factoren je zwei entsprechende Unterdeterminanten dieser Matrices aufweisen. Daher:

$$0 = \begin{vmatrix} -x'_1 & 0 \\ 0 & -x'_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'_2 & 0 \\ x'_3 & -x'_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} x'_2 & -x'_1 \\ x'_3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

oder, ausgerechnet und nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors x'_1:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0,$$

was zu beweisen war. (Vergl. Salmon, Höhere ebene Curven, Art. 339; sowie Clebsch-Lindemann, a. a. O. S. 481.)

Hierbei bedeuten, wie gesagt, die x_1, x_2, x_3 feste Zahlen, die Coordinaten jenes Hauptpunktes A, in welchem die Berührung stattfindet.

Diese Entwickelung lässt am besten ein klares Bild entstehen von den Vorgängen, die überhaupt bei der Annäherung an die singulären Stellen der x'- und der x-Ebene statthaben. Man kann zunächst einen Punkt x' so wählen, dass sein entsprechender Punkt x möglichst nahe an einen Hauptpunkt der x-Ebene zu liegen kommt. Alsdann kann man den x'-Punkt sich so weiter bewegen lassen, dass sein entsprechender Punkt x ganz in einen solchen Punkt selbst hineinfällt.

Hierbei ist die Bewegung von x keine freie; die Annäherung an die kritische Stelle muss im letzten Momente in einer bestimmten Richtung erfolgen, wie die Formeln

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\delta x_3 = 0$$

nebst den beiden zugehörigen darthun. Dagegen braucht der Punkt x' sich nur in beliebiger Weise irgend einer Stelle jener Geraden zu nähern, deren Gleichung wir auf der vorigen Seite bestimmt haben.

Wir geben noch das folgende vollständig durchgeführte Zahlenbeispiel. Es sei

$$\begin{aligned} \varrho x'_1 &= 5x_2^2 + 3x_1x_3 + 7x_2x_3, \\ \varrho x'_2 &= x_1^2 - 7x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1x_3 - 2x_2x_3, \\ \varrho x'_3 &= -x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2 + x_1x_3 - 5x_2x_3. \end{aligned}$$

Die drei Curven X_1, X_2, X_3 haben drei gemeinschaftliche Hauptpunkte; einer davon ist offenbar der Punkt

$$x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 0 : 1.$$

Für ihn ergiebt sich als Ort der x' (nach der Gleichung der vorigen Seite):

$$\begin{vmatrix} 0, & 7, & x'_1 \\ -1, & -2, & x'_2 \\ 1, & -5, & x'_3 \end{vmatrix} \equiv 7x'_1 + 7x'_2 + 7x'_3 = 0.$$

Nehmen wir $x'_1 = -1$, $x'_2 = 1$, $x'_3 = 0$, so erhält man aus $\frac{X_1}{x'_1} = \frac{X_2}{x'_2} = \frac{X_3}{x'_3}$ diesmal $X_3 = 0$ und $X_1 + X_2 = 0$. Demnach entstehen die Curven (welche den entsprechenden Punkt X durch ihren vierten Schnittpunkt liefern sollten):

$$X_3 \equiv -x^2 - 3y^2 - xy + x - 5y = 0,$$
$$X_1 + X_2 \equiv x^2 + 7y^2 - 4xy - x + 5y = 0.$$

Wie man aus den in x und y linearen Gliedern dieser beiden Gleichungen erkennt, berühren sich die beiden Curven längs der Geraden $x - 5y = 0$ im Anfangspunkte. Demnach liefern dieselben in der That keinen weiteren vierten Schnittpunkt.

München, Herbst 1886.

Kleinere Mittheilungen.

XXI. Construction einer Curve VI. Ordnung aus sieben Doppelpunkten und sechs einfachen Punkten.

Im 2. Hefte S. 98 dieser Zeitschrift findet sich die Construction einer C_6 aus $1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15$. Diese Construction ist quadratisch, soweit sie dort mitgetheilt worden ist; im weitern Verlaufe ist sie kubisch. Durch einen bestimmten Grenzübergang gelingt es, aus dieser Construction die einer C_6 aus $1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8\,9\,10\,11\,12\,13$ abzuleiten.

Als Vorübung dazu in einem gewissen Sinne diente mir die Aufgabe, aus sieben gegebenen Punkten $1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7$ einer C_3 ein Kegelschnittbüschel, das in $2\,3\,4\,5$ getragen wird, und ein die Curve erzeugendes projectives Strahlbüschel abzuleiten, ohne dabei von der bekannten Construction der Curve aus einer Strahlinvolution nebst projectivem Strahlbüschel Gebrauch zu machen.

Es seien $a_x^2=0$, $\alpha_x^2=0$ die Kegelschnitte des Büschels, die durch 6 und 7 gehen; ferner $b_x=0$, $\beta_x=0$ die entsprechenden Strahlen; endlich ξ_k die Coordinaten des Doppelpunktes 1 und $\xi_k+\delta_k$, $\xi_k+\varepsilon_k$ die zweier unendlich nahen Punkte. Die Curve III. Ordnung

$$1)\qquad R\equiv\begin{vmatrix}\dfrac{a_x^2}{a_\xi^2} & \dfrac{\alpha_x^2}{\alpha_\xi^2}\\[2mm] \dfrac{b_x}{b_\xi} & \dfrac{\beta_x}{\beta_\xi}\end{vmatrix}=0$$

enthält den Punkt ξ_k; soll sie auch noch die beiden Nachbarpunkte $\xi_k+\delta_k$ $\xi_k+\varepsilon_k$ enthalten, so muss

$$2)\qquad \begin{vmatrix}\dfrac{a_{\xi+\delta}^2}{a_\xi^2} & \dfrac{\alpha_{\xi+\delta}^2}{\alpha_\xi^2}\\[2mm] \dfrac{b_{\xi+\delta}}{b_\xi} & \dfrac{\beta_{\xi+\delta}}{\beta_\xi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{a_{\xi+\varepsilon}^2}{a_\xi^2} & \dfrac{\alpha_{\xi+\varepsilon}^2}{\alpha_\xi^2}\\[2mm] \dfrac{b_{\xi+\varepsilon}}{b_\xi} & \dfrac{\beta_{\xi+\varepsilon}}{\beta_\xi}\end{vmatrix}=0.$$

Da nun

$$a_{\xi+\delta}^2\equiv a_\xi^2+2a_\xi a_\delta+a_\delta^2,\quad b_{\xi+\delta}\equiv b_\xi+b_\delta,$$

so geht, wenn Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt werden, 2) über in

$$\begin{vmatrix}1+\dfrac{2a_\xi a_\delta}{a_\xi^2}, & 1+\dfrac{2\alpha_\xi\alpha_\delta}{\alpha_\xi^2}\\[2mm] 1+\dfrac{b_\delta}{b_\xi}, & 1+\dfrac{\beta_\delta}{\beta_\xi}\end{vmatrix}=0,$$

woraus folgt

3) $$\frac{2a_\xi a_\delta}{a_\xi^2} - \frac{2\alpha_\xi \alpha_\delta}{\alpha_\xi^2} = \frac{b_\delta}{b_\xi} - \frac{\beta_\delta}{\beta_\xi}.$$

Ebenso erhält man

4) $$\frac{2a_\xi a_\epsilon}{a_\xi^2} - \frac{2\alpha_\xi \alpha_\epsilon}{\alpha_\xi^2} = \frac{b_\epsilon}{b_\xi} - \frac{\beta_\epsilon}{\beta_\xi}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$A_k \equiv \frac{2a_\xi a_k}{a_\xi^2} - \frac{2\alpha_\xi \alpha_k}{\alpha_\xi^2} - \frac{b_k}{b_\xi} + \frac{\beta_k}{\beta_\xi},$$

so gehen 4) und 5) über in

6) $$A_1 \delta_1 + A_2 \beta_2 + A_3 \delta_3 = 0,$$

7) $$A_1 \epsilon_1 + A_2 \epsilon_2 + A_3 \epsilon_3 = 0;$$

ferner ist identisch

$$A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3 = 0,$$

folglich ist

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0.$$

Nun ist aber

$$A_1 = \frac{\partial R}{\partial \xi_1}, \quad A_2 = \frac{\partial R}{\partial \xi_2}, \quad A_3 = \frac{\partial R}{\partial \xi_3};$$

daher folgt, dass die Curve in der That in ξ_k einen Doppelpunkt hat, dessen Tangenten im Allgemeinen natürlich von den Geraden ξ_k, $\xi_k + \delta_k$ und ξ_k, $\xi_k + \epsilon_k$ verschieden sind. Die Construction schliesst sich am besten den Gleichungen 3) und 4) an, obgleich dieselben die für die Aufgabe ganz einflusslosen Punkte $\xi_k + \delta_k$, $\xi_k + \epsilon_k$ enthalten. Die nächstliegende Uebertragung — wenn auch vielleicht nicht die einfachste Construction — dürfte folgende sein.

Mit Benutzung einer willkürlichen Zahl m bilde man aus 3)

$$\frac{b_{\xi+m\delta}}{b_\xi} - \frac{\beta_{\xi+m\delta}}{\beta_\xi} = \frac{2a_\xi a_{\xi+m\delta}}{a_\xi^2} - \frac{2\alpha_\xi \alpha_{\xi+m\delta}}{\alpha_\xi^2}.$$

Werden die Punkte $\xi_k + m\delta_k$ mit C, ξ_k mit B bezeichnet, sind ferner S, Σ die Spuren von $b_x = 0$ und $\beta_x = 0$ auf BC, so ist

$$\frac{b_{\xi+m\delta}}{b_\xi} = \frac{SC}{SB}, \quad \frac{\beta_{\xi+m\delta}}{\beta_\xi} = \frac{\Sigma C}{\Sigma B}.$$

Sind ferner $T_1 T_2$, sowie $\mathsf{T}_1 \mathsf{T}_2$ die Spuren von $a_x^2 = 0$ und $\alpha_x^2 = 0$ auf BC, so ist

$$\frac{2a_\xi a_{\xi+m\delta}}{a_\xi^2} = \frac{T_1 C}{T_1 B} + \frac{T_2 C}{T_2 B}, \quad \frac{2\alpha_\xi \alpha_{\xi+m\delta}}{\alpha_\xi^2} = \frac{\mathsf{T}_1 C}{\mathsf{T}_1 B} + \frac{\mathsf{T}_2 C}{\mathsf{T}_2 B};$$

daher folgt aus 3)

$$\frac{SC}{SB} - \frac{\Sigma C}{\Sigma B} = \frac{T_1 C}{T_1 B} + \frac{T_2 C}{T_2 B} - \left(\frac{\mathsf{T}_1 C}{\mathsf{T}_1 B} + \frac{\mathsf{T}_2 C}{\mathsf{T}_2 B}\right).$$

Durch elementare Constructionen kann man die Punkte X und Ξ so bestimmen, dass

$$\frac{XC}{XB} = \frac{T_1 C}{T_1 B} + \frac{T_2 C}{T_2 B}, \quad \frac{\Xi C}{\Xi B} = \frac{\mathsf{T}_1 C}{\mathsf{T}_1 B} + \frac{\mathsf{T}_2 C}{\mathsf{T}_2 B};$$

alsdann hat man

$$\frac{SC}{SB}-\frac{\Sigma C}{\Sigma B}=\frac{XC}{XB}-\frac{\Xi C}{\Xi B}.$$

Die Punktepaare P und Π, für welche

$$\frac{PC}{PB}-\frac{\Pi C}{\Pi B}=const.,$$

bilden die entsprechenden Punkte zweier projectiven Reihen, welche, wie man sofort sieht, in B zwei zusammenfallende Doppelpunkte haben. Also entsprechen S und Σ, X und Σ einander in einer projectiven Beziehung, bei welcher die Doppelpunkte in B zusammenfallen.

Bestimmt man noch auf elementare Weise den Punkt Γ so, dass

$$-\frac{\Gamma C}{\Gamma B}=\frac{XC}{XB}-\frac{\Xi C}{\Xi B},$$

so ist Γ der entsprechende zu C, und man hat

$$(B, X, C, S) \barwedge (B, \Xi, \Gamma, \Sigma),$$

wobei die projective Beziehung durch die drei bekannten Paare $(B, X, C) \barwedge (B, \Xi, \Gamma)$ festgelegt ist.

Ebenso ergeben sich die Spuren der $b_x = 0$ und $\beta_x = 0$ auf BD, wo D den Punkt $\xi_k + \{n \varepsilon_k$ bezeichnet, als entsprechende zweier projectiven Reihen. Projicirt man die Reihen auf BC von 6 bez. 7 aus, so ist das Erzeugniss ein Kegelschnitt, der 6, 7 und B enthält; und indem man ebenso die Reihen auf BD von 6 und 7 aus projicirt, erhält man einen Kegelschnitt durch dieselben drei Punkte. Der vierte Schnittpunkt derselben ist der gesuchte Punkt, welcher in der gesuchten C_3 den Schnittpunkten von $a_x^2 = 0$ und $\alpha_x^2 = 0$ gegenüberliegt.

Ebenso, wie die vorige Construction aus der einer C_3 aus neun Punkten dadurch hergestellt worden ist, dass man zwei dieser neun Punkte, nämlich $\xi_k + \delta_k$ und $\xi_k + \varepsilon_k$, als unendlich nahe bei dem Punkte ξ_k gelegen annahm, kann man aus der Construction der

C_6 aus $1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\;7\;8\;9\;10\;11\;12\;13\;14\;15$

die der C_6 aus $1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8\;9\;10\;11\;12\;13$

in der Weise herstellen, dass man die Punkte 14 und 15 als Nachbarpunkte von 7 voraussetzt.

Des Zusammenhangs wegen gestatte ich mir, zunächst die zu Grunde liegenden Entwickelungen nochmals vollständig in Kürze mitzutheilen.*

Den Ausgangspunkt bildet die Aufgabe: zwei Punkte zu finden, von denen aus zwei gegebene Gruppen von je sieben Punkten durch zwei projective Büschel projicirt werden.

Wird für jede Gruppe ein Coordinatensystem zu Grunde gelegt, dessen Ecken in drei Punkte 1, 2, 3, bez. 1', 2', 3' dieser Gruppe fallen, sind

---

* Eine ausführliche Darstellung ist enthalten in meiner Abhandlung: Die Construction einer Fläche II. Ordnung aus neun gegebenen Punkten; Leipzig 1881.

ferner α_k und α'_k die Coordinaten zweier anderer entsprechender Punkte 4 und 4' der beiden Gruppen, und ξ_k, ξ'_k die Coordinaten zweier Punkte P und P', so sind die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\text{des Strahles } PA_1: \quad T_1 \equiv \xi_3 x_2 - \xi_2 x_3 = 0,\\
&\quad\text{"}\quad\text{"}\quad PA_2: \quad T_2 \equiv \xi_1 x_3 - \xi_3 x_1 = 0,\\
&\quad\text{"}\quad\text{"}\quad PA_3: \quad T_3 \equiv \xi_3 x_1 - \xi_1 x_2 \equiv -\frac{1}{\xi_3}(\xi_1 T_1 + \xi_2 T_2) = 0,\\
&\quad\text{"}\quad\text{"}\quad PA_4: \quad T_4 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \equiv \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3 = 0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv \frac{1}{\xi_3}[(\alpha_1 \xi_3 - \alpha_3 \xi_1) T_1 + (\alpha_2 \xi_3 - \alpha_3 \xi_2) T_2].
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich für das Doppelverhältniss der vier Strahlen

$$(T_1 T_2 T_3 T_4) = \left(\frac{\alpha_1}{\xi_1} - \frac{\alpha_3}{\xi_3}\right) : \left(\frac{\alpha_2}{\xi_2} - \frac{\alpha_3}{\xi_3}\right).$$

Ebenso findet man für die Strahlen $P'(1'2'3'4')$

$$(T'_1 T'_2 T'_3 T'_4) = \left(\frac{\alpha'_1}{\xi'_1} - \frac{\alpha'_3}{\xi'_3}\right) : \left(\frac{\alpha'_2}{\xi'_2} - \frac{\alpha'_3}{\xi'_3}\right).$$

Diese Doppelverhältnisse sind gleich, wenn

$$\left(\frac{\alpha_1}{\xi_1} - \frac{\alpha_3}{\xi_3}\right) : \left(\frac{\alpha_2}{\xi_2} - \frac{\alpha_3}{\xi_3}\right) = \left(\frac{\alpha'_1}{\xi'_1} - \frac{\alpha'_3}{\xi'_3}\right) : \left(\frac{\alpha'_2}{\xi'_2} - \frac{\alpha'_3}{\xi'_3}\right)$$

oder, in geeigneterer Form:

$$1) \qquad K_4 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{\xi_1} & \frac{\alpha_2}{\xi_2} & \frac{\alpha_3}{\xi_3} \\ \frac{\alpha'_1}{\xi'_1} & \frac{\alpha'_2}{\xi'_2} & \frac{\alpha'_3}{\xi'_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sind β_k und β'_k die Coordinaten von 5 und 5', so ergiebt sich die Bedingung für die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$P(1235) = P'(1'2'3'5')$$

zu

$$2) \qquad K_5 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\beta_1}{\xi_1} & \frac{\beta_2}{\xi_2} & \frac{\beta_3}{\xi_3} \\ \frac{\beta'_1}{\xi'_1} & \frac{\beta'_2}{\xi'_2} & \frac{\beta'_3}{\xi'_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zu jedem Punkte P bestimmt sich nach 1) und 2) der entsprechende Punkt P' im Allgemeinen eindeutig. Man construirt die Kegelschnitte K_4 und K_5, von denen aus die Gruppen $1'2'3'4'$ und $1'2'3'5'$ unter Doppelverhältnissen $(T_1 T_2 T_3 T_4)$ bez. $(T'_1 T'_2 T'_3 T'_5)$ projicirt werden. Diese beiden Kegelschnitte haben die Punkte $1'2'3'$ gemein; ihr vierter Schnittpunkt ist P'.

Nimmt man P auf dem Perimeter des Kegelschnittes 12345 beliebig an, so entspricht ihm ein bestimmter Punkt, der mit B' bezeichnet werde; dieser Punkt B' entspricht also nicht einem bestimmten Punkte des andern Systems, sondern allen Punkten des Kegelschnittes 12345. Ebenso entspricht allen Punkten des Kegelschnittes 1'2'3'4'5' ein einziger Punkt B. Diese beiden Punkte B und B' bezeichnen wir als die mit den Gruppen 12345 und 1'2'3'4'5' verbundenen Punkte. Ihre Coordinaten ϱ_k und ϱ'_k ergeben sich aus den Gleichungen, die aus 1) und 2) hervorgehen:

$$3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{\varrho_1} & \frac{\alpha_2}{\varrho_2} & \frac{\alpha_3}{\varrho_3} \\ \frac{\alpha'_1}{\beta'_1} & \frac{\alpha'_2}{\beta'_2} & \frac{\alpha'_3}{\beta'_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\beta_1}{\varrho_1} & \frac{\beta_2}{\varrho_2} & \frac{\beta_3}{\varrho_3} \\ \frac{\beta'_1}{\alpha'_1} & \frac{\beta'_2}{\alpha'_2} & \frac{\beta'_3}{\alpha'_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{\beta_1} & \frac{\alpha_2}{\beta_2} & \frac{\alpha_3}{\beta_3} \\ \frac{\alpha'_1}{\varrho'_1} & \frac{\alpha'_2}{\varrho'_2} & \frac{\alpha'_3}{\varrho'_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\beta_1}{\alpha_1} & \frac{\beta_2}{\alpha_2} & \frac{\beta_3}{\alpha_3} \\ \frac{\beta'_1}{\varrho'_1} & \frac{\beta'_2}{\varrho'_2} & \frac{\beta'_3}{\varrho'_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus denselben folgen die Lösungen

$$5)\qquad \varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 = \frac{\alpha'_2\beta'_3 - \alpha'_3\beta'_2}{\alpha_2\alpha'_3\beta'_2\beta_3 - \alpha'_2\alpha_3\beta_2\beta'_3} : \frac{\alpha'_3\beta'_1 - \alpha'_1\beta'_3}{\alpha_3\alpha'_1\beta'_3\beta_1 - \alpha'_3\alpha_1\beta_3\beta'_1} : \frac{\alpha'_1\beta'_2 - \alpha'_2\beta'_1}{\alpha_1\alpha'_2\beta'_1\beta_2 - \alpha'_1\alpha_2\beta_1\beta'_2},$$

$$6)\qquad \varrho'_1 : \varrho'_2 : \varrho'_3 = \frac{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2}{\alpha'_2\alpha_3\beta_2\beta'_3 - \alpha_2\alpha'_3\beta'_2\beta_3} : \frac{\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3}{\alpha'_3\alpha_1\beta_3\beta'_1 - \alpha_3\alpha'_1\beta'_3\beta_1} : \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\alpha'_1\alpha_2\beta_1\beta'_2 - \alpha_1\alpha'_2\beta'_1\beta_2}.$$

Die erste der Gleichungen 3) kann man schreiben

$$\left(\frac{\alpha_2}{\varrho_2} - \frac{\alpha_3}{\varrho_3}\right)\frac{\alpha'_1}{\beta'_1} + \left(\frac{\alpha_3}{\varrho_3} - \frac{\alpha_1}{\varrho_1}\right)\frac{\alpha'_2}{\beta'_2} + \left(\frac{\alpha_1}{\varrho_1} - \frac{\alpha_2}{\varrho_2}\right)\frac{\alpha'_3}{\beta'_3} = 0;$$

fügt man hierzu die Identität

$$\left(\frac{\alpha_2}{\varrho_2} - \frac{\alpha_3}{\varrho_3}\right) + \left(\frac{\alpha_3}{\varrho_3} - \frac{\alpha_1}{\varrho_1}\right) + \left(\frac{\alpha_1}{\varrho_1} - \frac{\alpha_2}{\varrho_2}\right) = 0,$$

so erkennt man die Proportion

$$7)\qquad \left(\frac{\alpha_2}{\varrho_2} - \frac{\alpha_3}{\varrho_3}\right) : \left(\frac{\alpha_3}{\varrho_3} - \frac{\alpha_1}{\varrho_1}\right) : \left(\frac{\alpha_1}{\varrho_1} - \frac{\alpha_2}{\varrho_2}\right) = \left(\frac{\alpha'_2}{\beta'_2} - \frac{\alpha'_3}{\beta'_3}\right) : \left(\frac{\alpha'_3}{\beta'_3} - \frac{\alpha'_1}{\beta'_1}\right) : \left(\frac{\alpha'_1}{\beta'_1} - \frac{\alpha'_2}{\beta'_2}\right).$$

In gleicher Weise findet man aus der zweiten Gleichung des Systems 3)

$$8)\qquad \left(\frac{\beta_2}{\varrho_2} - \frac{\beta_3}{\varrho_3}\right) : \left(\frac{\beta_3}{\varrho_3} - \frac{\beta_1}{\varrho_1}\right) : \left(\frac{\beta_1}{\varrho_1} - \frac{\beta_2}{\varrho_2}\right) = \left(\frac{\beta'_2}{\alpha'_2} - \frac{\beta'_3}{\alpha'_3}\right) : \left(\frac{\beta'_3}{\alpha'_3} - \frac{\beta'_1}{\alpha'_1}\right) : \left(\frac{\beta'_1}{\alpha'_1} - \frac{\beta'_2}{\alpha'_2}\right).$$

Werden die Glieder der linken Seiten abkürzend mit r_{ik} und s_{ik} bezeichnet, so erhält man aus 5) und 6)

9) $$\frac{r_{23}}{(\alpha'_2\beta'_3)\beta'_1}=\frac{r_{31}}{(\alpha'_3\beta'_1)\beta'_2}=\frac{r_{12}}{(\alpha'_1\beta'_2)\beta'_3}=L,$$

10) $$\frac{s_{23}}{(\alpha'_2\beta'_3)\alpha'_1}=\frac{s_{31}}{(\alpha'_3\beta'_1)\alpha'_2}=\frac{s_{12}}{(\alpha'_1\beta'_2)\alpha'_3}=M,$$

wobei, wie immer, $(\alpha'_2\beta'_3)$ für $(\alpha'_2\beta'_3-\alpha'_3\beta'_2)$ gesetzt worden ist. Man erhält nun weiter

$$\alpha_2\alpha'_3M-\beta_2\beta'_3L=\frac{1}{(\alpha'_1\beta'_2)}(\alpha_2 s_{12}-\beta_2 r_{12})=-\frac{(\alpha_2\beta_2)}{(\alpha'_1\beta'_2)}\cdot\frac{1}{\varrho_1},$$

$$\alpha'_2\alpha_3M-\beta'_2\beta_3L=\frac{1}{(\alpha'_3\beta'_1)}(\alpha_3 s_{31}-\beta_3 r_{31})=-\frac{(\alpha_1\beta_3)}{(\alpha'_1\beta'_3)}\cdot\frac{1}{\varrho_1}.$$

Setzt man nach 5) und 6)

$$\varrho_1=\mu\cdot\frac{(\alpha'_2\beta'_3)}{(\alpha_2\alpha'_3\beta'_2\beta_3)},\quad \varrho'_1=\mu'\cdot\frac{(\alpha_2\beta_3)}{(\alpha_2\alpha'_3\beta'_2\beta_3)}\quad \text{u. s. w.},$$

so erhält man

$$\frac{(\alpha_1\beta_2)}{(\alpha'_1\beta'_2)}=\frac{\mu}{\mu'}\cdot\frac{\varrho'_3}{\varrho_3},\quad \frac{(\alpha_1\beta_3)}{(\alpha'_1\beta'_3)}=\frac{\mu}{\mu'}\cdot\frac{\varrho'_2}{\varrho_2}.$$

Daher folgt

$$\alpha_2\alpha'_3M-\beta_2\beta'_3L=-\frac{\mu}{\mu'}\cdot\frac{1}{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}\cdot\varrho_2\varrho'_3,$$

$$\alpha_3\alpha'_2M-\beta_3\beta'_2L=-\frac{\mu}{\mu'}\cdot\frac{1}{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}\cdot\varrho_3\varrho'_2.$$

Die Gleichungen $K_4=0$ und $K_5=0$ kann man in der Form schreiben

$$K_4\equiv\left(\frac{\alpha_2}{\xi_2}-\frac{\alpha_3}{\xi_3}\right)\frac{\alpha'_1}{\xi'_1}+\left(\frac{\alpha_3}{\xi_3}-\frac{\alpha_1}{\xi_1}\right)\frac{\alpha'_2}{\xi'_2}+\left(\frac{\alpha_1}{\xi_1}-\frac{\alpha_2}{\xi_2}\right)\frac{\alpha'_3}{\xi'_3}=0,$$

$$K_5\equiv\left(\frac{\beta_2}{\xi_2}-\frac{\beta_3}{\xi_3}\right)\frac{\beta'_1}{\xi'_1}+\left(\frac{\beta_3}{\xi_3}-\frac{\beta_1}{\xi_1}\right)\frac{\beta'_2}{\xi'_2}+\left(\frac{\beta_1}{\xi_1}-\frac{\beta_2}{\xi_2}\right)\frac{\beta'_3}{\xi'_3}=0.$$

Daher hat man

$$MK_4-LK_5\equiv-\frac{\mu}{\mu'\varrho_1\varrho_2\varrho_3}\left\{\left(\frac{\varrho_2}{\xi_2}-\frac{\varrho_3}{\xi_3}\right)\frac{\varrho'_1}{\xi'_1}+\left(\frac{\varrho_3}{\xi_3}-\frac{\varrho_1}{\xi_1}\right)\frac{\varrho'_2}{\xi'_2}+\left(\frac{\varrho_1}{\xi_1}-\frac{\varrho_2}{\xi_2}\right)\frac{\varrho'_3}{\xi'_3}\right\}.$$

Wenn zwei Punkte Π und Π' die Gleichungen $K_4=0$ und $K_5=0$ erfüllen, so ist daher auch

$$\left(\frac{\varrho_2}{\xi_2}-\frac{\varrho_3}{\xi_3}\right)\frac{\varrho'_1}{\xi'_1}+\left(\frac{\varrho_3}{\xi_3}-\frac{\varrho_1}{\xi_1}\right)\frac{\varrho'_2}{\xi'_2}+\left(\frac{\varrho_1}{\xi_1}-\frac{\varrho_2}{\xi_2}\right)\frac{\varrho'_3}{\xi'_3}=0.$$

Hieraus ersieht man: Wenn von den Punkten Π und Π' aus die Gruppen 12345 und 1'2'3'4'5' durch projective Büschel projicirt werden, so gehen entsprechende Strahlen dieser Büschel auch durch die verbundenen Punkte B und B', es ist

$$\Pi(12345B)\,\overline{\wedge}\,\Pi'(1'2'3'4'5'B').$$

Für zwei Punkte Π und Π', welche der Bedingung genügen

$$\Pi(123456)\,\overline{\wedge}\,\Pi'(1'2'3'4'5'6'),$$

gelten die Gleichungen, wenn γ_k die Coordinaten von 6 sind:

$$K_4\equiv\left(\frac{\alpha_2}{\xi_2}-\frac{\alpha_3}{\xi_3}\right)\frac{\alpha'_1}{\xi'_1}+\left(\frac{\alpha_3}{\xi_3}-\frac{\alpha_1}{\xi_1}\right)\frac{\alpha'_2}{\xi'_2}+\left(\frac{\alpha_1}{\xi_1}-\frac{\alpha_2}{\xi_2}\right)\frac{\alpha'_3}{\xi'_3}=0,$$

$$K_5 \equiv \left(\frac{\beta_2}{\xi_2} - \frac{\beta_3}{\xi_3}\right)\frac{\beta'_1}{\xi'_1} + \left(\frac{\beta_3}{\xi_3} - \frac{\beta_1}{\xi_1}\right)\frac{\beta'_2}{\xi'_2} + \left(\frac{\beta_1}{\xi_1} - \frac{\beta_2}{\xi_2}\right)\frac{\beta'_3}{\xi'_3} = 0,$$

$$K_6 \equiv \left(\frac{\gamma_2}{\xi_2} - \frac{\gamma_3}{\xi_3}\right)\frac{\gamma'_1}{\xi'_1} + \left(\frac{\gamma_3}{\xi_3} - \frac{\gamma_1}{\xi_1}\right)\frac{\gamma'_2}{\xi'_2} + \left(\frac{\gamma_1}{\xi_1} - \frac{\gamma_2}{\xi_2}\right)\frac{\gamma'_3}{\xi'_3} = 0.$$

Der Punkt Π ist daher der Bedingung unterworfen

$$R \equiv \begin{vmatrix} (\alpha_2\xi_3)\alpha'_1 & (\alpha_3\xi_1)\alpha'_2 & (\alpha_1\xi_2)\alpha'_3 \\ (\beta_2\xi_3)\beta'_1 & (\beta_3\xi_1)\beta'_2 & (\beta_1\xi_2)\beta'_3 \\ (\gamma_2\xi_3)\gamma'_1 & (\gamma_3\xi_1)\gamma'_2 & (\gamma_1\xi_2)\gamma'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso folgt für die entsprechende Curve

$$R' \equiv [(\alpha'_2\xi'_3)\alpha_1 . (\beta'_3\xi'_1)\beta_2 . (\gamma'_1\xi'_2)\gamma_3] = 0.$$

Die Punkte Π und Π', von denen aus die Gruppen 123456 und 1'2'3'4'5'6' durch projective Büschel projicirt werden, sind auf zwei Curven III. Ordnung $R=0$ und $R'=0$ enthalten. Die Curve R geht, wie ihre Gleichung lehrt, durch die Ecken 123 des Axendreiecks, sowie durch die Punkte 456; wie die Proportionen 7) und 8) lehren, liegen auf ihr noch die Punkte $BCDEFG$, welche mit den in 123456 enthaltenen sechs fünfpunktigen Gruppen verbunden sind. Ebenso liegen auf $R'=0$ die Punkte 1'2'3'4'5'6', sowie die mit diesen verbundenen Punkte $B'C'D'E'F'G'$; durch die angegebenen je zwölf Punkte sind beide Curven überreichlich bestimmt.

Construirt man ausser diesen Curven R und R' noch nach derselben Methode die Curven S und S' unter Zugrundelegung der Punkte 123457 bez. 1'2'3'4'5'7', so haben R und S die Punkte 12345B, R' und S' die Punkte 1'2'3'4'5'B' gemein; die übrigen Schnittpunkte ordnen sich zu drei Punktpaaren $\Pi_1\Pi'_1$, $\Pi_2\Pi'_2$, $\Pi_3\Pi'_3$, von denen aus die beiden Gruppen 1234567 und 1'2'3'4'5'6'7' durch projective Büschel projicirt werden.*

Wenn nun die Punkte 5 und 6 dem Punkte 4 unendlich nahe rücken, so setze man

$$\beta_k = \alpha_k + \delta_k, \quad \gamma_k = \alpha_k + \varepsilon_k;$$
$$\beta'_k = \alpha'_k + \delta'_k, \quad \gamma'_k = \alpha'_k + \varepsilon'_k,$$

wobei δ_k, ε_k, δ'_k, ε'_k zur Grenze Null abnehmen müssen. Alsdann erhält man

$$(\beta_2\xi_3) = (\alpha_2\xi_3) + (\delta_2\xi_3), \quad (\gamma_2\xi_3) = (\alpha_2\xi_3) + (\varepsilon_2\xi_3);$$
$$(\beta'_2\xi'_3) = (\alpha'_2\xi'_3) + (\alpha'_2\xi'_3), \quad (\gamma'_2\xi'_3) = (\alpha'_2\xi'_3) + (\varepsilon'_2\xi'_3);$$

$$R = \begin{vmatrix} (\alpha_2\xi_3)\alpha'_1, & (\alpha_3\xi_1)\alpha'_2, & (\alpha_1\xi_2)\alpha'_3 \\ [(\alpha_2\xi_3)+(\delta_2\xi_3)][\alpha'_1+\delta'_1], & [(\alpha_3\xi_1)+(\delta_3\xi_1)][\alpha'_2+\delta'_2], & [(\alpha_1\xi_2)+(\delta_1\xi_2)][\alpha'_3+\delta'_3] \\ [(\alpha_2\xi_3)+(\varepsilon_2\xi_3)][\alpha'_1+\varepsilon'_1], & [(\alpha_3\xi_1)+(\varepsilon_3\xi_1)][\alpha'_2+\varepsilon'_2], & [(\alpha_1\xi_2)+(\varepsilon_1\xi_2)][\alpha'_3+\varepsilon'_3] \end{vmatrix} = 0$$

---

* Abadie, Terquem et Gerono, Nouv. Ann. Bd. 14 S. 142. — Poudra, das. Bd. 15 S. 58, 1856. — De Jonquières, das. Bd. 17, S. 399, 1858. — Cremona, das. Bd. 20 S. 452, 1861. — Hesse, Die kubische Gleichung etc. Crelle, Bd. 62 S. 188, 1863. — Sturm, Das Problem der Projectivität etc. Math. Ann. Bd. 1 S. 533, 1869.

Das endliche Glied verschwindet identisch, als Determinante von drei identischen Zeilen; auch verschwinden alle Glieder, welche mit unendlich kleinen Factoren linear multiplicirt sind, weil bei diesen Determinanten zwei Zeilen identisch sind. Mit zwei unendlich kleinen Gliedern II. Ordnung von der Form $\delta_m \delta'_n$ oder $\varepsilon_m \varepsilon'_n$ sind ebenfalls nur zwei verschwindende Determinanten behaftet.

Unterdrückt man die unendlich kleinen Glieder dritter und höherer Ordnung, so reducirt sich schliesslich die Gleichung der Curve auf

$$11)\quad R=\begin{vmatrix}(\alpha_2\xi_3)\alpha'_1 & (\alpha_3\xi_1)\alpha'_2 & (\alpha_1\xi_2)\alpha'_3\\ (\alpha_2\xi_3)\delta'_1 & (\alpha_3\xi_1)\delta'_2 & (\alpha_1\xi_2)\delta'_3\\ (\alpha_2\xi_3)\varepsilon'_1 & (\alpha_3\xi_1)\varepsilon'_2 & (\alpha_1\xi_2)\varepsilon'_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(\alpha_2\xi_3)\alpha'_1\ldots\\ (\alpha_2\xi_3)\delta'_1\ldots\\ (\varepsilon_2\xi_3)\alpha'_1\ldots\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(\alpha_2\xi_3)\alpha'_1\ldots\\ (\delta_2\xi_3)\alpha'_1\ldots\\ (\alpha_2\xi_3)\varepsilon'_1\ldots\end{vmatrix}=0.$$

Das erste Glied ist

$$(\alpha'_1\delta'_2\varepsilon'_3).\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3,$$

wobei $\mathfrak{T}_1=0$, $\mathfrak{T}_2=0$, $\mathfrak{T}_3=0$ die Gleichungen der Geraden 14, 24, 34 sind. Das zweite Glied lässt die Umgestaltung zu

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{T}_1\alpha'_1 & \mathfrak{T}_2\alpha'_2 & \mathfrak{T}_3\alpha'_3\\ \mathfrak{T}_1\delta'_1 & \mathfrak{T}_2\delta'_2 & \mathfrak{T}_3\delta'_3\\ (\varepsilon_2\xi_3)\alpha'_1 & (\varepsilon_3\xi_1)\alpha'_2 & (\varepsilon_1\xi_2)\alpha'_3\end{vmatrix}=\frac{\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3}{\xi_1\xi_2\xi_3}\begin{vmatrix}\xi_1\mathfrak{T}_1 & \xi_2\mathfrak{T}_2 & \xi_3\mathfrak{T}_3\\ \xi_1\mathfrak{T}_1\frac{\delta'_1}{\alpha'_1} & \xi_2\mathfrak{T}_2\frac{\delta'_2}{\alpha'_2} & \xi_3\mathfrak{T}_3\frac{\delta'_3}{\alpha'_3}\\ \xi_1(\varepsilon_2\xi_3) & \xi_2(\varepsilon_3\xi_1) & \xi_3(\varepsilon_1\xi_2)\end{vmatrix}.$$

Beachtet man nun, dass

$$\xi_1\mathfrak{T}_1+\xi_2\mathfrak{T}_2+\xi_3\mathfrak{T}_3\equiv 0,\quad \xi_1(\varepsilon_2\xi_3)+\xi_2(\varepsilon_3\xi_1)+\xi_3(\varepsilon_1\xi_2)\equiv 0,$$

so geht dies über in

$$\frac{\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3}{\xi_1}\left(\frac{\delta'_1}{\alpha'_1}\xi_1\mathfrak{T}_1+\frac{\delta'_2}{\alpha'_2}\xi_2\mathfrak{T}_2+\frac{\delta'_3}{\alpha'_3}\xi_3\mathfrak{T}_3\right).\begin{vmatrix}(\varepsilon_3\xi_1) & (\varepsilon_1\xi_2)\\ \mathfrak{T}_2 & \mathfrak{T}_3\end{vmatrix}.$$

Da nun

$$\begin{aligned}(\varepsilon_3\xi_1-\varepsilon_1\xi_3)\mathfrak{T}_3-(\varepsilon_1\xi_2-\varepsilon_2\xi_1)\mathfrak{T}_2&=\varepsilon_3\xi_1\mathfrak{T}_3+\varepsilon_2\xi_1\mathfrak{T}_2-\varepsilon_1(\xi_3\mathfrak{T}_3+\xi_2\mathfrak{T}_2)\\&=\xi_1(\varepsilon_1\mathfrak{T}_1+\varepsilon_2\mathfrak{T}_2+\varepsilon_3\mathfrak{T}_3),\end{aligned}$$

so ergiebt sich für das zweite Glied der Entwickelung 11) der Ausdruck

$$\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\left(\frac{\delta'_1}{\alpha'_1}\xi_1\mathfrak{T}_1+\frac{\delta'_2}{\alpha'_2}\xi_2\mathfrak{T}_2+\frac{\delta'_3}{\alpha'_3}\xi_3\mathfrak{T}_3\right)(\varepsilon_1\mathfrak{T}_1+\varepsilon_2\mathfrak{T}_2+\varepsilon_3\mathfrak{T}_3);$$

die Gleichung

$$V\equiv\varepsilon_1\mathfrak{T}_1+\varepsilon_2\mathfrak{T}_2+\varepsilon_3\mathfrak{T}_3=0$$

gehört der Geraden 45 zu, denn sie wird von den Coordinaten beider Punkte erfüllt.

Ebenso ergiebt sich für das letzte Glied der Entwickelung 11)

$$\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\left(\frac{\varepsilon'_1}{\alpha'_1}\xi_1\mathfrak{T}_1+\frac{\varepsilon'_2}{\alpha'_2}\xi_2\mathfrak{T}_2+\frac{\varepsilon'_3}{\alpha'_3}\xi_3\mathfrak{T}_3\right)\cdot U,$$

wobei

$$U\equiv\delta_1\mathfrak{T}_1+\delta_2\mathfrak{T}_2+\delta_3\mathfrak{T}_3=0$$

die Gleichung der Geraden 46 ist. Daher hat die Curve III. Ordnung in unserem Falle die Gleichung

$$
12)\quad \begin{aligned}
R \equiv & (\alpha'_1 \delta'_2 \varepsilon'_3)\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3 \\
& + \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\cdot\left(\frac{\delta'_1}{\alpha'_1}\xi_1\mathfrak{T}_1 + \frac{\delta'_2}{\alpha'_2}\xi_2\mathfrak{T}_2 + \frac{\delta'_3}{\alpha'_3}\xi_3\mathfrak{T}_3\right)\cdot V \\
& + \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\cdot\left(\frac{\varepsilon'_1}{\alpha'_1}\xi_1\mathfrak{T}_1 + \frac{\varepsilon'_2}{\alpha'_2}\xi_2\mathfrak{T}_2 + \frac{\varepsilon'_3}{\alpha'_3}\xi_3\mathfrak{T}_3\right)\cdot U = 0.
\end{aligned}
$$

Die Doppelpunktstangenten werden erhalten, indem man ξ_k durch $\alpha_k + \lambda x_k$ ersetzt und den Coefficienten von λ^2 mit Null vergleicht. Wird das Resultat der Substitution von x_k für ξ_k in die Functionen $\mathfrak{T}$, U, V wieder mit $\mathfrak{T}_x$, U_x, V_x bezeichnet, so ist

$$\mathfrak{T}_k(\alpha+\lambda x) = \lambda\mathfrak{T}_x, \quad V(\alpha+\lambda x) = \lambda V_y, \quad U(\alpha+\lambda x) = \lambda U_y,$$

und das Substitutionsergebniss von $\alpha + \lambda x$ in die Curvengleichung liefert

$$
\begin{aligned}
& (\alpha'\delta'\varepsilon')\mathfrak{T}_{1x}\mathfrak{T}_{2x}\mathfrak{T}_{3x}.\lambda^3 \\
& + \left(\frac{\delta'_1}{\alpha'_1}x_1\mathfrak{T}_{1x} + \ldots\right).V_x\lambda^3 + \left(\frac{\varepsilon'_1}{\alpha'_1}x_1\mathfrak{T}_{1x} + \ldots\right)\cdot U_x\lambda^3 \\
& + \left(\frac{\delta'_1}{\alpha'_1}\alpha_1\mathfrak{T}_{1x} + \ldots\right).V_x\lambda^2 - \left(\frac{\varepsilon'_1}{\alpha'_1}\alpha_1\mathfrak{T}_{1x} + \ldots\right)\cdot U_x\lambda^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung der Doppelpunktstangenten ist hiernach

$$13)\quad \left(\frac{\delta'_1}{\alpha'_1}\alpha_1\mathfrak{T}_{1x} + \ldots\right)V_x - \left(\frac{\varepsilon'_1}{\alpha'_1}\alpha\,\mathfrak{T}_{1x} + \ldots\right)U_x = 0.$$

Wir schreiben hierfür abkürzend, indem wir den Index x unterdrücken,

$$14)\quad U_1 V - V_1 U = 0.$$

Hierbei ist

$$U_1 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \frac{\delta'_1}{\alpha'_1}\alpha_1 & \frac{\delta'_2}{\alpha'_2}\alpha_2 & \frac{\delta'_3}{\alpha'_3}\alpha_3 \end{vmatrix}, \quad V_1 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \frac{\varepsilon'_1}{\alpha'_1}\alpha_1 & \frac{\varepsilon'_2}{\alpha'_2}\alpha_2 & \frac{\varepsilon'_3}{\alpha'_3}\alpha_3 \end{vmatrix}.$$

Die Geraden $U_1 = 0$ und $V_1 = 0$ lassen sich in einfacher Weise construiren. Ein auf der Geraden α'_k, $\alpha'_k + \delta'_k$ beliebig angenommener Punkt hat die Coordinaten $y'_k = \alpha'_k + m\delta'_k$; bildet man nun y_k nach der Proportion

$$\frac{y_1}{\alpha_1} : \frac{y_2}{\alpha_2} : \frac{y_3}{\alpha_3} = \frac{y'_1}{\alpha'_1} : \frac{y'_2}{\alpha'_2} : \frac{y'_3}{\alpha'_3},$$

so entspricht dieser Punkt projectiv dem y_k, in einer Verwandtschaft, bei welcher

$$(1\,2\,3\,4) \barwedge (1'\,2'\,3'\,4').$$

Ersetzt man in U_1 die x_k durch die y_k und diese durch die proportionalen

$$\frac{y'_k}{\alpha'_k}\cdot\alpha_k = \frac{\alpha'_k + m\delta'_k}{\alpha'_k}\alpha_k,$$

so erkennt man, dass y_k auf $U_1 = 0$ liegt, dass also $U_1 = 0$ die Punkte 4 und y_k enthält.

Ebenso entspricht V' in derselben Verwandtschaft der Geraden α'_k, $\alpha'_k + \varepsilon'_k$.

Die Doppelpunktstangenten sind daher ein Paar der durch die beiden Paare $U_1 V = 0$ und $U V_1 = 0$ bestimmten Strahlinvolution.

Alle Curven III. Ordnung mit einem gemeinsamen Doppelpunkte und fünf gemeinsamen einfachen Punkten bilden ein Büschel; die Paare von Doppelpunktstangenten bilden eine Involution, von welcher sich leicht mehrere Paare angeben lassen, indem man die Curven beachtet, welche in eine den Doppelpunkt mit einem der übrigen Grundpunkte verbindende Gerade und den Kegelschnitt zerfallen, der die weiteren vier einfachen Grundpunkte und den Doppelpunkt enthält.

Diese Involution, construirt für den Doppelpunkt 4 und die Punkte 123, sowie für die mit 12345 und 12346 verbundenen Punkte, fällt mit der durch die Paare $UV_1 = 0$ und $VU_1 = 0$ bestimmten nicht zusammen.

Denn die für die ϱ_k geltenden Gleichungen kann man schreiben

$$\left(\frac{\alpha'_2}{\beta'_2} - \frac{\alpha'_3}{\beta'_3}\right)\frac{\alpha_1}{\varrho_1} + \left(\frac{\alpha'_3}{\beta'_3} - \frac{\alpha'_1}{\beta'_1}\right)\frac{\alpha_2}{\varrho_2} + \left(\frac{\alpha'_1}{\beta'_1} - \frac{\alpha'_2}{\beta'_2}\right)\frac{\alpha_3}{\varrho_3} = 0,$$

$$\left(\frac{\beta'_2}{\alpha'_2} - \frac{\beta'_3}{\alpha'_3}\right)\frac{\beta_1}{\varrho_1} + \left(\frac{\beta'_3}{\alpha'_3} - \frac{\beta'_1}{\alpha'_1}\right)\frac{\beta_2}{\varrho_2} + \left(\frac{\beta'_1}{\alpha'_1} - \frac{\beta'_2}{\alpha'_2}\right)\frac{\beta_3}{\varrho_3} = 0.$$

Ersetzt man β_k und β'_k durch $\alpha_k + \delta_k$ und $\alpha'_k + \delta'_k$, so ergiebt sich, wenn man schliesslich zur Grenze übergeht,

$$\frac{\alpha'_2}{\beta'_2} - \frac{\alpha'_3}{\beta'_3} = \frac{\alpha'_2}{\alpha'_2 + \delta'_2} - \frac{\alpha'_3}{\alpha'_3 + \delta'_3} = \frac{\delta'_3}{\alpha'_3} - \frac{\delta'_2}{\alpha'_2}.$$

Ferner ist

$$\frac{\beta'_2}{\alpha'} - \frac{\beta'_3}{\alpha'_3} = \frac{\delta'_2}{\alpha'_2} - \frac{\delta'_3}{\alpha'_3}.$$

Die Gleichungen für ϱ_k verwandeln sich hiernach in

$$\left(\frac{\delta'_3}{\alpha'_3} - \frac{\delta'_2}{\alpha'_2}\right)\frac{\alpha_1}{\varrho_1} + \ldots = 0, \quad \left(\frac{\delta'_3}{\alpha'_3} - \frac{\delta'_2}{\alpha'_2}\right)\frac{\beta_1}{\varrho_1} + \ldots = 0.$$

Die erste lässt die Anordnung zu

$$\frac{\delta'_1}{\alpha'_1}\left(\frac{\alpha_2}{\varrho_2} - \frac{\alpha_3}{\varrho_3}\right) + \ldots = 0,$$

und giebt daher durch Multiplication mit $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$

$$\frac{\delta'_1}{\alpha'_1}\varrho_1 \mathfrak{T}_{1\varrho} + \frac{\delta'_2}{\alpha'_2}\varrho_2 \mathfrak{T}_{2\varrho} + \frac{\delta'_3}{\alpha'_3}\varrho_3 \mathfrak{T}_{3\varrho} = 0.$$

Der Kegelschnitt $\frac{\delta'_1}{\alpha'_1}\xi_1 S_1 + \ldots = 0$ enthält daher den Punkt ϱ_k.

Zu dem Curvenbüschel III. Ordnung, das durch den Doppelpunkt 4 u. s. w. bestimmt ist, gehört dieser Kegelschnitt in Verbindung mit der Geraden, welche den Doppelpunkt und den mit 12346 verbundenen σ_k enthält; die Doppelpunktstangenten dieser Curve sind U_1 und $\alpha_k \sigma_k$. Da nun die letztere Gerade im Allgemeinen mit V nicht zusammenfällt, so folgt, dass die beiden bezeichneten Involutionen nicht identisch sind.

Die Doppelpunktstangenten der gesuchten C_3 sind hiernach als das gemeinsame Paar zweier Involutionen eindeutig bestimmt.

Die Construction der Curven III. Ordnung, auf denen die Punkte enthalten sind, von denen aus 1 2 3 4 5 7 und 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 7′ durch projective Büschel projicirt werden, ist einfacher. Denn für jede dieser Curven kennt man die Punkte 1 2 3 4 7, die Tangente 45, und die sechs mit je fünf der Punkte 1...7 verbundenen Punkte.

Dresden. Richard Heger.

XXII. Ein neues Kennzeichen für die Primzahlen.

Unter Bezugnahme auf das Verfahren, grössere Zahlen zu analysiren, welches ich in XXXI, 3 dieser Zeitschrift mittheilte, beabsichtige ich, in dem Folgenden den Fall einer besonderen Besprechung zu unterziehen, wenn die zu untersuchende Zahl N eine Primzahl ist, da sich inzwischen bei einer grossen Zahl von Analysen, die ich gemacht habe, als ausnahmslose Thatsache erwiesen hat, dass sich die Primzahlen, welche benutzt wurden, als Reste oder Nichtreste von N ohne Schwierigkeit einzeln absondern liessen und zwar in Uebereinstimmung mit dem Gesetze der Reciprocität. Wie dies zu verwerthen ist, um ein sicheres Kennzeichen für die Primzahlen zu gewinnen, soll unten weiter ausgeführt werden; vorher möchte ich, um diese Arbeit möglichst selbstständig zu erhalten, einige einleitende Worte vorausschicken, wobei freilich Wiederholungen des Früheren nicht ganz zu vermeiden sind.

Soll die Differenz zwischen einem Quadrate und einer Zahl N durch eine bestimmte Zahl, insbesondere durch eine Primzahl p theilbar sein, so müssen beide bei der Division durch diese denselben Rest liefern. Daraus folgt zunächst, dass N durch p dividirt, einen quadratischen Rest geben muss, ferner geht daraus hervor, dass man die Wurzel des Quadrates so zu wählen hat, um bei der Division desselben durch p denselben Rest zu erhalten, welchen N giebt. Will man mehrere Quadrate nach einander subtrahiren und geht von dem Quadrate aus, welches kleiner als N ist, aber dieser Zahl am nächsten kommt, so sei dessen Wurzel a und irgend eine andere Wurzel $a-\alpha$; dann handelt es sich um die Differenz $N-(a-\alpha)^2$ oder um den Werth, welcher ihr gleich kommt, nämlich $(2a-\alpha)\alpha+r$, wenn $N=a^2+r$ ist. Damit nun dieser Ausdruck $(2a-\alpha)\alpha+r$, der durch b bezeichnet werden soll, durch p theilbar ist, muss α so gewählt werden, dass $(a-\alpha)^2$ denselben Rest ϱ, wie N selbst giebt, wenn man durch p dividirt.

Schreibt man dementsprechend die Gleichung $N-(a-\alpha)^2=b$, so muss also N für jeden Factor von b quadratischer Rest sein. Umgekehrt, wenn man die Plätze von N und b vertauscht, also die Gleichung $-b-(a-\alpha)^2=-N$ bildet, muss auch für jeden Factor von N der Werth $-b$

quadratischer Rest sein. Man kann aber b immer in der Form mc^2 darstellen, und wenn $-b$ Rest für jeden Factor von N sein muss, so gilt dies auch von $-m$, da ja c^2 an und für sich ein quadratischer Rest und da der zweite Factor $-m$ also auch Rest sein muss. Schreibt man nun $N=(a-\alpha)^2+mc^2$, so ist $-m$ bekanntlich die Determinante der quadratischen Darstellung auf der rechten Seite, und diese muss mithin quadratischer Rest für jeden Factor von N sein. Ist das Quadrat kleiner als die Zahl, so ist die Determinante negativ, im anderen Falle positiv. Statt der Differenz zwischen einem einfachen Quadrate und der Zahl kann man auch die Differenz zwischen dem Vielfachen eines Quadrates und der Zahl in Betracht ziehen; es sei diese $N-k(a-\alpha)^2$* und die entsprechende Gleichung $N-k(a-\alpha)^2=k(2a-\alpha)\alpha+r$, wenn $N=ka^2+r$ ist. Für die rechte Seite der Gleichung setze man b, dann müssen für jeden Theiler von b die Zahl N und $k(a-\alpha)^2$ gleiche Reste liefern; demnach sind N und k zugleich Reste oder Nichtreste für diese Theiler. Und werden in der Gleichung $N-k(a-\alpha)^2=b$ die Zahl N und der Werth b vertauscht, schreibt man also $-b-k(a-\alpha)^2=-N$, so kann man statt b setzen mc^2, und man erhält, wenn beide Seiten noch mit k multiplicirt werden, $-kmc^2-k^2(a-\alpha)^2=-kN$, wo dann $-km$ für jeden Factor von N quadratischer Rest sein muss. $-km$ ist aber die Determinante in der quadratischen Darstellung $N=k(a-\alpha)^2+mc^2$. Also wie vorher folgt schliesslich, dass diese Determinante quadratischer Rest für jeden Factor von N sein muss.

Sind dann nach dem früher angegebenen Verfahren in dem einen oder dem anderen Falle, d. h. ob man die Differenz $N-(a-\alpha)^2$ oder $N-k(a-\alpha)^2$ benutzt, mehrere einfache Determinanten gefunden, so sollen zu diesen etwa -1, 2, 5 und 13 gehören. Dementsprechend müssen die Factoren von N die Form $8n+1$ besitzen, sie müssen durch 5 dividirt die Reste 1 oder 4 und durch 13 dividirt die Reste 1, 3, 4, 9, 10, 12 geben; der allgemeine Ausdruck für sie ist mithin $520u+1, 9, 49, 81, 121, 129, 209, 289, 321, 329, 361, 441$. Berechnet man nach und nach die Werthe dieses Ausdrucks, wenn nöthig bis $\sqrt{N}$, und schliesst unter Benutzung der übrigen Determinanten die Primzahlen aus, die keine Factoren von N sein können, so wird durch jede Determinante die Zahl der noch möglichen Factoren ungefähr auf die Hälfte gebracht, so dass bei einer Gesammtzahl von r Determinanten die Anzahl der noch verbleibenden $\frac{1}{2^r}$ von der Anzahl aller Primzahlen, die kleiner als $\sqrt{N}$ sind, beträgt. Dies Verfahren der Ausschliessung, vermittelst dessen also im gegebenen Falle ermittelt werden kann, ob N eine Primzahl ist, leidet jedoch an Eintönigkeit und erfordert grosse Aufmerksamkeit. Bei den Versuchen mit den einzelnen Determinan-

* Diese Differenz ist einfacher, als die zuerst von L. Euler vorgeschlagene und stets gebrauchte $kN-(a-\alpha)^2$, wie sie in einem Schreiben an mich auch noch vor Kurzem von einem namhaften französischen Mathematiker gebraucht wurde.

ten darf man keine Division durch die ihr angehörigen Divisoren ohne Probe lassen, sonst ist man nur dann seiner Sache sicher, wenn man einen Divisor der Zahl N findet. Lassen die gewonnenen Determinanten mit einiger Sicherheit annehmen, dass N eine Primzahl sei, so kann man auch dazu übergehen, Gebrauch von dem Fermat'schen Satze zu machen und zu versuchen, ob $x^{N-1} \equiv 1 \pmod N$ ist. Zu diesem Zwecke ist es aber wieder unbedingt nöthig, $N-1$ in seine Factoren zu zerlegen. Denn sei N zusammengesetzt und die Anzahl der relativen Primzahlen $< N$ gleich $\varphi(N)$, so muss ja $x^{\varphi(N)} \equiv 1 \pmod N$ sein. Haben in diesem Falle $\varphi(N)$ und $N-1$ einen gemeinsamen Factor π und ist schon $x^\pi \equiv 1 \pmod N$, so ist auch $x^{N-1} \equiv 1 \pmod N$; aber man hat keine Primzahl vor sich. So ist z. B. $4^2 \equiv 1\ (15)$, $\varphi(N) = 8$ und $N-1 = 14$ haben den gemeinsamen Factor 2, für welchen schon die Congruenz $4^2 \equiv 1 \pmod{15}$ besteht, aus welcher auch $4^{14} \equiv 1 \pmod{15}$ folgt. Die Factoren von $N-1$ zu bestimmen, ist aber in vielen Fällen nicht viel leichter, als die Factoren von N selbst zu ermitteln.

Gegenüber diesen beiden Methoden ist nun das neue Verfahren ein einfaches und zuverlässiges. Ich nehme zuerst an, dass man Gebrauch macht von der Gleichung $N = (a-\alpha)^2 + (2a-\alpha)\alpha + r$. Wenn dann N eine Primzahl ist, so gelingt es immer, zuweilen in ganz kurzer Zeit, alle benutzten Primzahlen entweder direct, oder durch Elimination als Reste für N einzeln hinzustellen. Für die Elimination hat man nur zu beachten, dass eine ungerade Anzahl negativer Determinanten eine negative Determinante liefern; im Uebrigen hat man die gemeinsamen Factoren paarweise wegzustreichen. Ist nun die Menge der Primzahlen $< \sqrt{N} = n$ und die Anzahl der benutzten Primzahlen p gleich r, so muss man soviele Primzahlen für die Determinanten benutzen, dass $\frac{n}{2^r}$ wesentlich kleiner als 1 ist. Das macht gar keine Schwierigkeiten, wenn man einmal annähernd den Werth $\frac{n}{2^r} = 1$ erreicht hat. Es kommt aber als nothwendige Bedingung noch hinzu für Zahlen von der Form $8n+1$, dass -1 und 2 Reste sind; für $8n+3$, dass -1 Nichtrest und -2 Rest, für $8n+5$, dass -1 Rest und 2 Nichtrest, für $8n+7$, dass -1 Nichtrest und 2 Rest ist.

Auf einen Fall muss man besonders merken. Ist nämlich $N = 8n+1$ und aus zwei Factoren $4n+3$ zusammengesetzt, so müssen beide zugleich für die gebrauchten Primzahlen Reste oder Nichtreste sein, weil N Rest für sie ist; also ist umgekehrt jedes einzelne p für beide Factoren Rest oder Nichtrest und sämmtliche gebrauchte Primzahlen treten einzeln mit $+$ oder -1 als Reste auf. Aber ein Schluss auf N als Primzahl wäre verkehrt. Es fehlt ja in diesem Falle die Determinante -1, die entscheidend ist.

Benutzt man die Gleichung $N = k(a-\alpha)^2 + k(2a-\alpha)\alpha + r$, so erhält man alle benutzten p, welche nach dem Reciprocitätsgesetze Reste von

N sind, einzeln als Determinanten, diejenigen, welche Nichtreste sind, aber paarweise und zwar in der Weise, dass alle Paare einen Nichtrest als gemeinsamen Factor haben. Sind diese Bedingungen erfüllt und hat man noch -1 als Rest oder Nichtrest nach den Formen $4n+1$ oder $4n+3$, und tritt auch 2 in richtiger Weise als Determinante auf, so ist der Nachweis, dass N eine Primzahl ist, mit voller Sicherheit geführt. Zum Beleg für das Gesagte füge ich zwei Beispiele an, von welchen sich das erste auf eine kleine Zahl, das zweite auf eine elfstellige Zahl bezieht. Erstere habe ich ganz willkürlich herausgegriffen, das zweite Beispiel habe ich erst für die vorliegende Arbeit berechnet, ohne zu wissen, dass ich dasselbe schnell zu Ende führen konnte.

Für die Zahl 457 nehme man beispielsweise $p=3$, da $\left(\frac{457}{3}\right)=+1$ ist. Subtrahirt man von ihr die Quadrate, deren Wurzel $3y\pm1$ ist, so enthält der Rest stets den Factor 3. Für $3y\pm1=1$ bis $3y\pm1=16$ ergeben sich der Reihe nach die Determinanten $-2.3.19$, -3.151, -1, -3, $-2.3.17$, -3.131, $-3.7.17$, -3.7, -29, -3.67, also sind Reste von 457 zunächst -1, -3, -29, ferner 151, 131, 7, 17, 2, 19, 67 und es ist ersichtlich, dass 457 eine Primzahl sein muss.

Der zweite Factor von $2^{43}-1$ ist $N=20408568497=(142858-\alpha)^2+(285716-\alpha)\,\alpha+160333$.

Man erhält für:

1)	$\alpha=9$,	$b=17.83.4^2$,	$D=-17.83$,
2)	$\alpha=26$,	$b=7.31.187^2$,	$D=-7.31$,
3)	$\alpha=-29$,	$b=-7.11.17.97.8^2$,	$D=+7.11.17.97$,
4)	$\alpha=2083$,	$b=17.5896^2$,	$D=-17$,
5)	$\alpha=-61$,	$b=-19.53.67.16^2$,	$D=+19.53.67$,
6)	$\alpha=243$,	$b=2.7.17.19.124^2$,	$D=-2.7.17.19$,
7)	$\alpha=-821$,	$b=-7.11.19.83.44^2$,	$D=+7.11.19.83$,
8)	$\alpha=447$,	$b=2.3.1666^2$,	$D=-2.23$,
9)	$\alpha=-3599$,	$b=-7.11.17.43.136^2$,	$D=+7.11.17.43$,
10)	$\alpha=2204$,	$b=7.43.1441^2$,	$D=-7.43$,
11)	$\alpha=531$,	$b=2.7.53.452^2$,	$D=-2.7.53$,
12)	$\alpha=-23$,	$b=-7.19.23.131.4^2$,	$D=+7.19.23.131$,
13)	$\alpha=-76083$,	$b=-2.17\ 131.2486^2$,	$D=+2.17.131$,
14)	$\alpha=90666$,	$b=11.17.19.2231^2$,	$D=-11.17\ 19$,
15)	$\alpha=873$,	$b=43.61.308^2$,	$D=-43.61$,
16)	$\alpha=1329$,	$b=11.97.113.56^2$,	$D=-11.97.113$.

Zunächst ist $+43$ oder -43 ein Rest für etwaige Factoren von N, da sie zu dem Binom $2^{43}-1$ gehören. Dann findet man in 4) -17 und erhält aus 1) $+83$. Verbunden mit 7) und 9) ergiebt sich -19 oder $+19$, je nachdem 43 positiv oder negativ ist. Aus 10) erhält man ebenso -7 oder $+7$ und aus 9) $+11$ oder -11. Benutzt man diese Determinanten, so erhält man 14) unter beiden Annahmen $+43$ oder $=43$ die

Determinante -1. Fährt man in ähnlicher Weise fort, so gewinnt man ausser -1 als Determinanten noch die 15 folgenden: 2, 7, 11, 17, 19, 23, 31, 43, 53, 61, 67, 83, 97, 113, 131. Die Anzahl der Primzahlen $<\sqrt{N}$ ist geringer als 1600; durch die obigen Determinanten ist die Zahl derjenigen, welche Divisoren von N sein könnten, auf $\frac{1}{2^{16}} = \frac{1}{65536}$ zurückgebracht, einen Werth, den man noch beliebig verringern könnte durch Hinzunahme weiterer Primzahlen p, und N ist als Primzahl erwiesen.

Das Entscheidende liegt eben darin, dass die Determinanten, weil sie einfache Primzahlen sind, vollständig unabhängig von einander sind und dass nicht etwa zwei Factoren existiren können, für welche alle diese Primzahlen zugleich Reste oder Nichtreste sind.

Fasst man das Gesagte zusammen, so ergiebt sich folgendes Resultat: „Wird eine Zahl N dargestellt entweder durch $(a-\alpha)^2+b$ oder $k(\ -\alpha)^2+b$, bestimmt man dann Werthe von α in der Weise, dass b durch eine hinreichende Anzahl von Primzahlen p nach und nach theilbar wird, so erhält man eine Reihe einfacher Determinanten. Erhält man aus diesen direct oder durch Elimination sämmtliche benutzten p als Reste oder Nichtreste von N in der Weise, wie es das Reciprocitätsgesetz verlangt, ist endlich für $N=4n+1$ die Zahl -1 Rest und für $N=4n+3$ Nichtrest, so ist N eine Primzahl."

P. Seelhoff.

XXIII. Die reguläre Eintheilung des Raumes bei elliptischer Maassbestimmung.

Die an sich rein geometrische Aufgabe, die Ebene bei nicht-euklidischer Maassbestimmung regulär zu theilen, d. h. Polygone zu construiren, durch deren congruente Wiederholung die Ebene ganz oder zum Theil überdeckt wird, hat bekanntlich Bedeutung für die Theorie der Functionen mit linearen Transformationen in sich und ist in diesem Interesse von Klein in der Abhandlung: Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst (Math. Ann. Bd. IX) und von Poincaré in: Théorie des groupes fuchsiens (Acta math. Bd. I) behandelt und gelöst worden.

Nicht unmittelbar mit Fragen aus der Theorie der Functionen complexer Veränderlichen verknüpft, daher zunächst nur von geometrischem Interesse ist die Aufgabe, den Raum von drei Dimensionen bei nicht-euklidischer Maassbestimmung regulär zu theilen. Dem doppelten Charakter der Maassbestimmung, als einer elliptischen oder hyperbolischen* entsprechend, haben wir entweder eine endliche oder eine unendliche Zahl congruenter Gebiete. Mit dem letzteren Falle hat sich Dyck beschäftigt in: Vorläufige

* Wegen des Sprachgebrauchs vergl. ausser den im Texte erwähnten Schriften: Klein, Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie. Math. Ann. Bd. IV.

Mittheilung über die durch Gruppen linearer Transformationen gegebenen regulären Gebietseintheilungen des Raumes (Ber. über d. Verhandl. der Königl. sächs. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig). Die Lösung der dem ersten Falle entsprechenden Aufgabe ist Gegenstand der vorliegenden Mittheilung. Es wird sich hierbei hauptsächlich um die Erledigung der beiden Fragen handeln:

1. nach den Bedingungen, denen ein Polyeder zu genügen hat, um Ausgangspolyeder einer regulären Raumtheilung zu sein;

2. nach der Construction der Grenzflächen der Gebiete.

Dabei legen wir als Fundamentalfläche der Maassbestimmung eine Kugel mit imaginärem Radius zu Grunde und betrachten als „Ebenen" alle auf dieser Kugel senkrecht stehenden Kugeln, bezw. Ebenen. Bekanntlich sind dann alle Kanten- und Flächenwinkel „gleich", welche im Sinne Euklidischer Maassbestimmung gleich sind, und jede „Ebene" trifft eine bestimmte Kugel in einem grössten Kreise.

I.

Unsere Untersuchung gewinnt wesentlich an Einfachheit durch die Möglichkeit der Beschränkung auf Tetraeder, durch deren symmetrische und congruente Wiederholung der Raum lückenlos und einfach überdeckt wird. Diese Möglichkeit erkennen wir aus folgenden Bemerkungen. Ein Ausgangspolyeder der regulären Raumtheilung kann einmal nur solche Ecken besitzen, welche auf concentrischen Kugeln Ausgangspolygone, bezw. Ausgangsdreiecke der regulären endlichen Kugeltheilung bestimmen würden, denn nur unter dieser Bedingung wird durch congruente Wiederholung des Ausgangspolyeders eine Theilung in eine endliche Zahl congruenter Gebiete erzielt. Sodann muss ein Ausgangspolyeder symmetrisch sein bezüglich der Symmetrieebenen jeder Ecke, wie man sich leicht überzeugt, muss also auch zusammengesetzt werden können durch symmetrische Wiederholung eines Fundamentalpolyeders, welches nur dreikantige Ecken besitzt. Da endlich wegen der elliptischen Maassbestimmung die Winkelsumme eines ebenen n-Seits $>(n-2)\pi$ ist, kein Kantenwinkel einer Ecke des Fundamentalpolyeders aber $>\frac{\pi}{2}$ sein kann, so müssen die Flächen des letzteren Dreiecke, dieses selbst muss mithin ein Tetraeder sein.

Die Bedingungen, welche ein Tetraeder zu erfüllen hat, um Ausgangstetraeder einer regulären Raumtheilung zu sein, sind im Vorstehenden bereits ausgesprochen; formuliren wir sie knapp folgendermassen:

1. Die Ecken des Ausgangstetraeders müssen auf concentrischen Kugeln Ausgangsdreiecke der regulären endlichen Kugeltheilung bestimmen, d. h. je aus drei benachbarten Sym-

metrieebenen einer regulären Doppelpyramide oder eines regulären Körpers bestehen.

2. Die Summe der 12 Kantenwinkel des Ausgangstetraeders muss $> 4\pi$ sein.

Wir beschäftigen uns nun etwas näher mit dem Inhalte beider Bedingungen. Die übrigens wohlbekannten Combinationen, welchen die Winkel dreier benachbarten Symmetrieebenen einer regulären Doppelpyramide oder eines regulären Körpers angehören, sind folgende:

1. Bei der Doppelpyramide . . . . $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\nu}$ (ν beliebige ganze Zahl);
2. beim Tetraeder . . . . $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$;
3. beim Hexaeder und Octaeder . $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$;
4. beim Dodekaeder und Ikosaeder $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$.

Diesen Combinationen gehören also auch die Flächenwinkel der Ecken des Ausgangstetraeders an.

Was die zweite Bedingung betrifft, so gewinnt dieselbe dadurch an Brauchbarkeit, dass sich die Summe der drei Kantenwinkel einer jeden der eben aufgezählten Ecken unmittelbar angeben lässt. Legt man nämlich die Kanten eines jeden Ausgangsdreiecks der regulären endlichen Kugeltheilung auf der Kugel geradlinig aneinander, so findet man sofort folgende Winkelsummen:

1. bei der Doppelpyramide . . . . $\pi + \frac{\pi}{\nu}$;
2. beim Tetraeder . . . . π;
3. beim Hexaeder und Octaeder . $\frac{3\pi}{4}$;
4. beim Dodekaeder und Ikosaeder $\frac{\pi}{2}$.

Die Abhängigkeit der Summe der Kantenwinkel von der Grösse der Flächenwinkel liegt für den Fall der Doppelpyramide auf der Hand; für die drei übrigen Fälle kann man sie gemeinsam durch die Formel

$$\frac{7-\tau}{4}$$

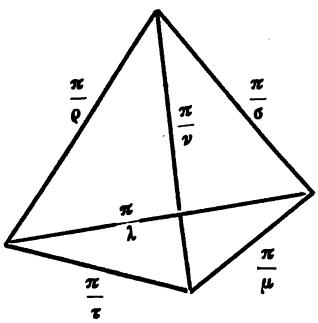
kennzeichnen, wobei als Flächenwinkel der Ecke

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{\tau}$$

angenommen sind, und τ den Bedingungen unterworfen ist:

$$2 < \tau < b.$$

Nun ist zu bemerken, dass, weil jeder Ecke mindestens ein Flächenwinkel $=\frac{\pi}{2}$ angehören muss, entweder in zwei einander gegenüberliegenden, oder in drei in einem Eckpunkt zusammenstossenden Kanten des Ausgangstetraeders Flächenwinkel von dieser Grösse auftreten müssen. Mit Beziehung auf die Figur also haben wir zu unterscheiden:



A. $\lambda=\nu=2$. Diese Voraussetzung erfordert die gesonderte Betrachtung der fünf Fälle:

1. $\varrho=\sigma=\tau=\mu=2$. Durch diese Annahme ist ein reguläres, durch symmetrische und congruente Wiederholung eines nicht-regulären Tetraeders zu erzeugendes Tetraeder gekennzeichnet.

2. $\varrho=\sigma=\tau=2$. Hierdurch wird ein symmetrisches, aus nicht-symmetrischen Tetraedern zusammengesetztes Tetraeder charakterisirt.

3. *a*) $\varrho=\sigma=2$. Da in jeder Ecke, welche nicht mindestens zwei Flächenwinkel $=\frac{\pi}{2}$ aufweist, mindestens ein solcher $=\frac{\pi}{3}$ auftreten muss, so ist eine der beiden Zahlen τ, $\mu=3$ anzunehmen. Es sei $\mu=3$, so besteht für τ die Bedingung:

$$\tau \leqq b,$$

welche jedoch durch die Bedingung

$$\tau < b$$

eingeschlossen wird; τ kann hiernach die Werthe 3, 4, 5 erhalten, von welchen der erste ein symmetrisches Tetraeder liefert.

b) $\varrho=\mu=2$ kennzeichnet ein symmetrisches, aber immer nur wieder aus symmetrischen Tetraedern bestehendes Tetraeder, und legt den Zahlen σ und τ die Bedingung auf:

$$1+\frac{1}{\sigma}+1+\frac{1}{\sigma}+1+\frac{1}{\tau}+1+\frac{1}{\tau}>4$$

oder

$$\sigma+\tau>0,$$

woraus sich ergiebt, dass σ und τ beliebige von einander unabhängige ganze Zahlen sein können.

4. $\mu=2$. Da in jeder Ecke, welche nicht mindestens zwei Flächenwinkel $=\frac{\pi}{2}$ aufweist, mindestens ein solcher $=\frac{\pi}{3}$ auftreten muss, so ist zu unterscheiden:

a) $\varrho=3$, woraus sich für σ und τ die Bedingung ergiebt:

$$1+\frac{1}{\tau}+1+\frac{1}{\sigma}+\frac{7-\sigma}{4}+\frac{7-\tau}{4}>4.$$

Die Formen, welche dieselbe für die zulässigen Werte von σ annimmt, und die zugehörigen Werte von τ sind aus folgender Tabelle ersichtlich:

σ	τ	τ
$=3,$	$\overline{\gtrless} 5,$	$=3, 4, 5,$
$=4,$	$\lessdot 4,$	$=3,$
$=5,$	$\overline{\overline{\gtrless}} 3,$	$=3.$

Da σ und τ gleichwerthig sind, so werden für $\sigma = 3$ alle Werthcombinationen σ, τ erhalten.

b) $\sigma = \tau = 3$. ϱ hat den Bedingungen zu genügen:

$$1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{7-\varrho}{4} + \frac{7-\varrho}{4} > 4,$$

oder

$$4 \overline{\overline{>}} \varrho,$$
$$\varrho = 4 \text{ oder } 3,$$

welch' letzterer Fall bereits unter 4*a*) aufgeführt ist.

5. $\varrho, \sigma, \tau, \mu > 2$ verlangt, dass mindestens zwei einander gegenüberliegende Kanten Flächenwinkel $= \frac{\pi}{3}$ besitzen, dass also etwa $\varrho = \mu = 3$ sei; dann besteht für σ und τ die Bedingung:

$$\frac{7-\sigma}{4} + \frac{7-\sigma}{4} + \frac{7-\tau}{4} + \frac{7-\tau}{4} > 4,$$
$$6 > \sigma + \tau,$$

welche nicht erfüllbar ist.

B. $\tau = \mu = \nu = 2$. Die Voraussetzungen, dass eine oder mehrere der Zahlen ϱ, σ, λ gleich 2 seien, sind uns bereits unter *A* entgegengetreten. Um neue Fälle zu erhalten, müssen wir von den drei Zahlen mindestens zwei $= 3$ annehmen, wodurch wiederum ein symmetrisches Tetraeder gegeben ist. Durch die unter *A* aufgeführten Möglichkeiten sind also alle überhaupt auftretenden Fälle erschöpft.

Stellen wir dieselben übersichtlich zusammen: Soll durch symmetrische und congruente endliche Wiederholung eines Tetraeders der Raum lückenlos und einfach überdeckt werden, so müssen die sechs Flächenwinkel eine der folgenden Combinationen bilden:

	$\frac{\pi}{\lambda}$,	$\frac{\pi}{\nu}$,	$\frac{\pi}{\varrho}$,	$\frac{\pi}{\mu}$,	$\frac{\pi}{\sigma}$,	$\frac{\pi}{\tau}$.
1.	$\frac{\pi}{2}$,	$\frac{\pi}{2}$,	$\frac{\pi}{2}$,	$\frac{\pi}{3}$,	$\frac{\pi}{2}$,	$\frac{\pi}{4}$;
2.	$\frac{\pi}{2}$,	$\frac{\pi}{2}$,	$\frac{\pi}{2}$,	$\frac{\pi}{3}$,	$\frac{\pi}{2}$,	$\frac{\pi}{5}$;

3. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\sigma}, \frac{\pi}{\tau}$ (σ, τ beliebige ganze Zahlen);

4. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$;

5. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$;

6. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$;

7. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.

II.

Wir gehen dazu über, die Construction der Grenzflächen der den eben aufgezählten sieben Winkelcombinationen entsprechenden Raumeintheilungen kurz zu beschreiben; dabei entspricht die Nummerirung derjenigen der tabellarischen Uebersicht:

1. Die Construction knüpft an die reguläre Theilung der Kugeloberfläche durch die Symmetrieebenen des Octaeders oder Hexaeders an. Die Grenzflächen werden durch die neun Symmetrieebenen dieser regulären Körper und durch eine concentrische Kugel gebildet. Ihre Zahl ist also 10 und sie begrenzen 96 Tetraeder oder 48 congruente Polyeder.

2. Die 16 Grenzflächen werden durch die 15 Symmetrieebenen des Ikosaeders und eine concentrische Kugel gebildet, und bestimmen 240 Tetraeder oder 120 congruente Polyeder.

3. Zwei orthogonale Kugelbüschel, von denen das erste σ, das zweite τ in gleichem Winkelabstand aufeinander folgende Kugeln enthält, also $\sigma + \tau$ Flächen begrenzen $2\sigma . 2\tau = 4\sigma . \tau$ congruente Tetraeder.

4. Durch die sechs Symmetrieebenen eines regulären Tetraeders und die vier aus den Eckpunkten desselben mit der Kante als Radius geschlagenen Kugeln, also durch zehn Flächen werden 120 Tetraeder, 60 congruente Polyeder begrenzt.

5. Die neun Symmetrieebenen des Octaeders, die sechs aus den Eckpunkten mit der Kante als Radius geschlagenen Kugeln und die umgeschriebene Kugel, somit 16 Flächen, theilen den Raum in 384 Tetraeder, welche, zu zweien zusammengefasst, 192 congruente Polyeder darstellen.

6. Die neun Symmetrieebenen des Hexaeders, die acht aus den Ecken mit der Kante als Radius, und die sechs aus den Flächenmittelpunkten mit der halben Flächendiagonale als Radius geschlagenen Kugeln, nebst der umschriebenen Kugel bilden die 24 Grenzflächen einer Raumtheilung in 1152 Tetraeder oder 576 congruente Polyeder.

7. Die Construction geht von dem regulären Ikosaeder aus. Die Ebenen, welche je fünf Eckpunkte desselben verbinden, begrenzen ein reguläres Octaeder; die Ebenen, welche je drei nicht benachbarte und nicht diametral einander gegenüberliegende Eckpunkte verbinden, ein zweites reguläres Ikosaeder. Von den Eckpunkten des letzteren aus schlage man nach den benachbarten des Dodekaeders 12, von den Eckpunkten des Dodekaeders aus nach den benachbarten des Ausgangs-Ikosaeders 20, und aus den Eckpunkten dieses letzteren mit der Kante als Radius abermals 12 Kugeln, füge die 15 Symmetrieebenen und eine concentrische Kugel hinzu, so erhält man die 60 Flächen, welche den Raum in 14400 Tetraeder, bezw. 7200 congruente Polyeder eintheilt.

Betreffs der im Vorstehenden gegebenen regulären endlichen Gebietseintheilungen des Raumes bleibt natürlich noch eine Reihe von Fragen zunächst gruppentheoretischer Natur zu erledigen; hierauf sollte indessen hier nicht eingegangen werden.

Apolda, Juni 1886. Dr. Carl Hossfeld.

XXIV. Zur Theorie der symmetrischen Functionen.

1. Die Gleichung

$$(1-a_1x)\,..\,(1-a_nx)=1+\sum_1^n(-1)^r(a;n)\,a_1\,..\,a_r.x^r$$

führt auf zwei Gleichungen, die für die Theorie der symmetrischen Functionen von Bedeutung sind.

Es ist

$$l(1-a_1x)\,..\,(1-a_nx)=-\sum_1\frac{1}{r}(a;n)\,a_1^r.x^r$$

und daher

$$(1-a_1x)\,..\,(1-a_nx)=e^{-\sum_1\frac{1}{r}(a;n)a_1^r.x^r}$$

oder, da sich der rechts stehende Ausdruck durch die Summe

$$\sum_0\frac{1}{\lambda!}\Big(-\sum_1\frac{1}{r}(a;n)\,a_1^r.x^r\Big)^\lambda$$

darstellen lässt,

$$(1-a_1x)\,..\,(1-a_nx)$$
$$=\sum\frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+..}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,..\,1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\,..}\left((a;n)\,a_1^1\right)^{\lambda_1}\left((a;n)\,a_1^2\right)^{\lambda_2}\dots x^{1\lambda_1+2\lambda_2+..}$$

für alle positiven ganzen Werthe, den Werth Null mit eingeschlossen, der Zahlen λ_1, λ_2, .., und man gelangt bei Berücksichtigung der eingangs gegebenen Gleichung zu der Gleichung

$$(a;n)\,a_1\,..\,a_r=\sum\frac{(-1)^{\lambda_1+..+\lambda_r+r}}{\lambda_1!\,..\,\lambda_r!\,1^{\lambda_1}\,..\,r^{\lambda_r}}\left((a;n)\,a_1^1\right)^{\lambda_1}\,..\,\left((a;n)\,a_1^r\right)^{\lambda_r},$$
$$1\lambda_1+..+r\lambda_r=r,$$

in der sich die Summe auf alle positiven ganzen Werthe, den Werth Null mit eingeschlossen, der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ bezieht, welche der Bedingung $1\lambda_1 + \ldots + r\lambda_r = r$ genügen.

Ferner ist andererseits

$$l(1-a_1 x)\ldots(1-a_n x) = -\sum_1 \frac{1}{\lambda}\left(-\sum_1^n (-1)^r (a;n)a_1\ldots a_r . x^r\right)^\lambda$$

oder, da der rechts stehende Ausdruck durch die Summe

$$-\sum_1 \frac{(-1)^{\lambda+1\lambda_1+\ldots+n\lambda_n}(\lambda-1)!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!}((a;n)a_1)^{\lambda_1}\ldots((a;n)a_1\ldots a_n)^{\lambda_n}$$
$$x^{1\lambda_1+\ldots+n\lambda_n},\quad \lambda_1+\ldots+\lambda_n=\lambda$$

darstellbar ist,

$$l(1-a_1 x)\ldots(1-a_n x)$$
$$=-\sum \frac{(-1)^{2\lambda_1+\ldots+(n+1)\lambda_n}(\lambda_1+\ldots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!}((a;n)a_1)^{\lambda_1}\ldots$$
$$((a;n)a_1\ldots a_n)^{\lambda_n}.x^{1\lambda_1+\ldots+n\lambda_n}$$

für alle positiven ganzen Werthe, den Werth Null mit eingeschlossen, der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, und es ergiebt sich durch Vergleichung dieser Darstellung des Logarithmus mit der erstgegebenen die Gleichung

$$(a;n)a_1{}^r = r\sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n+r}(\lambda_1+\ldots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!}((a;n)a_1)^{\lambda_1}\ldots$$
$$((a;n)a_1\ldots a_n)^{\lambda_n},\quad 1\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=r,$$

in der sich die Summe auf alle positiven ganzen Werthe, den Werth Null mit eingeschlossen, der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bezieht, welche der Bedingung $1\lambda_1 + \ldots + n\lambda_n = r$ genügen.

2. Verbindet man die beiden Gleichungen durch algebraische Multiplication mit dem algebraischen Producte $p_1\ldots p_r$, so erhält man die Gleichungen

$$(a;n)a_1\ldots a_r p_1\ldots p_r = \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_r+r}}{\lambda_1!\ldots\lambda_r!\,1^{\lambda_1}\ldots r^{\lambda_r}}((a;n)a_1{}^1)^{\lambda_1}\ldots$$
$$((a;n)a_1{}^r)^{\lambda_r}p_1\ldots p_r,\quad 1\lambda_1+\ldots+r\lambda_r=r$$

und

$$(a;n)a_1{}^r p_1\ldots p_r = r\sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n+r}(\lambda_1+\ldots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!}((a;n)a_1)^{\lambda_1}\ldots$$
$$((a;n)a_1\ldots a_n)^{\lambda_n}p_1\ldots p_r,\quad 1\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=r.$$

In diesen Gleichungen sind die Grössen $((a;n)a_1{}^1)^{\lambda_1}\ldots((a;n)a_1{}^r)^{\lambda_r}p_1\ldots p_r$ und $((a;n)a_1)^{\lambda_1}\ldots((a;n)a_1\ldots a_n)^{\lambda_n}p_1\ldots p_r$ die arithmetischen Mittel aller derjenigen Ausdrücke, die man erhält, wenn man auf alle möglichen Weisen die Grössen $(a;n)a_1{}^1, \ldots, (a;n)a_1{}^r$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ mal mit je $1, \ldots, r$ Factoren und die Grössen $(a;n)a_1, \ldots, (a;n)a_1\ldots a_n$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mal mit je $1, \ldots, n$ Factoren des Productes $p_1\ldots p_r$ verbindet. Ferner ist $a_1\ldots a_r p_1\ldots p_r$ das arithmetische Mittel aller derjenigen Ausdrücke, die dadurch entstehen, dass man

die Elemente aller Permutationen der Grössen $p_1, .., p_r$ mit den Factoren des Productes $a_1 .. a_r$ der Reihe nach verbindet, und $a_1{}^r p_1 .. p_r$ das algebraische Product der Grössen $a_1 p_1, .., a_1 p_r$. Die Grössen $(a; n) a_1 .. a_r p_1 .. p_r$ und $(a; n) a_1{}^r p_1 .. p_r$ sind also Verbindungen der Grössen

$$a_1 p_1, .., a_n p_1; \quad ..; \quad a_1 p_r, .., a_n p_r,$$

die in Bezug auf die Grössen $a_1, .., a_n$ sowohl, wie in Bezug auf die Grössen $p_1, .., p_r$ symmetrisch sind, und die erste Gleichung stellt die Grösse $(a; n) a_1 .. a_r p_1 .. p_r$ durch Grössen von der Form $(a; n) a_1{}^r p_1 .. p_r$ und die zweite Gleichung die Grösse $(a; n) a_1{}^r p_1 .. p_r$ durch Grössen von der Form $(a; n) a_1 .. a_r p_1 .. p_r$ dar.

Eine $\lambda_\varkappa$ malige Verbindung einer Grösse mit $\varkappa$ Factoren eines r factorigen Productes ist auf

$$\frac{\binom{r}{\varkappa}\binom{r-\varkappa}{\varkappa} .. \binom{r-\varkappa(\lambda_\varkappa - 1)}{\varkappa}}{\lambda_\varkappa !} = \frac{r!}{\lambda_\varkappa ! \, \varkappa !^{\lambda_\varkappa} (r - \varkappa \lambda_\varkappa)!}$$

verschiedene Weisen möglich. Die Anzahl der Ausdrücke, deren arithmetisches Mittel die Grösse $((a; n) a_1{}^1)^{\lambda_1} .. ((a; n) a_1{}^r)^{\lambda_r} p_1 .. p_r$ ist, ist daher

$$\frac{r!}{\lambda_1 ! \, 1!^{\lambda_1} (r - 1\lambda_1)!} \cdot \frac{(r-1\lambda_1)!}{\lambda_2 ! \, 2!^{\lambda_2} (r - 1\lambda_1 - 2\lambda_2)!} \cdot\cdot \frac{(r - 1\lambda_1 - .. - (r-1)\lambda_{r-1})!}{\lambda_r ! \, r!^{\lambda_r} (r - 1\lambda_1 - .. - r\lambda_r)!}$$

$$= \frac{r!}{\lambda_1 ! .. \lambda_r ! \, 1!^{\lambda_1} .. r!^{\lambda_r}},$$

ihre Summe ist durch diese Zahl zu dividiren und erscheint somit in der Gleichung mit dem Coefficienten

$$\frac{(-1)^{\lambda_1 + .. + \lambda_r + r} \, 0!^{\lambda_1} .. (r-1)!^{\lambda_r}}{r!}.$$

Für die Grösse $((a; n) a_1)^{\lambda_1} .. ((a; n) a_1 .. a_n)^{\lambda_n} p_1 .. p_r$ ist die entsprechende Anzahl

$$\frac{r!}{\lambda_1 ! .. \lambda_n ! \, 1!^{\lambda_1} .. n!^{\lambda_n}}$$

und der entsprechende Coefficient

$$\frac{(-1)^{\lambda_1 + .. + \lambda_n + r} (\lambda_1 + .. + \lambda_n - 1)! \, 1!^{\lambda_1} .. n!^{\lambda_n}}{(r-1)!}.$$

Die Anzahl der Ausdrücke, deren arithmetisches Mittel die Grösse $a_1 .. a_r p_1 .. p_r$ ist, ist $r!$.

Selbstverständlich verringert sich die Anzahl der Ausdrücke, sobald die Grössen $p_1 .. p_r$ nicht sämmtlich von einander verschieden sind.

3. Es sei $a^n p^n$ eine binäre Form und $a^n = a_1 .. a_n$. Es sind dann

$$a_1{}^0(-e_1{}^{-1} e_2), .., a_n{}^0(-e^{-1} e_2)$$

die Wurzeln der Gleichung $a^n \varepsilon_2{}^{-n} p^0 = 0$, und in den aus den Grössen

$$a_1{}^0(-e_1{}^{-1} e_2)^{\varkappa_1}, .., a_n{}^0(-e_1{}^{-1} e_2)^{\varkappa_1}; \; ..; \; a_1{}^0(-e_1{}^{-1} e_2)^{\varkappa_r}, .., a_n{}^0(-e_1{}^{-1} e_2)^{\varkappa_r}$$

gebildeten Grössen

$$(a;n)a_1^0\,..\,a_r^0(-e_1^{-1}e_2)^{\varkappa_1}\,..\,(-e_1^{-1}e_2)^{\varkappa_r},\quad (a;n)a_1^0(-e_1^{-1}e_2)^{\varkappa_1+..+\varkappa_r}$$

stellen sich symmetrische Functionen der Wurzeln dar, und zwar in der ersteren eine beliebige symmetrische Function und in der letzteren eine Potenzsumme der Wurzeln. Nach dem vorigen Abschnitte gelten für sie die Gleichungen

$$(a;n)a_1^0\,..\,a_r^0(-e_1^{-1}e_2)^{\varkappa_1}\,..\,(-e_1^{-1}e_2)^{\varkappa_r}$$
$$=\sum\frac{(-1)^{\lambda_1+..+\lambda_r+r}}{\lambda_1!\,..\,\lambda_r!\,1^{\lambda_1}\,..\,r^{\lambda_r}}((a;n)a_1^{0\cdot 1})^{\lambda_1}\,..\,((a;n)a_1^{0\cdot r})^{\lambda_r}(-e_1^{-1}e_2)^{\varkappa_1}\,..$$
$$(-e_1^{-1}e_2)^{\varkappa_r},\quad 1\lambda_1+..+r\lambda_r=r$$

und

$$(a;n)a_1^0(-e_1^{-1}e_2)^{\varkappa_1+..+\varkappa_r}$$
$$=r\sum\frac{(-1)^{\lambda_1+..+\lambda_n+r}(\lambda_1+..+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\,..\,\lambda_n!}((a;n)a_1^0)^{\lambda_1}\,..$$
$$((a;n)a_1^0\,..\,a_n^0)^{\lambda_n}(-e_1^{-1}e_2)^{\varkappa_1}\,..\,(-e_1^{-1}e_2)^{\varkappa_r},\quad 1\lambda_1+..+n\lambda_n=r.$$

Sie stellen die symmetrischen Functionen der Wurzeln durch ihre Potenzsummen und die Potenzsummen der Wurzeln durch andere symmetrische Functionen dar.

Für $\varkappa_1=1,\,..,\,\varkappa_r=1$ insbesondere hat man die Gleichungen

$$(a;n)a_1^0\,..\,a_r^0(-e_1^{-1}e_2)^r$$
$$=\sum\frac{(-1)^{\lambda_1+..+\lambda_r+r}}{\lambda_1!\,..\,\lambda_r!\,1^{\lambda_1}\,..\,r^{\lambda_r}}((a;n)a_1^0(-e_1^{-1}e_2)^1)^{\lambda_1}\,..\,((a;n)a_1^0(-e^{-1}e_2)^r)^{\lambda_r},$$
$$1\lambda_1+..+r\lambda_r=r$$

und

$$(a;n)a_1^0(-e_1^{-1}e_2)^r$$
$$=r\sum\frac{(-1)^{\lambda_1+..+\lambda_n+r}(\lambda_1+..+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\,..\,\lambda_n!}((a;n)a_1^0(-e_1^{-1}e_2)^1)^{\lambda_1}\,..$$
$$((a;n)a_1^0\,..\,a_n^0(-e_1^{-1}e_2)^n)^{\lambda_n},\quad 1\lambda_1+..+n\lambda_n=r.$$

Die Gleichung

$$a^n e_1^{n-r}e_2^r=a_1\,..\,a_n e_1^{n-r}e_2^r$$

führt aber, wenn man die ihr gleichwerthige Gleichung

$$\binom{n}{r}a^n e_1^{n-r}e_2^r=(a;n)a_1\,..\,a_r e_2^r\,.\,a_{r+1}\,..\,a_n e_1^{n-r}$$

durch $a^n e_1^n=a_1e_1\,..\,a_ne_1$ dividirt und mit $(-1)^r$ multiplicirt und endlich

$$a^0e_1^{-r}e_2^r=\frac{a^ne_1^{n-r}e_2^r}{a^ne_1^n}$$

setzt oder also durch $a^0e_1^{-1}e_2^1,\,..,\,a^0e_1^{-n}e_2^n$ die Coefficienten der Gleichung $\frac{a^n\varepsilon_2^{-n}p^0}{a^ne_1^n}=0$ bezeichnet, auf die Gleichung

$$(-1)^r\binom{n}{r}a^0e_1^{-r}e_2^r=(a;n)a_1^0\,..\,a_r^0(-e_1^{-1}e_2)^r.$$

Man kann ihnen daher auch die Form

$$\binom{n}{r} a^0 e_1^{-r} e_2^r = \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\dots+\lambda_r}}{\lambda_1!\dots\lambda_r!\, 1^{\lambda_1}\dots r^{\lambda_r}} ((a;n)a_1^0(-e_1^{-1}e_2)^1)^{\lambda_1}\dots$$
$$\dots((a;n)a_1^0(-e_1^{-1}e_2)^r)^{\lambda_r}, \quad 1\lambda_1+\dots+r\lambda_r = r$$

und

$$(a;n)a_1^0(-e_1^{-1}e_2)^r$$
$$= r\sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\dots+\lambda_n}(\lambda_1+\dots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\dots\lambda_n!} \binom{n}{1}^{\lambda_1}\dots\binom{n}{n}^{\lambda_n}(a^0 e_1^{-1}e_2^1)^{\lambda_1}\dots$$
$$(a^0 e_1^{-n} e_2^n)^{\lambda_n}, \quad 1\lambda_1+\dots+n\lambda_n = r$$

geben, und in dieser Form stellen sie die Coefficienten der Gleichung durch die Potenzsummen der Wurzeln und die Potenzsummen der Wurzeln durch die Coefficienten dar.

Berlin, den 7. December 1885. Leopold Schendel.

XXV. Berichtigung.

In einer Anmerkung zu dem Artikel XIII der Kleineren Mittheilungen im laufenden Jahrgang S. 174 dieser Zeitschrift gab ich auf Grund einer von mir gemachten Notiz über frühere Analysen an, dass der zweite Factor von $2^{37}-1$ bis $2^{59}-1$ eine Primzahl sei. Ich habe nunmehr das in der Mittheilung S. 303 angegebene Verfahren angewandt und gefunden, dass für $2^{47}-1$ der zweite Factor 59862819377 und für $2^{53}-1$ der zweite Factor 129728784761 zusammengesetzt sein mussten. In der That fand sich für den erstgenannten das Product 4513.13264529 und für den zweiten das Product 6361.20394401. Weiter geht die Zusammensetzung aber nicht. Für die übrigen angegebenen Fälle fand ich volle Bestätigung. Ein solches Uebersehen ist nach dem neueren Verfahren ausgeschlossen.

P. Seelhoff.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

31. Jahrgang. 6. Heft.

Mit zwei lithographirten Tafeln.

Ausgegeben am 20. November 1886.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1886.

XVII.

Ueber die Systeme, welche durch Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Polardreieck, bez. durch Flächen zweiten Grades mit einem gemeinsamen Polartetraeder gebildet werden.

Von

KARL MEISTER

aus Montabaur

im Auszuge veröffentlicht und mit einigen Zusätzen versehen

von

Dr. A. RASCHE

in Essen.

Hierzu Taf. IV Fig. 1—9.

Im Folgenden wird im Auszuge eine Arbeit veröffentlicht, für welche der leider zu früh verstorbene Verfasser im Jahre 1881 von der philosophischen Facultät zu Münster einen Preis erhielt. Wir geben zunächst die Hauptresultate der Untersuchung über das ebene System an.

§ 1.

1. Die Bedingung, ein gegebenes Dreieck zum Polardreieck zu haben, ist für einen Kegelschnitt, mag man ihn als Punkt- oder Tangentengebilde auffassen, gleich drei linearen einfachen Bedingungen. Demnach bilden alle Kegelschnitte, welche ein Dreieck ABC zum gemeinsamen Polardreieck haben, ein lineares System zweiter Stufe, das in sich dual ist, d. h. gleichzeitig die Eigenschaften eines Netzes und eines Gewebes besitzt.

Umgekehrt: „Jedes in sich duale lineare Kegelschnittsystem zweiter Stufe hat ein gemeinsames Polardreieck.“

Besitzen nämlich drei Kegelschnitte eines Netzes, die nicht demselben Büschel angehören, ein gemeinsames Polardreieck ABC, so ist dieses auch für alle anderen Kegelschnitte des Netzes ein Polardreieck. Dasselbe gilt auch für ein Kegelschnittgewebe, wenn drei nicht in einer Schaar liegende Kegelschnitte desselben ein gemeinsames Polardreieck haben.

Denken wir uns nun in einem in sich dualen Kegelschnittsystem zweiter Stufe eine Kegelschnittschaar. Letztere hat ein gemeinsames Polardreieck

ABC. Zwei beliebige Kegelschnitte der Schaar constituiren einen Büschel, dessen sämmtliche Kegelschnitte dem System angehören und das Dreieck *ABC* ebenfalls zum Polardreieck haben. Irgend zwei Kegelschnitte des Büschels, welche nicht der Schaar angehören, und irgend ein Kegelschnitt dieser Schaar, der nicht dem Büschel angehört, haben demnach das Dreieck *ABC* zum Polardreieck, folglich haben auch alle Kegelschnitte des Systems dieses Dreieck zum gemeinsamen Polardreieck.

Da je zwei Seiten des Polardreiecks, resp. je zwei Ecken desselben bezüglich aller Curven des Systems conjugirt sind, so folgt, dass jedes Geradenpaar im System seinen Mittelpunkt in einer der drei Ecken des Polardreiecks hat und zu den durch diese Ecke gehenden Seiten harmonisch ist, sowie dass jedes Punktepaar des Systems auf einer der drei Seiten des Polardreiecks liegt und durch die auf dieser Seite liegenden Ecken harmonisch getrennt wird. Fällt insbesondere eine Gerade des Geradenpaares mit einer Seite des Polardreiecks zusammen, so thut es auch die zweite; das Geradenpaar besteht dann aus zwei vereinigten Geraden. Die drei Seiten des Polardreiecks *ABC* bilden demnach drei doppelte Gerade des Systems.

Dualistisch: In unserem System giebt es drei doppelte Punkte, nämlich die Ecken des Polardreiecks.

2. Die Forderung, einen gegebenen Punkt zu enthalten, ist für die Kegelschnitte unseres linearen Systems, als Netz betrachtet, mit einer linearen Bedingung äquivalent; derselben genügen also die Kegelschnitte eines Büschels im System.

Fassen wir das Kegelschnittsystem als ein Gewebe auf, so ist die Bedingung, eine gegebene Gerade zu berühren, ebenfalls eine lineare; eine Gerade wird mithin von den Kegelschnitten einer Schaar des Systems berührt. Ferner ergiebt sich:

Durch zwei Punkte geht e i n Kegelschnitt, zwei Gerade werden von e i n e m Kegelschnitte des Systems berührt.

Da eine gegebene Gerade zwei Kegelschnitte eines Büschels berührt, so folgt:

Durch einen gegebenen Punkt gehen zwei Kegelschnitte des Systems, welche eine gegebene Gerade berühren.

Jeder Büschel des Systems enthält drei Geradenpaare, deren Mittelpunkte die drei Ecken des gemeinsamen Polardreiecks sind. Ist also ein Grundpunkt P des Büschels gegeben, so lassen sich die drei anderen leicht construiren. Man verbinde nämlich P mit zwei Ecken A und B des Polardreiecks und construire zu PA und PB bezüglich der durch A resp. B gehenden Dreiecksseiten die vierten harmonischen Strahlen. Damit hat man zwei Geradenpaare des Büschels, welche sich ausser in P noch in den gesuchten Punkten schneiden. Genau auf duale Weise findet man, wenn eine Gerade p als Grundtangente einer Schaar gegeben ist, die drei anderen gemeinschaftlichen Tangenten.

Je vier Grundpunkte eines Büschels wollen wir associirte Punkte, je vier Grundtangenten einer Schaar associirte Geraden nennen. (Vergl. Reye, Geometrie der Lage, II. Abth. S. 236 der 2. Aufl.) Zu jedem Punkte der Ebene sind also drei andere Punkte, und zu jeder Geraden drei andere Geraden associirt.

Insbesondere sind zu der unendlich fernen Geraden der Ebene diejenigen drei Geraden associirt, welche die Mitten A', B', C' der Seiten BC, CA, AB des Polardreiecks verbinden, da der Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt auf jeder Seite harmonisch getrennt werden durch die beiden daraufliegenden Ecken.

3. Vier Punkte eines Kegelschnittes und ihre vier Tangenten haben dasselbe Diagonaldreieck. (Reye, Geom., I S. 69.) Haben wir nun vier associirte Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, so geht durch diese ein Kegelschnittbüschel unseres Systems. Ziehen wir an einen dieser Kegelschnitte in den Grundpunkten A_1, A_2, A_3, A_4 die vier Tangenten a_1, a_2, a_3, a_4, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass a_1, a_2, a_3, a_4 die Grundtangenten einer Kegelschnittschaar sind, welche mit dem Büschel dasselbe Polardreieck hat, also zu unserem System gehört. Wir gewinnen daher den Satz:

Dreht eine Gerade a_1 sich um einen Punkt A_1, so drehen die drei associirten Geraden a_2, a_3, a_4 sich bez. um die drei associirten Punkte A_2, A_3, A_4."

Dualistisch:

„Bewegt ein Punkt A_1 sich auf einer Geraden a_1, so bewegen die drei associirten Punkte A_2, A_3, A_4 sich bez. auf den drei associirten Geraden a_2, a_3, a_4."

Zu jedem Punktepaare A_1, B_1 sind hiernach drei andere Punktepaare A_2, B_2; A_3, B_3; A_4, B_4 associirt, so zwar, dass zu der Geraden A_1B_1 die drei Geraden A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 associirt sind. Ebenso sind zu jedem Paare von Geraden drei andere Paare von Geraden associirt.

Da durch zwei Punkte, resp. durch zwei Tangenten ein Kegelschnitt des Systems im Allgemeinen bestimmt ist, so ergiebt sich:

„Je zwei Gruppen associirter Punkte liegen auf einem Kegelschnitt, und je zwei Gruppen associirter Geraden berühren einen Kegelschnitt des Systems."

Ferner sind zu dem Schnittpunktepaar einer Geraden mit einem Kegelschnitt des Systems diejenigen drei Punktepaare associirt, in welchen die drei associirten Geraden der ersten den Kegelschnitt schneiden, und zu den Tangentenpaaren aus einem Punkte an einen Kegelschnitt des Systems sind die drei Tangentenpaare aus den drei associirten Punkten an den Kegelschnitt associirt. Da nun zu dem Berührungspunkte einer Tangente die Berührungspunkte der associirten Tangenten associirt sind, so bilden auch die Berührungspunkte der vier associirten Tangentenpaare mit dem Kegel-

schnitte vier associirte Punktepaare, und die Verbindungslinien derselben vier associirte Geraden. Also:

„Die Polaren von vier associirten Punkten bezüglich eines Kegelschnittes des Systems bilden vier associirte Geraden."

Dualistisch:

„Die Pole von vier associirten Geraden bezüglich eines Kegelschnittes des Systems bilden vier associirte Punkte."

Zusatz. Was die Realität oder Imaginarität der associirten Elemente anbetrifft, so sind unter Voraussetzung eines reellen Polardreiecks die associirten Elemente sämmtlich reell, wenn eines unter ihnen reell ist; dagegen imaginär, wenn eines imaginär ist. (Vgl. Schröter, Kegelschnitte, 2. Aufl. S. 368 flg.)

§ 2.

1. Jeder Punkt M ist im Allgemeinen der Mittelpunkt eines einzigen Kegelschnittes des Systems, da dieser Punkt und die unendlich ferne Gerade als Pol und Polare einen Kegelschnitt des Systems bestimmen. Je nachdem der Punkt innerhalb der drei Räume (h) (Fig. 1) oder der vier Räume (e) liegt, in welche die Ebene durch die Seiten des Dreiecks ABC und die unendlich ferne Gerade getheilt wird, ist der betreffende Kegelschnitt eine Hyperbel oder Ellipse (Schröter, Kegelschnitte, S. 288), und zwar sind die im Innern des Dreiecks ABC liegenden Punkte die Mittelpunkte imaginärer Ellipsen.

Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte eines Büschels liegen auf dem Mittelpunktskegelschnitte des Büschels, welcher durch die drei Ecken des Polardreiecks geht (Schröter, Kegelschnitte, S. 304); und umgekehrt ist jeder dem Dreieck ABC umgeschriebene Kegelschnitt der Mittelpunktskegelschnitt eines Büschels des Systems; denn zwei Punkte P_1 und P_2 desselben sind die Mittelpunkte zweier Kegelschnitte K' und K'' im System, welche einen Büschel constituiren, dessen Mittelpunktskegelschnitt mit dem ersten Kegelschnitt identisch ist, da er mit ihm fünf Punkte gemeinsam hat.

2. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte einer Schaar des Systems liegen auf einer Geraden; und umgekehrt ist jede Gerade l Mittelpunktslinie einer Schaar; denn sie ist zur unendlich fernen Geraden conjugirt bezüglich einer Schaar des Systems. Construiren wir zu den beiden Schnittpunkten der gegebenen und der unendlich fernen Geraden mit einer Seite, etwa AB, des Dreiecks ABC und zu den Ecken A und B das gemeinschaftlich harmonisch trennende Punktepaar, so ist dieses eines der drei Punktepaare der Schaar. Führt man diese Construction auch auf den beiden anderen Seiten des Dreiecks ABC aus, so erhält man die beiden ferneren Punktepaare der Schaar. Diese drei Punktepaare liegen auf vier Geraden, den vier Grundtangenten der Schaar. Geht die Gerade l durch eine der drei Ecken des Polardreiecks, so fallen zwei Punktepaare der Schaar in dieser Ecke zu-

sammen; es vereinigen sich gleichzeitig je zwei von den vier gemeinsamen Tangenten der Schaar und letztere besteht somit aus doppelt berührenden Kegelschnitten. Ferner ergiebt sich die der betreffenden Ecke des Polardreiecks gegenüberliegende Seite als die gemeinsame Berührungssehne dieser Kegelschnitte. Die gemeinsamen Berührungspunkte der Kegelschnitte auf dieser Seite können leicht gefunden werden.

Nehmen wir an, l gehe durch die Ecke C und schneide die Seite AB in E; sei K^2 ein Kegelschnitt der Schaar, welche l zur Mittelpunktslinie hat. Da der Durchmesser l durch den Pol C der Seite AB bezüglich K^2 geht, so geht auch die Gerade AB durch den Pol von l bezüglich K^2, oder der Punkt E und der unendlich ferne Punkt von AB sind bezüglich K^2 conjugirte Punkte. Von der Involution der conjugirten Punkte bezüglich K^2 auf der Geraden AB kennen wir also die beiden Punktepaare A und B und ebenso E und den unendlich fernen Punkt auf AB oder, was dasselbe ist, das Punktepaar A und B und den Centralpunkt E der Involution. Die Potenz der Involution ist mithin $EA.EB = a^2$; dadurch sind uns aber die Doppelpunkte der Involution, d. h. die Schnittpunkte von K^2 mit AB und folglich auch die gemeinsamen Berührungspunkte der Kegelschnitte der Schaar gegeben.

Das vorhin Gefundene gilt insbesondere auch von den drei Höhen des Polardreiecks und da jede die zu ihr senkrechte Seite des Polardreiecks zu einer conjugirten Geraden hat, so ist sie eine Axe aller derjenigen Kegelschnitte des Systems, von denen sie ein Durchmesser ist. Also:

„Jede der drei Höhen des Polardreiecks ist gemeinsame Axe der Kegelschnitte einer Schaar von sich doppelt berührenden Kegelschnitten des Systems."

§ 3.

1. Durch einen seiner Brennpunkte ist ein Kegelschnitt des Systems im Allgemeinen eindeutig bestimmt; denn er repräsentirt zwei Tangenten, welche aus den unendlich fernen Kreispunkten an den Kegelschnitt gehen. (Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, S. 403 der 4. Aufl.) Die zwei zu einem Kegelschnitt gehörigen reellen Brennpunkte wollen wir correspondirende Brennpunkte nennen.

„Ziehen wir von einem Punkte einer Seite des Polardreiecks ABC die Tangentenpaare an sämmtliche Kegelschnitte des Systems, so bilden dieselben eine Strahleninvolution."

Ist nämlich P ein Punkt auf BC, p eine beliebige Gerade durch P, so ist p Grundtangente einer Schaar unseres Systems. Wir suchen jetzt die associirten Geraden. Zu dem Ende construire man (vergl. § 1 Nr. 2) zu P bezüglich B und C, ferner zu dem Schnitte von p mit AB bezüglich A und B die vierten harmonischen Punkte. Damit hat man zwei Punktepaare der Schaar und die Verbindungslinien derselben geben uns ausser p die

drei übrigen Grundtangenten. Eine derselben, sie heisse p', geht durch P. Gehen wir umgekehrt aus von der Geraden p' durch P, so finden wir als zweite Grundtangente aus P an dieselben Kegelschnitte die Linie p. Es sind demnach die Strahlen um den Punkt P involutorisch gepaart, indem sich je zwei solcher Strahlen entsprechen, welche Grundtangenten derselben Schaar sind. Fällt insbesondere p mit BC zusammen oder geht p durch die der Seite BC gegenüberliegende Ecke A, so vereinigt sich nach der angegebenen Construction p' mit p. Wir erhalten also die Doppelstrahlen der Involution. Für den Fall, dass der Punkt P mit dem Höhenfusspunkte auf einer der drei Seiten des Polardreiecks incidirt, sind die Doppelstrahlen der Tangenteninvolution — die betreffende Seite und die zugehörige Höhe — zu einander normal, die Involution ist eine gleichseitig hyperbolische, d. h. die Strahlen eines Paares bilden mit den Doppelstrahlen gleiche Winkel.

2. Aus der Kegelschnittstheorie ist der Satz bekannt: Die Halbirungslinien der Winkel des von einem beliebigen Punkte O an einen Kegelschnitt gelegten Tangentenpaares und die Halbirungslinien der Winkel des von O nach den beiden Brennpunkten des Kegelschnitts gehenden Strahlenpaares fallen zusammen. (Schröter, S. 199.) Hieraus folgt:

„Die von dem Höhenfusspunkte einer Seite des Polardreiecks nach irgend zwei correspondirenden Brennpunkten gehenden Strahlen bilden sowohl mit der betreffenden Seite, als auch mit der zugehörigen Höhe gleiche Winkel."

Man kann hiernach leicht zu jedem Brennpunkte F den correspondirenden construiren. Denn verbindet man F mit zwei Höhenfusspunkten R und S (Fig. 2) des Polardreiecks und zieht durch R und S diejenigen Linien, welche mit den entsprechenden Höhen dieselben Winkel bilden wie FR und FS, so schneiden sich dieselben in dem dem Punkte F correspondirenden Brennpunkte F'. So erhalten wir im Allgemeinen zu jedem Brennpunkte einen und nur einen correspondirenden. Wir wollen nun zu einem der drei Höhenfusspunkte R, S, T (Fig. 2), etwa zu R, den correspondirenden suchen. Verbinden wir R mit S und T und construiren diejenigen Strahlen durch S und T, welche mit den Höhen SB und TC bez. dieselben Winkel bilden wie SR und TR, so erhalten wir beidemal den Strahl ST; denn die Höhen halbiren bekanntlich die Winkel des Dreiecks RST der Höhenfusspunkte. Der Schnittpunkt der beiden Linien wird also unbestimmt und es ist daher jeder Punkt der Linie ST dem Punkte R correspondirend und umgekehrt. Also:

„Jedem Höhenfusspunkte des Polardreiecks correspondiren alle Punkte der Verbindungslinie der beiden übrigen; und umgekehrt, jedem Punkte auf der Verbindungslinie zweier Höhenfusspunkte correspondirt der dritte."

„Bewegt der eine Brennpunkt F sich auf einer Geraden, so beschreibt der correspondirende F' einen Kegelschnitt durch die drei Höhenfusspunkte R, S, T."

Denn die beiden Strahlen, welche F aus zwei Höhenfusspunkten R und S projiciren, beschreiben perspective Strahlbüschel, mit welchen bez. die durch RF' und SF' beschriebenen Strahlbüschel projectiv sind. Letztere sind daher auch unter einander projectiv, erzeugen also einen Kegelschnitt, der durch R und S geht. Da wir statt eines der beiden ersten Höhenfusspunkte auch den dritten T als Mittelpunkt eines der erzeugenden Strahlbüschel hätten wählen können, so geht der Kegelschnitt auch durch T. Umgekehrt: Beschreibt der eine Brennpunkt einen Kegelschnitt durch R, S, T, so bewegt der correspondirende sich auf einer Geraden. Denn construirt man zu zwei beliebigen Punkten des Kegelschnittes die correspondirenden und verbindet letztere durch eine Gerade, so entspricht dieser ein Kegelschnitt, welcher mit dem ersten fünf Punkte gemein hat, also mit demselben identisch ist.

„Wir sehen somit, dass die correspondirenden Brennpunkte in einer involutorischen quadratischen Beziehung stehen." Die „Hauptpunkte" und „Hauptlinien" (Reye, Geom., II. Abth. S. 119) sind die drei Höhenfusspunkte und deren Verbindungslinien.

Bewegt sich der eine Brennpunkt auf einer Curve n^{ter} Ordnung, so beschreibt der correspondirende eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Punkte R, S, T zu n-fachen Punkten hat.

3. Der unendlich fernen Geraden entspricht der dem Dreieck RST umgeschriebene Kreis oder der Feuerbach'sche Kreis des Polardreiecks. Denn sei P_∞ ein unendlich ferner Punkt und P_1 der correspondirende (Fig. 2), so ist

$$\angle P_1RT = P_\infty RS, \quad \angle P_\infty RS = P_\infty SR, \quad \angle P_\infty SR = P_1ST,$$

folglich

$$\angle P_1RT = P_1ST,$$

also auch

$$\angle RP_1S = RTS,$$

d. h.: P_1 liegt auf dem durch RST gehenden Kreise.

Den beiden Schnittpunkten einer Geraden mit diesem Kreise sind die unendlich fernen Punkte des der Geraden entsprechenden Kegelschnitts correspondirend. Je nachdem also die Gerade den Kreis reell schneidet, berührt oder imaginär trifft, ist der entsprechende Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse. Die beiden Schnittpunkte der Geraden mit ihrem entsprechenden Kegelschnitte sind die beiden Brennpunkte desjenigen Kegelschnittes, welcher die Gerade zur Axe hat; denn da sie sowohl auf der Geraden, als auch auf dem Kegelschnitt liegen, so correspondiren sie einander.

Einer durch einen Höhenfusspunkt gehenden Geraden entspricht wieder eine Gerade durch denselben, nämlich diejenige, welche mit der durch diesen Höhenfusspunkt gehenden Höhe denselben Winkel bildet, wie die erste. Eine Höhe entspricht daher sich selbst. Die darauf befindlichen Brennpunktepaare bilden offenbar eine Involution, deren Doppelpunkte der Höhen-

punkt und die auf der Höhe befindliche Ecke des Polardreiecks sind; denn sie werden aus jedem der beiden nicht auf dieser Höhe liegenden Höhenfusspunkte durch Strahlenpaare einer gleichseitig hyperbolischen Involution projicirt, deren Doppelstrahlen die durch den betreffenden Höhenfusspunkt gehende Seite des Polardreiecks und die zugehörige Höhe sind. (Vergl. Schröter, Kegelschnitte, S. 187—189.)

Wir müssen hier eine Bemerkung einschalten. Nach § 2 liegen die Mittelpunkte der Hyperbeln des Systems in den Räumen (h), die der Ellipsen in den Räumen (e), und zwar die der imaginären Ellipsen im Innern des Polardreiecks ABC (Fig. 1). Ueberschreiten wir eine Dreiecksseite, so bildet dieselbe, doppelt genommen, den Uebergang von Hyperbeln zu Ellipsen, und zwar, wenn wir dieselbe ausserhalb des Dreiecks überschreiten, so kommen wir zu reellen Ellipsen; gelangen wir aber beim Ueberschreiten in das Innere des Dreiecks, zu imaginären Ellipsen. Im ersten Falle muss die doppelte Gerade aufgefasst werden als eine Hyperbel, deren Nebenaxe unendlich klein ist, weil sie durch Null vom Imaginären zum Reellen übergehen muss, oder als eine Hyperbel, deren Asymptotenwinkel gleich 0^0 ist. Im zweiten Falle dagegen muss die doppelte Gerade betrachtet werden als eine Hyperbel mit unendlich kleiner Hauptaxe, weil dieselbe imaginär werden muss, was beim Uebergange durch Null geschieht, d. h., sie ist eine Hyperbel, deren Asymptotenwinkel gleich 180^0 ist.

Wir kehren nun zu unserer früheren Betrachtung zurück. Die Seiten des Polardreiecks entsprechen sich ebenfalls von selbst. (Vergl. Nr. 2.) Die Brennpunktepaare auf einer derselben bilden gleichfalls eine Involution, deren Doppelpunkte die auf der Seite liegenden Ecken des Dreiecks ABC sind. Die Mitten zwischen zwei reellen Brennpunkten eines solchen Paares liegen ausserhalb der durch die beiden Ecken bestimmten Strecke. Folglich gehört jedes dieser reellen Brennpunktepaare zu der Seite, als doppelte Gerade aufgefasst, für den Fall, wo sie den Uebergang zwischen Hyperbeln und reellen Ellipsen bildet.

4. Ein Höhenfusspunkt des Polardreiecks ist nach dem Vorhergehenden (Nr. 2) Brennpunkt von unendlich vielen Kegelschnitten, deren zweite Brennpunkte auf der Verbindungslinie der beiden übrigen Höhenfusspunkte liegen. Alle diese Kegelschnitte bilden eine Schaar; denn sie haben die Verbindungslinien des gemeinsamen Brennpunktes mit den unendlich fernen Kreispunkten zu gemeinsamen Tangenten. Diese beiden Linien aber sind harmonisch zu der durch den Höhenfusspunkt gehenden Seite und zugehörigen Höhe, bilden folglich zwei Tangenten einer Schaar unseres Systems. (Vergl. Nr. 1.) Wir gewinnen mithin den Satz:

„In unserem System giebt es drei Schaaren von Kegelschnitten, welche je einen Höhenfusspunkt des gemeinsamen Polardreiecks zum gemeinsamen Brennpunkt haben.“

Die Mittelpunktsgerade einer solchen Schaar ist leicht construirbar. Da die übrigen Brennpunkte der Kegelschnitte der Schaar nach dem Vorhergehenden auf einer Geraden liegen, so erhalten wir die Mittelpunktsgerade, indem wir die Mittelsenkrechte zu dem vom gemeinsamen Brennpunkte auf die Brennpunktsgerade gefällten Lothe ziehen. Die Hauptaxen ferner bilden einen Strahlbüschel um den gemeinsamen Brennpunkt. Die Nebenaxen werden gebildet durch den einen Schenkel eines rechten Winkels, dessen anderer Schenkel durch den gemeinschaftlichen Brennpunkt geht, während der Scheitel sich auf der Mittelpunktsgeraden bewegt. Sie umhüllen also eine Parabel, die den gemeinsamen Brennpunkt ebenfalls zum Brennpunkt und die Mittelpunktsgerade zur Scheiteltangente, also die Brennpunktsgerade zur Leitlinie hat. (Schröter, S. 200.) Diese Parabel berührt auch diejenigen beiden Seiten des Polardreiecks, welche nicht durch den gemeinsamen Brennpunkt gehen. Denn sei der letztere der Punkt R (Fig. 2), so ist

$$\angle RSC = TSA,$$

also muss, wenn man von R auf AC die Senkrechte RE fällt und um sich selbst verlängert, der Endpunkt D auf ST fallen, woraus folgt, dass AC eine Tangente der Parabel ist. Das Gleiche gilt von AB. Die zum Brennpunkt R gehörigen Leitlinien aller Kegelschnitte der Schaar gehen durch die der Seite BC gegenüberliegende Ecke A des Polardreiecks, weil A zu R bezüglich der Kegelschnitte des Systems und mithin auch bezüglich aller Kegelschnitte der Schaar conjugirt ist.

Da jede Schaar unseres Systems mit jedem Büschel desselben zwei Kegelschnitte gemein hat — denn eine Grundtangente der Schaar und folglich auch ihre drei associirten Geraden, die übrigen Grundtangenten, berühren dieselben zwei Kegelschnitte des Büschels im System —, so ergiebt sich, „dass in jedem Kegelschnittbüschel sich je zwei Kegelschnitte befinden, welche einen der drei Höhenfusspunkte des gemeinsamen Polardreiecks zum gemeinsamen Brennpunkt haben“.

5. Jeder Punkt der Ebene ist nach Nr. 1 Brennpunkt eines gewissen Kegelschnitts in unserm System. Es fragt sich, wie die Brennpunkte der Ellipsen und Hyperbeln vertheilt sind. Wir wollen die Grenzlinien untersuchen, d. h. diejenigen Linien, auf welchen die Brennpunkte der Parabeln und doppelten Geraden in unserem System liegen, da diese den Uebergang von Ellipsen zu Hyperbeln bilden. Die Parabeln bilden den Uebergang zwischen reellen Ellipsen und Hyperbeln. Die Parabeln des Systems bilden eine Schaar (vergl. § 1 Nr. 2). Ihre Brennpunkte liegen auf der unendlich fernen Geraden und dem Feuerbach'schen Kreise des Polardreiecks (vergl. Reye, I. Abth. S. 185). Doppelte Geraden im System sind die drei Seiten des Polardreiecks. Fassen wir jede derselben auf als eine Hyperbel mit unendlich kleiner Nebenaxe, so liegen die reellen Brennpunkte auf ihr und sie bildet den Uebergang zwischen reellen Hyperbeln und reellen Ellipsen

(Nr. 3). Betrachten wir sie aber als eine Hyperbel mit unendlich kleiner Hauptaxe, so bildet sie den Uebergang zwischen Hyperbeln und imaginären Ellipsen, und ihre reellen Brennpunkte liegen auf einem gewissen Kreise. Nehmen wir z. B. die Seite BC, beschreiben über BC als Durchmesser den Kreis und construiren zu irgend einem Punkte E dieses Kreises als Brennpunkt eines Kegelschnitts unseres Systems den conjugirten E', so finden wir, dass derselbe ebenfalls auf diesem Kreise liegt. Letzterer geht nämlich durch die Höhenfusspunkte S und T auf den beiden anderen Seiten AB und AC (Fig. 3). Ferner ist

$$\angle ETB = E'TB, \quad \angle ESB = E'SB \text{ (Nr. 2).}$$

Als Peripheriewinkel sind aber die Winkel ETB und ESB, da sie über demselben Bogen stehen, einander gleich, folglich ist auch

$$\angle ETE' = ESE'.$$

Daher

$$\angle TES = TE'S,$$

d. h.: E liegt auf dem Kreise über BC als Durchmesser. Da auch

$$\angle ERB = E'RB$$

ist, so erhält man E', indem man von E auf BC die Senkrechte fällt und mit dem Kreise schneidet. EE' wird also von der Seite BC halbirt oder E und E' sind die Brennpunkte eines Kegelschnitts, dessen Mittelpunkt auf der Seite BC liegt; das ist aber die doppelte Gerade BC.

Demnach trennen die über den Seiten des Polardreiecks als Durchmessern beschriebenen Kreise die Brennpunkte von Hyperbeln von denjenigen imaginärer Ellipsen.

Da wir von reellen zu imaginären Kegelschnitten weiter keine Uebergangslinien haben, so müssen diejenigen Theile der Ebene, welche die Brennpunkte der imaginären Ellipsen enthalten, ganz von jenen drei Kreisen begrenzt werden. Die übrigen Räume enthalten abwechselnd Brennpunkte von Hyperbeln und von reellen Ellipsen. Eine Uebersicht über die Vertheilung der Brennpunkte ist in Fig. 4 gegeben. Die schraffirten Flächentheile bezeichnen die Lage der Brennpunkte von Ellipsen, und zwar die horizontal schraffirten die von reellen, die vertical schraffirten die von imaginären Ellipsen; die weissen Partien aber enthalten die Brennpunkte der Hyperbeln. Erstere sind mit $e_1, e_2, e_3, \ldots; e'_1, e'_2, e'_3, \ldots$; letztere mit $h_1, h_2, h_3, \ldots; h'_1, h'_2, h'_3, \ldots$ bezeichnet, wo die Räume $e'_1, e'_2, \ldots, h'_1, h'_2, \ldots$ diejenigen Brennpunkte enthalten, welche bez. den in $e_1, e_2, \ldots, h_1, h_2, \ldots$ enthaltenen correspondiren. Liegt z. B. ein Brennpunkt in e_8, so liegt der correspondirende in e'_8; denn e_8 wird begrenzt von den Kreisbogen BD und BT und der Linie DT. Dem Bogen BD entspricht der Bogen BR und dem Bogen BT der Bogen BF. Der Linie DT entspricht der Punkt R und dem Punkte T die Linie FR. Die Stücke BR, BF und FR begrenzen aber den Flächentheil e'_8.

§ 4.

1. Was die Art der Kegelschnitte anbetrifft, die im System enthalten sind, so ist zunächst leicht einzusehen, dass in unserem Netze, wie in jedem Netze, ein und nur ein Kreis vorkommt, da durch zwei Punkte, also auch durch die beiden unendlich fernen Kreispunkte, ein Kegelschnitt des Systems bestimmt ist. Der Mittelpunkt des Kreises ist der Höhenpunkt des gemeinsamen Polardreiecks, und je nachdem das letztere stumpfwinklig oder spitzwinklig ist, ist der Kreis reell oder imaginär. (Vergl. Schröter, Kegelschnitte, S. 48, und Salmon, Kegelschnitte, S. 401.)

Ferner enthält das System einen Büschel gleichseitiger Hyperbeln, da die gleichseitigen Hyperbeln definirt werden als Kegelschnitte, welche die unendlich fernen Kreispunkte zu conjugirten Punkten haben. Die drei (rechtwinkligen) Geradenpaare des Büschels ergeben sich leicht als die Halbirungslinien der Winkel des Polardreiecks und der Nebenwinkel derselben. Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln aber liegen auf dem Kreise, der dem Polardreieck umgeschrieben ist. (Schröter, Kegelschnitte, S. 233.)

2. Sämmtliche Parabeln des Systems als Kegelschnitte, welche die unendlich ferne Gerade berühren, bilden eine Schaar, deren drei im Endlichen gelegene Grundtangenten $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ sind. (Vergl. § 1 Nr. 2.) Ihre Brennpunkte liegen auf demjenigen Kreise, welcher durch die Punkte A', B', C' und folglich auch durch die Höhenfusspunkte des Polardreiecks geht, also auf dem Feuerbach'schen Kreise des Polardreiecks. (Vergl. Reye, I. Abth. S. 138 und 185.)

Ferner: Die Scheiteltangente einer Parabel ist bekanntlich die Fusspunktcurve der vom Brennpunkte auf die Tangenten der Parabel gefällten Lothe. (Reye, I. Abth. S. 136.) Fällt man demnach von irgend einem Punkte F des Feuerbach'schen Kreises des Polardreiecks auf die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ die Lothe, so liegen deren Fusspunkte auf einer Geraden, nämlich auf der Scheiteltangente derjenigen Parabel, welche F zum Brennpunkt hat. Wir sehen hieraus, dass die Scheiteltangenten aller Parabeln der Schaar eine Curve dritter Classe und vierter Ordnung K_3, die Steiner'sche Hypocycloide mit drei Spitzen, umhüllen. (Vergl. Steiner, Crelle's Journal Bd. 53 S. 133.) Die unendlich ferne Gerade ist eine Doppeltangente derselben; sie ergiebt sich nämlich nach obiger Construction als Scheiteltangente derjenigen beiden Parabeln der Schaar, welche einen der beiden unendlich fernen Kreispunkte zum Brennpunkt haben.

Eine Parabel der Schaar ist durch ihren unendlich fernen Punkt oder durch ihren Brennpunkt bestimmt. Jedem Punkte des um $A'B'C'$ beschriebenen Kreises, als Brennpunkt einer Parabel, ist daher der unendlich ferne Punkt derselben zugeordnet und umgekehrt. Der Kreis und die unendlich

ferne Gerade sind demnach eindeutig aufeinander bezogen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte, d. h., die Axen der Parabeln umhüllen demnach eine Curve dritter Classe und vierter Ordnung K'_3, und zwar gleichfalls eine Steiner'sche Hypocycloide. (Schröter, Crelle's Journal Bd. 54 S. 31.) Gemäss der Erzeugung tritt die unendlich ferne Gerade zweimal als Axe auf, nämlich als Axe derjenigen beiden Parabeln, welche einen der beiden unendlich fernen Kreispunkte zum Brennpunkt haben. Die Tangenten der Curve K'_3 sind auf die von K_3 eindeutig beziehbar, indem je zwei solche einander entsprechen sollen, welche als Axe und Scheiteltangente derselben Parabel angehören. Die Schnittpunkte entsprechender Tangenten, die Scheitel der Parabeln, liegen also nach dem Chasles-schen Correspondenzprincip auf einer Curve sechster Ordnung. Letztere zerfällt indessen in eine Curve vierter Ordnung und die doppelte unendlich ferne Gerade, da für diejenigen beiden Parabeln, welche einen der beiden unendlich fernen Kreispunkte zum Brennpunkt haben, die Scheiteltangente mit der Axe coincidirt. Der Ort der Scheitel der eigentlichen Parabeln des Systems ist mithin eine Curve vierter Ordnung.

§ 5.

1. Wir nennen zwei Kegelschnitte einander ähnlich, wenn ihre reellen oder imaginären Asymptotenwinkel einander gleich sind. Hiernach müssen wir auch zwei conjugirte Kegelschnitte einander ähnlich nennen.

Um zunächst den Ort der Mittelpunkte eines Systems ähnlicher Kegelschnitte in unserem System zu untersuchen, wollen wir mit dem Felde der Mittelpunkte aller Kegelschnitte unseres Netzes eine Transformation vornehmen.

Ist M der Mittelpunkt eines Kegelschnitts des Netzes, so bilden MA und die Parallele durch M zu BC ein Paar conjugirter Durchmesser dieses Kegelschnitts, und wir können demnach leicht drei Paare der Durchmesserinvolution construiren. (Schröter, S. 288.)

Wir denken uns nun die Durchmesserinvolutionen sämmtlicher Kegelschnitte des Netzes mit ihren Mittelpunkten M nach einem und demselben Punkte O einer Kreises $\mathfrak{K}$ parallel verschoben. Jede Durchmesserinvolution schneidet in den Kreis eine Punktinvolution ein, und die Verbindungslinien sämmtlicher Paare derselben laufen durch einen Punkt M', das Involutionscentrum. Durch letzteres gehen auch die Tangenten des Kreises in den Doppelpunkten der Involution. So entspricht jedem Punkte M im ersten Felde (I) ein Punkt M' im zweiten (II). Ebenso umgekehrt; denn M' als Involutionscentrum bestimmt die Punktinvolution auf $\mathfrak{K}$, und letztere die Strahleninvolution um O. In dieser befinden sich zwei Strahlenpaare, von denen zwei Strahlen zu zwei Seiten, etwa zu BC und CA des Polardreiecks parallel sind. Ziehen wir nun zu dem jedesmaligen zweiten Strahl die Parallele durch A, bez. B, so schneiden sich diese in M (Fig. 5).

2. Der Punkt M' ist schon durch zwei Paare der Durchmesserinvolution bestimmt. Ziehen wir also durch O die Parallelen zu BC, CA, AB, welche $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ schneiden mögen, ferner die Parallelen zu MA, MB, MC durch O, welche $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ treffen, so schneiden sich die drei Linien $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ in M'. Zwei derselben genügen zur Bestimmung von M'. Die beiden Felder (I) und (II) stehen in quadratischer Beziehung, die Hauptdreiecke sind ABC, resp. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. (Vergl. Schröter, Kegelschnitte, S. 290—294.) Die beiden Dreiecke ABC und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ haben gleiche Winkel; denn es ist nach Fig. 5

$$\angle \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{O}\mathfrak{B} = ACB \text{ und } \angle \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{O}\mathfrak{C} = ABC,$$

folglich auch

$$\angle \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C} = BAC.$$

Dem Höhenpunkt Q des Polardreiecks entspricht der Mittelpunkt Q' des Kreises $\mathfrak{K}$; denn in diesem Falle ist die Durchmesserinvolution circular, die Punktinvolution auf $\mathfrak{K}$ besteht also aus Paaren von Durchmesserendpunkten, und das Involutionscentrum Q' ist daher der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$.

Der unendlich fernen Geraden im ersten Felde entspricht im zweiten der Kreis $\mathfrak{K}$. Denn ist M unendlich fern, so sind MA und MB einander parallel, $\mathfrak{O}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{B}_1$ fallen also zusammen, und die Linien $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ schneiden sich demnach auf $\mathfrak{K}$.

Ferner dem Kreise $\mathfrak{K}$ um ABC entspricht die unendlich ferne Gerade im zweiten Felde. Denn liegt M auf K, so ist die zugehörige Durchmesserinvolution gleichseitig hyperbolisch — die Punkte von K sind die Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln des Systems (§ 4 Nr. 2) —, die Doppelstrahlen also sind rechtwinklig. Wir erhalten demnach auf $\mathfrak{K}$ als Doppelpunkte der Punktinvolution zwei Durchmesserendpunkte und die Tangenten in diesen schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte.

Es folgt aus dem Vorhergehenden, dass den unendlich fernen Kreispunkten des einen Feldes die unendlich fernen Kreispunkte im andern entsprechen.

3. Je nachdem der Punkt M im ersten Felde Mittelpunkt einer Ellipse oder Hyperbel ist, ist die Durchmesserinvolution elliptisch oder hyperbolisch, der entsprechende Punkt M' also innerhalb oder ausserhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ gelegen.

Den Punkten innerhalb des Dreiecks ABC, also den Mittelpunkten imaginärer Ellipsen, entsprechen auch die Punkte innerhalb des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ (Fig. 6), denn den Seiten AB, BC, CA entsprechen die Punkte $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, dagegen den Punkten A, B, C die Seiten $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Den Punkten innerhalb der Räume (e_2), (e_3), (e_4), den Mittelpunkten der reellen Ellipsen, entsprechen die Punkte innerhalb der Räume (e'_2), (e'_3), (e'_4); denn z. B. die Begrenzung von (e_2) besteht aus den Seiten AB, AC, der unendlich fernen Geraden und dem Punkte A, denen bez. die Punkte $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$, der Kreis $\mathfrak{K}$ und die Seite $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ entsprechen. Aehnlich findet man, dass

den Punkten innerhalb der Räume (h_1), (h_2), (h_3), (h_4), (h_5), (h_6), den Mittelpunkten der Hyperbeln, die Punkte der Räume (h'_1), (h'_2), (h'_3), (h'_4), (h'_5), (h'_6) entsprechen.

§ 6.

1. Wir fragen uns nun, wo in dem zweiten Felde diejenigen Punkte M' liegen, denen die Mittelpunkte einander ähnlicher Kegelschnitte im ersten Falle entsprechen. Offenbar müssen sie eine solche Lage haben, dass die aus ihnen an $\mathfrak{K}$ gezogenen Tangenten gleiche Berührungssehnen haben; denn letztere erscheinen dann aus O unter demselben Winkel, und dieser ist der Asymptotenwinkel derjenigen Kegelschnitte, welche die den Punkten M' entsprechenden zu Mittelpunkten haben. Der Ort der Punkte M' ist, wie sich leicht einsehen lässt, ein mit $\mathfrak{K}$ concentrischer Kreis $\mathfrak{K}_1$. Letzterem entspricht aber im ersten Felde wegen der quadratischen Beziehung eine Curve vierter Ordnung, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte geht und die Punkte A, B, C zu Doppelpunkten hat. Also:

„Die Mittelpunkte eines Systems unter einander ähnlicher Kegelschnitte unseres Netzes liegen auf einer Curve vierter Ordnung K^4, welche die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks zu Doppelpunkten hat und durch die unendlich fernen Kreispunkte geht.“ Die Doppelpunkte sind die Mittelpunkte der sechs Geradenpaare des Systems. (Vergl. § 8 Nr. 6.)

2. Eine wichtige Eigenschaft dieser Curve ergiebt sich aus folgender Ueberlegung. Durch die drei Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gehen vier Kegelschnitte, welche den Kreis $\mathfrak{K}_1$ doppelt berühren und welche sämmtlich reell sind, weil die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ entweder innerhalb oder ausserhalb $\mathfrak{K}_1$ liegen (Schröter, Kegelschnitte, S. 345). Einer von diesen ist der Kreis $\mathfrak{K}$, welcher, da er mit $\mathfrak{K}_1$ concentrisch ist, denselben in den unendlich fernen Kreispunkten berührt. Den vier Kegelschnitten aber entsprechen vier Geraden, welche die Curve K^4 doppelt berühren; darunter befindet sich die unendlich ferne Gerade, die dem Kreise $\mathfrak{K}$ entspricht und deren Berührungspunkte mit K^4 die unendlich fernen Kreispunkte sind. Die Curve K^4 hat demnach vier reelle Doppeltangenten, von denen eine die unendlich ferne Gerade ist, welche K^4 in den unendlich fernen Kreispunkten berührt.

3. Einer Linie durch eine der Ecken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ entspricht eine Linie durch einen der Punkte A, B, C (Reye, Geom., II. Abth. S. 124.) Insbesondere entsprechen denjenigen Linien, welche durch die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nach den Schnittpunkten der Gegenseiten mit dem Kreise $\mathfrak{K}_1$ gehen, die Doppelpunktstangenten von K^4 in ihren Doppelpunkten A, B, C. Je nachdem also $\mathfrak{K}_1$ eine Seite des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ reell oder imaginär schneidet oder berührt, besitzt die Curve K^4 einen eigentlichen oder isolirten Doppel-

punkt oder einen Rückkehrpunkt. Wir wollen nun das System der mit $\mathfrak{K}$ concentrischen Kreise $\mathfrak{K}_1$ betrachten, sowie die denselben entsprechenden Curven K^4. Allen Kreisen, deren Radien kleiner sind als der von $\mathfrak{K}$, entsprechen Mittelpunktscurven ähnlicher Ellipsen, allen denjenigen Kreisen aber, die grösser sind als $\mathfrak{K}$, die Mittelpunktscurven ähnlicher Hyperbeln (§ 5 Nr. 3). Je nachdem das Dreieck ABC und also auch $\mathfrak{ABC}$ (vergl. § 5 Nr. 2) spitz- oder stumpfwinklig ist, wird der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ innerhalb oder ausserhalb $\mathfrak{ABC}$ liegen, der entsprechende Punkt Q, der Höhenpunkt des Dreiecks ABC, also im Raume (e_1) oder in einem der Räume (e_2), (e_3), (e_4) sich befinden (Fig. 6). Dem Mittelpunkte von $\mathfrak{K}$ als Nullkreis entspricht daher auch eine Curve K^4, die, soweit sie reell ist, in den Punkt Q zusammengeschrumpft ist. Wächst der Kreis $\mathfrak{K}_1$, so wächst auch die entsprechende Curve K^4. Zuerst wird der Kreis $\mathfrak{K}_1$ die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ nicht schneiden, dann wird er eine Seite berühren, darauf dieselbe schneiden, eine zweite berühren, auch diese schneiden, dann die dritte berühren und endlich alle drei Seiten schneiden. Dementsprechend hat die betreffende Mittelpunktscurve zunächst drei isolirte Doppelpunkte, welche nach einander in Rückkehrpunkte und dann in eigentliche Doppelpunkte übergehen. Eine Curve mit drei Rückkehrpunkten würde dann entstehen, wenn die Dreiecke ABC und $\mathfrak{ABC}$ gleichseitig wären, da es nur in diesem Falle einen mit $\mathfrak{K}$ concentrischen Kreis giebt, der alle drei Seiten des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ berührt. Berührt der Kreis $\mathfrak{K}_1$ eine Seite des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$, etwa $\mathfrak{AC}$, so degeneriren zwei von den vier Kegelschnitten, welche durch $\mathfrak{ABC}$ gehen und $\mathfrak{K}_1$ doppelt berühren, in Geradenpaare. Die Curve K^4 hat in diesem Falle einen Rückkehrpunkt in B und nur noch eine eigentliche endliche Doppeltangente; die beiden anderen endlichen Doppeltangenten sind Tangenten aus dem Rückkehrpunkte an die Curve geworden und sie entsprechen den obigen Geradenpaaren. — Alle Kreise, die grösser sind als $\mathfrak{K}$, schneiden die Seiten $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{CA}$ stets reell, also haben die Mittelpunktscurven ähnlicher Hyperbeln stets drei eigentliche Doppelpunkte.

4. Die Mittelpunktscurve ähnlicher Ellipsen wird sich nach dem Vorhergehenden anfänglich ganz in einem der vier Räume (e_1), (e_2), (e_3), (e_4) befinden und nach und nach in die drei anderen eintreten. Nehmen wir an, das Dreieck $\mathfrak{ABC}$ sei spitzwinklig und der Kreis $\mathfrak{K}_1$ schneide die Seiten desselben reell, so wird er der Reihe nach die Räume (e'_4), $(e'_1)(e'_2)$, $(e'_1)(e'_3)$, (e'_1) durchlaufen (Fig. 7), folglich wird die entsprechende Mittelpunktscurve ähnlicher Ellipsen aus (e_4) in (e_1), aus diesem in (e_2), wieder in (e_1), dann in (e_3), (e_1) und schliesslich wieder in (e_4) hineintreten. Die Gestalt der Curve zeigt Fig. 8. Ist der Kreis $\mathfrak{K}_1$ grösser als $\mathfrak{K}$, entspricht ihm also eine Mittelpunktscurve ähnlicher Hyperbeln, so durchläuft er die Räume (h'_1), (h'_2), (h'_3), (h'_4), (h'_5), (h'_6), die entsprechende Curve wird mithin nach der Reihe in die Räume (h_1), (h_2), (h_3), (h_4), (h_5), (h_6) eintreten (Fig. 8).

5. Wird $\mathfrak{K}_1$ immer grösser, so nähert er sich immer mehr der unendlich fernen Geraden; die entsprechende Curve K^4 wird sich daher immer mehr dem Kreise um ABC anschmiegen, und wie die Theile des Kreises $\mathfrak{K}_1$, welche in (h'_1) und (h'_4), oder in (h'_2) und (h'_5), oder in (h'_3) und (h'_6) liegen, einander und der unendlich fernen Geraden sich immer mehr nähern, so nähern sich auch je zwei Theile der Curve K^4 in (h_1) und (h_4), oder in (h_2) und (h_5), oder in (h_3) und (h_6) einander und dem Kreise um ABC immer mehr und fallen schliesslich mit letzterem zusammen. Der Kreis K als Mittelpunktscurve des Systems gleichseitiger — also ähnlicher — Hyperbeln (§ 4 Nr. 2) ist demnach als Curve K^4 doppelt zu denken.

6. Dem Kreise $\mathfrak{K}$ im zweiten Felde entspricht (§ 5 Nr. 2) die unendlich ferne Gerade im ersten Felde, welche der Ort der Mittelpunkte aller Parabeln unseres Netzes ist. Da $\mathfrak{K}$ aber durch die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ geht, welchen die Seiten BC, CA, AB entsprechen, so müssen diese drei Seiten zur unendlich fernen Geraden hinzugenommen werden, um sie zu einer Curve vierter Ordnung zu ergänzen. Auf ihnen liegen die Mittelpunkte der drei doppelten Geraden des Systems, nämlich der drei Seiten selbst.

7. Sämmtliche Curven K^4 bilden einen Büschel von Curven vierter Ordnung; denn sie haben in den drei gemeinsamen Doppelpunkten $3.4 = 12$ und in den unendlich fernen Kreispunkten, in welchen sie einander berühren, $2.2 = 4$ Punkte, im Ganzen also 16 Punkte gemein. Dasselbe können wir schliessen aus der Anzahl der Bedingungen, welchen diese Curven unterworfen sind.

Die Bedingung, einen gegebenen Punkt zum Doppelpunkt zu haben, ist nämlich eine dreifache lineare; eine Gerade in einem gegebenen Punkte zu berühren, eine doppelte lineare Bedingung für jede Curve. Die Forderung, drei gegebene Punkte als Doppelpunkte zu enthalten, sowie die unendlich ferne Gerade in zwei Punkten zu berühren, involvirt also für unsere Curven 13 lineare Bedingungen. Da aber 14 lineare Bedingungen eine Curve vierter Ordnung eindeutig bestimmen, so ist durch 13 lineare Bedingungen ein Büschel von Curven vierter Ordnung festgelegt.

8. Den Tangenten aus einem beliebigen Punkte P an die Curve K^4 entsprechen diejenigen Kegelschnitte durch den entsprechenden Punkt P' und durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, welche den der Curve K^4 entsprechenden Kreis $\mathfrak{K}_2$ berühren. Nach Steiner (Crelle's Journal, Bd. 37 S. 189) und Schröter (Crelle's Journal, Bd. 54 S. 37) giebt es sechs Kegelschnitte in einem Büschel, welche einen gegebenen Kegelschnitt berühren. Hieraus folgt:

„Die Mittelpunktscurve K^4 ist eine Curve sechster Classe."

§ 7.

1. Einer Tangente an den mit $\mathfrak{K}$ concentrischen Kreis $\mathfrak{K}_1$ wird ein Kegelschnitt durch A, B, C entsprechen, welcher die Curve K^4 berührt. Der Gesammtheit aller Tangenten von $\mathfrak{K}_1$ entspricht aber ein System ähnlicher

Kegelschnitte durch A, B und C. Denn da diese Tangenten vom Mittelpunkte des Kreises gleichen Abstand haben, so werden ihre Schnittpunktepaare mit $\mathfrak{K}$, welchen die unendlich fernen Punkte jener Kegelschnitte entsprechen, von O aus unter gleichen Winkeln gesehen (Fig. 5). Nun sind aber die Geraden, welche von einem der drei Punkte A, B, C nach einem unendlich fernen Punkte P_∞ gehen, parallel zu der Verbindungslinie von O mit dem entsprechenden Punkte P' auf $\mathfrak{K}$. Um nämlich den entsprechenden Punkt zu construiren, verbindet man P_∞ etwa mit A und zieht zu AP_∞ durch O die Parallele, welche $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{A}_1$ schneidet; der entsprechende Punkt liegt dann auf der Linie $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ (§ 5 Nr. 2); da er aber auch auf $\mathfrak{K}$ liegen muss, so ist er der Punkt $\mathfrak{A}_1$ selbst, $O\mathfrak{A}_1$ aber ist parallel zu AP_∞. Daraus folgt, dass die den Tangenten von $\mathfrak{K}_1$ entsprechenden Kegelschnitte durch A, B, C unter einander ähnlich sind, indem ihre unendlich fernen Punktepaare aus A unter gleichen Winkeln gesehen werden. Demnach erhalten wir den Satz:

„Die Mittelpunktscurve K^4 eines Systems ähnlicher Kegelschnitte unseres Netzes kann als die Enveloppe ähnlicher Kegelschnitte durch A, B, C, d. h. ähnlicher Mittelpunktskegelschnitte (§ 2 Nr. 1), betrachtet werden,* und zwar bestehen die letzteren, je nachdem das erste System von ähnlichen Hyperbeln oder Ellipsen gebildet wird, aus Ellipsen und Hyperbeln.“ Denn im ersten Falle sind die Schnittpunktepaare der Tangenten von $\mathfrak{K}_1$ mit $\mathfrak{K}$ imaginär, im zweiten reell (§ 6 Nr. 4).

2. Unter den ähnlichen Mittelpunktskegelschnitten, welche K^4 berühren, giebt es auch sechs Geradenpaare, jedes bestehend aus einer Seite des Polardreiecks und einer Geraden durch die gegenüberliegende Ecke, welche mit der ersteren den gemeinsamen Asymptotenwinkel bildet. Die zweite Gerade muss daher K^4 berühren.

„Also gehen aus jedem der drei Doppelpunkte von K^4 zwei Tangenten an dieselbe, welche mit der Verbindungslinie der beiden anderen Doppelpunkte gleiche Winkel bilden.“

Diese Tangenten sind reell bei den Mittelpunktscurven ähnlicher Ellipsen, imaginär bei denjenigen ähnlicher Hyperbeln, weil im ersten Falle die Winkel, welche sie mit der jedesmal gegenüberliegenden Seite des Polardreiecks bilden, reell, im zweiten imaginär sind.

3. Den vier Doppeltangenten einer Curve K^4 entsprechen, wie wir sahen, die vier Kegelschnitte durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, welche den entsprechenden Kreis $\mathfrak{K}_1$ doppelt berühren. Man erhält die Berührungspunkte der letzteren mit $\mathfrak{K}_1$ (vergl. Schröter, Kegelschnitte, S. 345), indem man je zwei der drei Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ verbindet und zu ihnen und den Schnittpunkten ihrer

---

* Ueber die allgemeinen Eigenschaften eines solchen Systems vergl. Kroes, Inaugural-Dissertation, § 7. Göttingen, 1881.

Verbindungslinie mit $\mathfrak{K}_1$ das gemeinschaftlich harmonisch trennende Paar aufsucht. Die so erhaltenen sechs Punkte liegen zu je dreien auf vier Geraden, welche man mit $\mathfrak{K}_1$ schneidet. Die Schnittpunktepaare sind dann die gesuchten Berührungspunkte. — Verbinden wir nun etwa $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ (Fig. 9) und sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ die Schnittpunkte der Verbindungslinie mit $\mathfrak{K}_1$, so ist leicht einzusehen, dass das gemeinschaftlich harmonisch trennende Paar aus der Mitte $\mathfrak{M}$ und dem unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ besteht. Dasselbe gilt bei $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$. Die vier Geraden, welche $\mathfrak{K}_1$ in den gesuchten Berührungspunkten schneiden, sind demnach die unendlich ferne Gerade und die Verbindungslinien der Mitten von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$. Die unendlich ferne Gerade schneidet $\mathfrak{K}_1$ in den unendlich fernen Kreispunkten, und in diesen wird auch $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{K}$ berührt. Den Schnittpunkten der drei übrigen Geraden mit $\mathfrak{K}_1$ entsprechen die Berührungspunkte der drei endlichen Doppeltangenten von K^4. Da die drei Geraden von $\mathfrak{K}_1$ nicht abhängig sind, so bewegen sich die Schnittpunkte immer auf diesen und bilden eine Involution, von welcher auch die Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}$ ein Paar sind. Den drei Geraden entsprechen aber drei Kegelschnitte, und zwar Hyperbeln, weil $\mathfrak{K}$ reell geschnitten wird. Den Geraden $\mathfrak{C}\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{M}''$ (Fig. 9) entsprechen die Tangenten der Hyperbeln in C, A, B. Je zwei von den drei Hyperbeln berühren sich also in einer Ecke des Dreiecks ABC, während die dritte in dieser Ecke den umgeschriebenen Kreis berührt. Letzteres ergiebt sich daraus, dass z. B. die Parallele durch $\mathfrak{C}$ zur Seite $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ diese in ihrem Schnittpunkte sowohl mit $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$, als auch mit der unendlich fernen Geraden schneidet, also übergehen muss in eine Gerade durch C, welche dort sowohl die der Linie $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ entsprechende Hyperbel, als auch den dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreis berührt. Also:

„Wenn wir die Curve K^4 den ganzen Büschel durchlaufen lassen, so bewegt sich jedes Paar von Berührungspunkten einer der drei endlichen Doppeltangenten auf je einer Hyperbel durch ABC und bildet auf derselben eine Punktinvolution, von welcher ihre beiden unendlich fernen Punkte ein Paar sind."

4. Ein Doppelpunkt der Involution ist der Eckpunkt, wo die Hyperbel den Kreis durch A, B, C berührt; dessen Tangente geht also durch das Involutionscentrum. Weil die Involution auch die unendlich fernen Punkte der Hyperbel zu einem Punktepaar hat, so ist das Involutionscentrum unendlich fern, demnach sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte unter einander und zur Tangente des Kreises K um ABC parallel. Wir gewinnen damit das Resultat:

„Die drei endlichen Doppeltangenten einer jeden Curve K^4 sind zu den Tangenten des Kreises K in A, B, C parallel." — Die drei letztgenannten Geraden sind die Doppeltangenten des doppelt gedachten Kreises K als Curve K^4. (Vergl. § 6 Nr. 5.)

5. Schneiden wir den Büschel der mit $\mathfrak{K}$ concentrischen Kreise mit einer beliebigen Geraden p, so erhalten wir auf dieser eine Punktinvolution, deren Doppelpunkte aus dem unendlich fernen Punkte von p und demjenigen Punkte bestehen, in welchem p von einem dieser Kreise berührt wird. Der Geraden p entspricht im ersten Felde ein Kegelschnitt K^2 durch A, B, C, d. h. der Mittelpunktskegelschnitt eines Büschels unseres Systems. K^2 wird also von dem Büschel der K^4 in einer Punktinvolution geschnitten, deren Doppelpunkte aus dem Schnittpunkte von K^2 mit dem Kreise K (ausser A, B, C) und demjenigen Punkte bestehen, in welchem K^2 von einer der K^4 berührt wird. Wir sehen hieraus, dass in einem Kegelschnittbüschel die Kegelschnitte paarweise ähnlich sind (Schröter, Kegelschnitte, S. 270) und dass ihre Mittelpunktepaare eine krumme Involution auf dem Mittelpunktskegelschnitte bilden.

Da jede Gerade im ersten Felde, welche wir als Mittelpunktsgerade einer Kegelschnittschaar auffassen können, jede K^4 in vier Punkten schneidet, so folgt, dass in jeder Kegelschnittschaar je vier Kegelschnitte einander ähnlich sind (Schröter, Kegelschnitte, S. 296).

§ 8.

1. Wir gehen jetzt zur Untersuchung der Enveloppe eines Systems ähnlicher Kegelschnitte über, dessen Mittelpunktscurve K^4 ist, und wollen zunächst deren Classe bestimmen.

Die Enveloppe eines Systems von Curven wird gewöhnlich definirt als der Ort der Schnittpunkte consecutiver eingehüllter Curven. Denken wir uns in irgend einem dieser Schnittpunkte die Tangente an die Enveloppe gezogen, so ist dieselbe auch gemeinsame Tangente an diejenigen beiden einander unendlich nahen Curven, welche sich in dem betrachteten Punkte schneiden. Wir können daher die Enveloppe auch auffassen als den Ort der gemeinsamen Tangenten consecutiver Curven.

Jede Gerade ist, wie wir wissen, Mittelpunktsgerade einer Schaar, und ihre vier Schnittpunkte mit K^4 sind die Mittelpunkte von vier ähnlichen Kegelschnitten der Schaar. Ist die Mittelpunktsgerade nun eine Tangente der K^4, so kommen zwei von den vier ähnlichen Kegelschnitten einander unendlich nahe, d. h. die Grundtangenten der Schaar sind also vier Tangenten der Enveloppe des Systems der ähnlichen Kegelschnitte. Jeder Tangente der Mittelpunktscurve K^4 entsprechen daher vier Tangenten der Enveloppe. Von einem Punkte P gehen nun an K^4 sechs Tangenten aus (§ 6 Nr. 8). Diese sind Mittelpunktslinien von sechs Schaaren, deren 24 Grundtangenten die Enveloppe und denjenigen Kegelschnitt K_2 unseres Netzes berühren, welcher P zum Mittelpunkt hat, da dieser zu allen sechs Schaaren gehört. Weitere Tangenten kann K_2 mit der Enveloppe nicht gemein haben; denn wäre das der Fall, so würde daraus umgekehrt folgen, dass auch von P aus noch wenigstens eine weitere Tangente an K^4 gezogen werden könnte.

„Demnach hat die Enveloppe mit K_2 und folglich mit jedem beliebigen Kegelschnitt des Systems 24 Tangenten gemein; sie ist also eine Curve zwölfter Classe.“

2. Wenn die Mittelpunktslinie einer Schaar durch eine Ecke des Polardreiecks geht, so besteht die Schaar aus sich doppelt berührenden Kegelschnitten, deren gemeinsame Tangenten durch dieselbe Ecke gehen, während die gemeinsamen Berührungspunkte auf der Gegenseite liegen und durch die darauf befindlichen Ecken harmonisch getrennt werden (§ 2 Nr. 2). Da man nun aus jeder Ecke des Polardreiecks an K^4 zwei Tangenten ziehen kann (§ 7 Nr. 2), so folgt, „dass aus jeder Ecke des Polardreiecks an die Enveloppe vier Tangenten gehen, deren Berührungspunkte auf der jedesmal gegenüberliegenden Dreiecksseite sich befinden und paarweise zu den darauf liegenden Ecken harmonisch sind“.

Bei der Enveloppe ähnlicher Hyperbeln sind diese Tangenten stets imaginär (§ 7 Nr. 2).

3. Fassen wir eine der Doppeltangenten von K^4 als Mittelpunktsgerade einer Schaar auf, so fallen je zwei von den vier ähnlichen Kegelschnitten dieser Schaar zusammen, also sind ihre vier Grundtangenten auch Doppeltangenten der Enveloppe. Jeder der vier Doppeltangenten von K^4 entsprechen hiernach vier Doppeltangenten der Enveloppe, welche eine Gruppe von associirten Geraden bilden. Da die unendlich ferne Gerade als Mittelpunktslinie der Parabelschaar letztere zugleich berührt, „so hat die Enveloppe des Systems ähnlicher Kegelschnitte die unendlich ferne Gerade und deren associirte Geraden (§ 1 Nr. 2) zu Doppeltangenten und ausserdem noch zwölf andere Doppeltangenten“.

4. Betrachten wir ferner eine Wendetangente von K^4 als Mittelpunktsgerade einer Schaar, so werden die Grundtangenten dieser Schaar auch Wendetangenten der Enveloppe sein; denn es fallen dann drei von den vier ähnlichen Kegelschnitten dieser Schaar zusammen. Den Wendepunkten von K^4 entspricht somit die vierfache Anzahl von Wendepunkten der Enveloppe. Nach den Plücker'schen Formeln hat erstere im allgemeinen Falle, wo sie den Doppelpunkt besitzt, sechs Wendepunkte; die Enveloppe besitzt also dann 24.

5. Zwei unendlich nahe ähnliche Kegelschnitte des Systems constituiren nicht allein eine Kegelschnittschaar, sondern auch einen Kegelschnittbüschel S, dessen Mittelpunktskegelschnitt die Curve K^4 berührt. Der Mittelpunktskegelschnitt gehört demnach zu dem System ähnlicher Kegelschnitte durch A, B, C, dessen Enveloppe K^4 ist (§ 7 Nr. 1). Die Grundpunkte des Büschels S sind die Schnittpunkte von zwei unendlich nahen ähnlichen Kegelschnitten, sie liegen also auf der Enveloppe. Es lässt sich zeigen, dass durch einen beliebigen Punkt P zwei Mittelpunktskegelschnitte gehen, welche K^4 berühren; denn durch P geht ein Büschel von Mittelpunktskegelschnitten, in

welchen alle Kegelschnitte paarweise ähnlich sind; es müssen sich darunter also zwei befinden, welche K^4 berühren (entsprechend den zwei Tangenten aus P' an $\mathfrak{K}_1$). Die Grundpunkte der beiden zugehörigen Büschel liegen sowohl auf der Enveloppe, als auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$, welcher P zum Mittelpunkt hat. Weitere Punkte hat $\mathfrak{K}^2$ mit der Enveloppe nicht gemein, da sonst mehr als zwei Mittelpunktskegelschnitte durch P gingen, welche K^4 berührten.

„Die Enveloppe hat demnach mit jedem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ unseres Netzes acht Punkte gemein, sie ist also eine Curve vierter Ordnung E^4, ihre Punkte und Tangenten bilden einfach-unendlich viele Quadrupel associirter Elemente."

6. Da die Classe der Enveloppe gleich 12 ist, so ist dieselbe eine allgemeine Curve vierter Ordnung ohne Doppel- und Rückkehrpunkte mit 24 Wende- und 28 Doppeltangenten.

Wir haben bisher erst 16 Doppeltangenten ermittelt, die übrigen zwölf sind also noch nachzuweisen. Jede Gerade durch eine Ecke des Polardreiecks ist Mittelpunktslinie einer Schaar sich doppelt berührender Kegelschnitte, welche paarweise ähnlich sind (die Curve K^4 wird nämlich von der Geraden noch in zwei Punkten ausser der Ecke geschnitten). Dreht die Gerade sich um die betreffende Ecke, bis sie eine Doppelpunktstangente von K^4 wird, so fällt einer von den zwei Schnittpunkten noch in die Ecke hinein, ist also Mittelpunkt eines Geradenpaares, welches die Enveloppe tangirt. Dieses Geradenpaar gehört aber zu einem Kegelschnittbüschel, dessen Mittelpunktskegelschnitt die K^4 in dem Doppelpunkte, welchen sie in jener Ecke hat, berührt. Die vier Grundpunkte dieses Büschels, von denen je zwei auf einer Geraden des Geradenpaares liegen, sind die Berührungspunkte des letzteren mit E^4. Das Geradenpaar besteht hiernach aus zwei Doppeltangenten der Enveloppe, und da jede Ecke des Polardreiecks zwei solche Geradenpaare liefert, so erhalten wir damit zwölf neue Doppeltangenten der Enveloppe E^4. Je vier derselben gehen durch eine Ecke des Polardreiecks und sind zu zweien harmonisch zu den durch dieselbe Ecke gehenden Dreiecksseiten. Alle sechs Paare schliessen ausserdem den gemeinsamen Asymptotenwinkel ein, da sie zu dem System ähnlicher Kegelschnitte gehören.

Diese zwölf Doppeltangenten sind hiernach reell bei der Enveloppe ähnlicher Hyperbeln, dagegen imaginär bei derjenigen ähnlicher Ellipsen.

Dagegen kann die Enveloppe ähnlicher Hyperbeln die Seiten des Polardreiecks niemals reell schneiden. Denn die von den Ecken des letzteren an die Curven gehenden Tangenten, welche dieselbe in ihren Schnittpunkten mit der jedesmaligen Gegenseite berühren, sind in diesem Falle imaginär (§ 8 Nr. 2).

7. „Die Enveloppen E^4 aller Systeme ähnlicher Kegelschnitte unseres Netzes bilden einen Curvenbüschel vierter Ordnung; denn sie haben die unendlich ferne Gerade nebst ihren drei

associirten Geraden zu Doppeltangenten (Nr. 3) und berühren dieselben, wie sich leicht zeigen lässt, in denselben acht Punkten. Da nämlich die unendlich ferne Gerade sämmtliche K^4 in den unendlich fernen Kreispunkten berührt, so muss sie auch sämmtliche E^4 dort berühren, weil jeder Kegelschnitt, welcher einen unendlich fernen Punkt zum Mittelpunkt hat, in diesem von der unendlich fernen Geraden berührt wird. Demnach werden die drei übrigen gemeinsamen Doppeltangenten aller E^4 in denjenigen Punkten berührt, die den unendlich fernen Kreispunkten associirt sind. Die acht gemeinsamen Berührungspunkte sind also sämmtlich imaginär, es sind die Schnittpunkte der gemeinsamen Doppeltangenten mit dem Kreise unseres Systems; denn dieser ist, doppelt genommen, als specielle Enveloppe, nämlich als diejenige der Kreise des Netzes anzusehen.

Wir fanden in § 7 Nr. 3, dass die drei endlichen Doppeltangenten aller K^4 durch dieselben drei unendlich fernen Punkte gehen. Jeder von diesen Doppeltangenten entsprechen vier Doppeltangenten einer E^4, welche denjenigen Kegelschnitt des Netzes berühren, welcher den unendlich fernen Punkt der ersteren zum Mittelpunkt hat. Hieraus folgt:

„Die zwölf veränderlichen Doppeltangenten einer jeden Enveloppe E^4, welche nicht durch die Ecken des Polardreiecks gehen, berühren zu je vieren drei zum Netz gehörige Parabeln.“

§ 9.

1. Sind a und b die Halbaxen eines Kegelschnittes, so nenne ich $ab\pi$ den Inhalt desselben. Das Product ab ist reell, wenn der Kegelschnitt eine Ellipse, imaginär, wenn derselbe eine Hyperbel ist, und zwar ist es im ersten Falle positiv, wenn die Ellipse reell, negativ, wenn sie imaginär ist. Das Product der Halbaxenquadrate ist daher für alle Ellipsen positiv, für alle Hyperbeln negativ.

Nun ist (vergl. Schröter, Kegelschnitte, S. 185):

$$a^2 b^2 = p_1 . p_2 . p_3 . r,$$

wo r den Radius des einem Polardreieck eines Kegelschnitts umgeschriebenen Kreises, p_1, p_2, p_3 aber die Lothe aus dem Mittelpunkte des Kegelschnitts auf die Seiten dieses Polardreiecks bedeuten.

Da alle Kegelschnitte unseres Netzes ein gemeinsames Polardreieck besitzen, so können wir dasselbe dazu benutzen, um den Inhalt eines beliebigen der in Rede stehenden Kegelschnitte auszudrücken. Es ist $J = \pi . \sqrt{p_1 p_2 p_3 . r}$. Da r constant ist, so gewinnen wir für alle Kegelschnitte unseres Netzes, welche gleichen Inhalt haben, $p_1 p_2 p_3 = c$, wo c positiv oder negativ sein muss, je nachdem die betreffenden Kegelschnitte Ellipsen oder Hyperbeln sind. Denken wir uns die Gleichungen der drei Seiten des Polardreiecks, bezogen auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt etwa im Innern des Polardreiecks liegt, in der Normalform geschrie-

ben, aber mit umgekehrten Vorzeichen als in der üblichen Weise (Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, 4. Aufl., S. 21), so dass das Substitutionsresultat der Coordinaten eines Punktes für einen Punkt auf der Seite der betreffenden Geraden, welcher auf der Seite des Coordinatenanfanges liegt, das Loth aus dem Punkte auf die Gerade mit positivem Vorzeichen giebt. Es ist leicht einzusehen, dass für die Mittelpunkte von reellen Ellipsen stets eine gerade Anzahl dieser Lothe, für die Mittelpunkte von Hyperbeln aber stets eine ungerade Anzahl derselben mit -1 multiplicirt ist (vergl. § 2), so dass das Product der linken Seiten im ersten Falle positiv, im zweiten negativ ist. Sind also $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ die Gleichungen der drei Seiten, so müssen die Coordinaten der Mittelpunkte aller Kegelschnitte gleichen Inhalts der Gleichung genügen

$$p_1 p_2 p_3 = c.$$

Wir sehen, dass diese Gleichung eine Curve dritter Ordnung darstellt, welche die Seiten des Polardreiecks zu Wendeasymptoten hat; denn denken wir uns die Gleichung homogen gemacht, so erhält c den Factor z^3; die Curve schneidet also jede der drei Geraden $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ dort, wo dieselben $z^3 = 0$ treffen.

„Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte in unserem Netze mit gleichem Inhalt liegen mithin auf einer Curve dritter Ordnung K^3, welche die drei Seiten des gemeinsamen Polardreiecks zu Wendeasymptoten hat."

Die Curve K^3 besitzt weder einen Doppel- noch einen Rückkehrpunkt; denn es könnte höchstens einer der drei Eckpunkte des Polardreiecks ein vielfacher Punkt sein, da nur diese Punkte Mittelpunkte von mehreren Kegelschnitten unseres linearen Systems sind; die Coordinaten der Eckpunkte des Dreiecks genügen aber nicht der Gleichung $p_1 . p_2 . p_3 = c$. Mithin ist die Curve K^3 eine allgemeine Curve dritter Ordnung, somit von der sechsten Classe.

2. Die Curve K^3 befindet sich innerhalb der Räume (h) oder (e) des Polardreiecks (Fig. 1), je nachdem das System aus inhaltsgleichen Ellipsen oder Hyperbeln besteht. Enthält im ersten Falle das System auch imaginäre Ellipsen, so besitzt die Curve innerhalb des Polardreiecks ein Oval; denn sie darf die Seiten des Dreiecks nicht überschreiten. Für innere Punkte erreicht das Product $p_1 . p_2 . p_3$ ein Maximum in $(\frac{2}{3}\Delta)^3 : s_1 s_2 s_3$ (für den Schwerpunkt), wo Δ den Inhalt des Dreiecks, s_1, s_2, s_3 die drei Seitenlängen bedeuten. Je nachdem c kleiner oder grösser als dieses Maximum ist, besitzt das System imaginäre Ellipsen oder nicht.

Da die Mittelpunktslinie einer Kegelschnittschaar unseres Systems die Curve K^3 in drei, und der Mittelpunktskegelschnitt eines Büschels dieselbe in sechs Punkten schneidet, so folgt: „In einer Kegelschnittschaar sind je drei, in einem Kegelschnittbüschel je sechs Kegelschnitte inhaltsgleich."

Die Curve K^3 wird von der Curve K^4 in zwölf Punkten geschnitten. Diese zwölf Punkte sind die Mittelpunkte von Kegelschnitten, welche unter einander sowohl ähnlich, als auch inhaltsgleich, d. h. congruent sind. „*In unserem Netze sind daher je zwölf Kegelschnitte einander congruent.*"

3. Es erübrigt noch die Untersuchung der Enveloppe des Systems inhaltsgleicher Kegelschnitte. Ziehen wir eine Tangente an die Mittelpunktscurve K^3, so ist dieselbe Mittelpunktslinie einer Schaar von Kegelschnitten, deren vier gemeinsame Tangenten die Enveloppe berühren (§ 8 Nr. 1). Dreht sich die Mittelpunktslinie um einen Punkt, so umhüllen die Tangenten der zugehörigen Schaaren denjenigen Kegelschnitt K_2, welcher den festen Punkt zum Mittelpunkt hat. Da die Mittelpunktscurve K^3 sechster Classe ist, so gehen durch jenen Punkt sechs Tangenten an dieselbe, also hat K_2 mit der Enveloppe $6.4 = 24$ Tangenten gemeinsam. „*Die Enveloppe inhaltsgleicher Kegelschnitte in unserem Netze ist daher eine Curve zwölfter Classe.*"

4. In einem Curvenbüschel m^{ter} Ordnung giebt es $n(n+2m-3)$ Curven, welche eine gegebene Curve n^{ter} Ordnung ohne Doppel- und Rückkehrpunkte berühren (*Cremona*, Einleitung in eine Theorie der ebenen Curven, übersetzt von *Curtze*, 1865, S. 122). Betrachten wir nun die Mittelpunktskegelschnitte unseres Netzes, welche durch einen Punkt P gehen, so bilden dieselben einen Büschel zweiter Ordnung. Unter ihnen giebt es folglich zwölf Kegelschnitte, welche K^3 berühren. Aber die drei Wendeasymptoten von K^3 gehören zu je einem der drei Geradenpaare des Büschels und sind als berührende Kegelschnitte von K^3 doppelt zu zählen. Es giebt mithin nur sechs eigentliche Mittelpunktskegelschnitte durch einen Punkt P, welche K^3 berühren. Aber die drei Wendeasymptoten von K^3 gehören zu je einem der drei Geradenpaare des Büschels und sind als berührende Kegelschnitte von K^3 doppelt zu zählen. Es giebt mithin nur sechs eigentliche Mittelpunktskegelschnitte durch einen Punkt P, welche K^3 berühren. Die Grundpunkte der zugehörigen Kegelschnittbüschel sind Punkte der Enveloppe und liegen auf demjenigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$, welcher P zum Mittelpunkt hat (§ 8 Nr. 5). „*Die Enveloppe hat daher mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ $6.4 = 24$ Punkte gemeinsam, ist also eine Curve zwölfter Ordnung E^{12}.*"

5. Da Classe und Ordnung von E^{12} übereinstimmen, so ist die Curve in sich dual. Wie bei der Curve E^4, sind auch bei E^{12} je vier Punkte associirte Punkte und die zugehörigen Tangenten associirte Geraden.

An K^3 lassen sich aus jeder Ecke des Polardreiecks noch zwei gewöhnliche Tangenten ziehen, da die beiden durch die Ecke gehenden Seiten Wendeasymptoten und als Tangenten daher doppelt zu zählen sind. Fassen wir die aus einer Ecke gezogenen beiden Tangenten als Mittelpunktslinien zweier Schaaren von (sich doppelt berührenden) Kegelschnitten auf, so

ergiebt sich, wie in § 8 Nr. 2, „dass aus jeder Ecke des Polardreiecks an E^{12} vier Tangenten gehen, deren Berührungspunkte auf der jedesmaligen Gegenseite liegen und paarweise harmonisch sind zu den auf derselben Seite liegenden Ecken."

§ 10.

1. Wir lassen einige Sätze folgen, welche verschiedene Steiner'sche Sätze (Crelle's Journal, Bd. 44 S. 275; Ges. Werke, Bd. 2 S. 427) als Specialfälle umfassen.

a) „Hat man drei einem Vierseit eingeschriebene Kegelschnitte, so liegen die Schnittpunkte von zweien derselben mit den vier Berührungspunkten des dritten auf einem Kegelschnitt, der mit den drei gegebenen dasselbe Polardreieck hat."

Denn gehört die durch das Vierseit bestimmte Kegelschnittschaar zu unserm System, so sind die vier Schnittpunkte der beiden ersten Kegelschnitte vier associirte Punkte, ebenso die vier Berührungspunkte des dritten (§ 1 Nr. 2). Zwei Gruppen associirter Punkte liegen aber auf einem Kegelschnitt des Systems.

[Degenerirt der dritte Kegelschnitt zu einem Punktepaar, so ergiebt sich der Satz:

„Die gegenseitigen vier Schnittpunkte je zweier demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte liegen mit jedem der drei Paar Gegenecken des Vierseits zusammen in einem Kegelschnitte." (Schröter, Kegelschnitte, S. 221.)]

b) „Umgekehrt: Legt man durch die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte einer Schaar einen dritten Kegelschnitt, so schneidet dieser die gemeinsamen Tangenten der Schaar in vier Punktepaaren, in welchen letztere von zwei Kegelschnitten der Schaar berührt werden."

Denn betrachten wir die Schaar als zu unserem System gehörig, so sind die vier gemeinsamen Tangenten vier associirte Geraden, schneiden also einen Kegelschnitt des Systems in zwei Gruppen associirter Punkte, welche zwei Kegelschnitte der Schaar zu Berührungspunkten haben.

Dualistisch:

c) „Gehen drei Kegelschnitte durch vier Punkte, so sind die gemeinsamen Tangenten von zweien derselben mit den in den vier Punkten gezogenen Tangenten des dritten Kegelschnittes acht Tangenten eines neuen Kegelschnittes, der mit den drei ersten ein gemeinsames Polardreieck hat."

[Artet der dritte Kegelschnitt in ein Geradenpaar aus, so folgt:

„Die vier gemeinsamen Tangenten von zwei einem Viereck umgeschriebenen Kegeschnitten umhüllen mit jedem der

drei Paare Gegenseiten des Vierecks einen neuen Kegelschnitt, der mit den beiden gegebenen dasselbe Polardreieck hat."]

d) „Umgekehrt: Construirt man einen Kegelschnitt, der die vier gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte eines Büschels berührt, so gehen an den letzteren von den vier Grundpunkten des Büschels vier Tangentenpaare aus, welche zwei Kegelschnitte des Büschels in den Grundpunkten berühren."

e) „Die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte einer Schaar liegen mit den vier Schnittpunkten zweier anderer Kegelschnitte der Schaar auf einem neuen Kegelschnitt, der mit den Kegelschnitten der Schaar dasselbe Polardreieck hat."

Nehmen wir nämlich an, die Schaar gehöre zu unserm System, so sind die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte derselben vier associirte Punkte. Zwei Gruppen derselben liegen aber auf einem Kegelschnitt des Systems.

[Lassen wir das eine Paar von Kegelschnitten sich vereinigen, so erhalten wir den Satz a), und lassen wir auch das andere Paar zusammenfallen, so erhalten wir:

„Werden einem vollständigen Vierseit zwei Kegelschnitte eingeschrieben, so liegen die acht Punkte, in welchen sie die Seiten berühren, allemal in irgend einem dritten Kegelschnitt."]

Dualistisch:

„Die vier gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte eines Büschels umhüllen mit den vier gemeinsamen Tangenten zweier anderer Kegelschnitte des Büschels einen neuen Kegelschnitt, der mit den Kegelschnitten des Büschels dasselbe Polardreieck hat."

[Vereinigt sich das eine Paar Kegelschnitte, so erhalten wir den Satz c); vereinigt sich auch das andere Paar, so folgt:

„Die acht Tangenten in den vier Schnittpunkten zweier Kegelschnitte umhüllen einen Kegelschnitt, welcher mit den beiden ersten dasselbe Polardreick hat."]

2. Wir theilen noch einige Sätze über ein allgemeines Kegelschnittnetz mit.

„In jedem Kegelschnittnetz giebt es drei Büschel concentrischer Kegelschnitte."

„Die drei Centra A, B, C dieser drei Büschel liegen auf allen Mittelpunktskegelschnitten des Netzes."

„Das Dreieck ACB ist ein Tripeldreieck der Hesse'schen Curve des Kegelschnittnetzes und zwar dasjenige, das die unendlich fernen Punkte derselben zu conjugirten hat."

„Der Höhenpunkt des Dreiecks *ABC* ist der Mittelpunkt des im Netze befindlichen Kreises.“

„In jedem Netz giebt es drei Büschel von Kegelschnitten, welche je eine Höhe des Dreiecks *ABC* zur gemeinsamen Axe haben.“

„Die Mittelpunkte des Büschels gleichseitiger Hyperbeln des Netzes liegen auf dem um das Dreieck *ABC* beschriebenen Kreise.“

„Die Mittelpunkte eines Systems ähnlicher Kegelschnitte des Netzes liegen auf einer Curve vierter Ordnung und sechster Classe mit drei Doppelpunkten in den Ecken des Dreiecks *ABC* und vier reellen Doppeltangenten; zu letzteren gehört die unendlich ferne Gerade, welche von der Curve in den unendlich fernen Kreispunkten berührt wird.“

„Die Enveloppe des genannten Systems ist vierter Ordnung.“

„Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte des Netzes mit gleichem Inhalt liegen auf einer Curve zwölfter Ordnung, welche die Punkte *A*, *B*, *C* zu sechsfachen Punkten hat.“

„In einem Kegelschnittnetz sind je zwölf Kegelschnitte einander congruent.“

XVIII.

Ueber Körperketten.

Von

Prof. F. August.

Hierzu Taf. V Fig. 1–4D.

Bei der Betrachtung der Ketten- und Seilpolygone pflegt man sich auf den Fall zu beschränken, dass ein System gegebener Kräfte das Seil in einzelnen Punkten angreift, welche im Grenzfall unendlich nahe aneinander rücken, während die Kräfte unendlich klein werden. Es wird auch der Fall betrachtet, dass eine Anzahl von Stangen so verbunden sind, dass das eine Ende einer jeden um das eine Ende der vorhergehenden drehbar ist.

Dagegen ist mir nicht bekannt, dass man allgemein eine Kette betrachtet hätte, welche aus einer beliebigen Anzahl schwerer starrer Körper besteht, von denen jeder folgende um einen Punkt des vorhergehenden drehbar ist. Da nun diese Verallgemeinerung zu ganz interessanten Resultaten führt, so habe ich dieselbe zum Gegenstande der folgenden Besprechung gemacht.

I.

Ein Körper (Fig. 1), dessen Schwerpunkt S_1 ist, sei in den Punkten A_1 und B_1 an gewichtlosen Fäden B_0A_1 und B_1A_2 aufgehängt. Es sollen die Bedingungen des Gleichgewichts untersucht werden.

Wir fällen von S_1 die Senkrechte S_1C_1 auf die Gerade A_1B_1 und setzen $A_1B_1 = l_1$, $A_1C_1 = a_1$, $C_1S_1 = c_1$. Fällt der Punkt C_1 in die Verlängerung von B_1A_1 über A_1 hinaus, so ist a_1 negativ. Das Gewicht des Körpers sei P_1, die Spannungen in den Fäden B_0A_1 und B_1A_2 seien T_0 und T_1. Diese zählen wir positiv, wenn die Fäden auf Zug angespannt sind. Ein negativer Werth von T würde bedeuten, dass der Faden durch eine Strebe ersetzt wäre, welche auf Druck angespannt ist. Damit Gleichgewicht vorhanden sei, müssen die beiden Angriffslinien der Spannungen, welche durch die Fäden und deren Verlängerungen dargestellt sind, und die durch den Schwerpunkt S_1 gelegte Verticale sich in einem Punkte D_1 schneiden, und es muss die Resultante aus der auf den Körper ausgeübten Zugkraft T_0 und

dem Gewicht P_1 entgegengesetzt sein der auf den Körper ausgeübten Zugkraft T_1, mithin nach Grösse und Richtung gleich der Zugkraft T_1, mit welcher der zweite Faden auf den äusseren Punkt A_2 wirkt. Soll das Gleichgewicht stabil sein, so muss ausserdem der Schwerpunkt S_1 unter $A_1 B_1$ liegen. Dies findet bei der Anordnung der Zeichnung statt, wenn c_1 positiv ist. Wird aber der Körper um eine zur Ebene der Zeichnung lothrechte Axe so gedreht, dass die Horizontalprojection von $A_1 B_1$ die entgegengesetzte Richtung erhält, so liegt gerade bei positivem c_1 der Schwerpunkt über $A_1 B_1$.

Die Lage des ersten Fadens $B_0 A_1$ sei gegeben, ebenso seine Spannung T_0, ihre Verticalcomponente sei V_0, die Horizontalcomponente H_0. Alsdann fällt die im Körper feste Ebene $A_1 B_1 S_1$ und der Faden $B_1 A_2$ in die Verticalebene durch $B_0 A_1$. Diese ist im Allgemeinen bestimmt. Nur wenn $B_0 A_1$ selbst vertical, also $H_0 = 0$ ist, sind alle durch $B_0 A_1$ gelegten Ebenen vertical, und in jede derselben kann die Ebene $A_1 B_1 S_1$ und der Faden $B_1 A_2$ fallen. Bezeichnet man die Horizontal- und die Verticalcomponente der Spannung T_1 durch H_1 und V_1 und die Winkel, welche die Fäden $B_0 A_1$ und $B_1 A_2$ mit der zur x-Axe gewählten Horizontalen bilden, mit α_0 und α_1, während τ_1 der Winkel ist, welchen die Strecke $A_1 B_1$ mit der Horizontalen bildet, dann ergeben sich aus den oben besprochenen Gleichgewichtsbedingungen die Gleichungen:

1) $$T_1 \cos\alpha_1 = T_0 \cos\alpha_0 \quad \text{oder} \quad H_1 = H_0 = H,$$

2) $$T_1 \sin\alpha_1 = T_0 \sin\alpha_0 + P_1 \quad \text{oder} \quad V_1 = V_0 + P_1,$$

also auch

3) $$tg\,\alpha_1 = tg\,\alpha_0 + \frac{P_1}{H}.$$

Es ist also die Horizontalcomponente beider Spannungen gleich, während die Verticalcomponenten sich um das Gewicht P_1 unterscheiden. Nennt man noch Z_1 das Stück $S_1 D_1$, so ergeben sich weiter die Gleichungen:

$$H[a_1 \sin\tau_1 - c_1 \cos\tau_1 + Z_1] = V_0[a_1 \cos\tau_1 + c_1 \sin\tau_1],$$
$$H[(l_1 - a_1)\sin\tau_1 + c_1 \cos\tau_1 - Z_1] = V_1[(l_1 - a_1)\cos\tau_1 - c_1 \sin\tau_1],$$

woraus nach Elimination von Z_1 folgt:

4) $$tg\,\tau_1 = \frac{l_1 V_1 - a_1 P_1}{l_1 H + c_1 P_1} = \frac{V_1 - \frac{a_1}{l_1} P_1}{H + \frac{c_1}{l_1} P_1}.$$

Wir setzen noch zur Vereinfachung

5) $$\frac{a_1}{l_1} P_1 = a'_1, \quad \frac{c_1}{l_1} P_1 = c'_1, \quad a'_1 - P_1 = a'_0$$

und erhalten

6) $$tg\,\tau_1 = \frac{V_1 - a'_1}{H + c'_1},$$

7) $$V_1 = (H + c'_1)\,tg\,\tau_1 + a'_1, \quad V_0 = (H + c'_1)\,tg\,\tau_1 + a'_0.$$

Ist $H=0$, also die Richtung beider Fäden vertical, so werden ihre Spannungen, die wir R_0 und R_1 nennen, folgendermassen bestimmt:

8) $$R_0 = c'_1\, tg\, \tau_1 + a'_1, \quad R_1 = c'_1\, tg\, \tau_1 + a'_0.$$

Führt man diese Werthe in die Gleichungen 7) ein, so wird

9) $$V_0 = R_0 + H\, tg\, \tau_1, \quad V_1 = R_1 + H\, tg\, \tau_1.$$

Das Problem des (stabilen) Gleichgewichts ist für einen gegebenen Körper mit gegebenen Aufhängepunkten, abgesehen von der absoluten Lage, welche nebensächlich ist, bestimmt, wenn zwei Grössen gegeben sind, z. B. V_0 und H, oder τ_1 und H, oder α_1 und α_2.

Ist $l_1=0$, fallen also die beiden Aufhängepunkte in einen zusammen, so ist $tg\,\tau_1 = -\frac{a_1}{c_1}$, also fällt der Schwerpunkt unter den Aufhängepunkt.

Lässt man l_1 sich allmählich der Null nähern, während T_0 endlich bleibt, so findet dasselbe statt. Wird aber gleichzeitig T_0 unendlich gross, so kann τ_1 jeden beliebigen Werth annehmen. Dies Letztere ist natürlich als Grenzfall physikalisch nur annäherungsweise realisirbar.

Anmerkung. In den hier aufgestellten Formeln kommt nach Elimination von Z_1 der Winkel τ_1 immer nur unter dem Zeichen $tg\,\tau_1$ vor, und da $tg\,\tau_1$ die Periode $\pi = 180^0$ hat, so kann man aus der in Fig. 1 dargestellten Gleichgewichtslage eine zweite ableiten, indem man das im Körper feste Dreieck $A_1 B_1 S_1$ in der Ebene der Zeichnung um 180^0 dreht, wodurch der Körper selbst eine halbe Umdrehung macht, dann aber in A_1 und B_1 nach Grösse und Richtung absolut (nicht relativ zum Körper) dieselben Spannungen anbringt, wie vorher. Während aber die ursprüngliche Gleichgewichtslage bei der in der Zeichnung gewählten Anordnung stabil ist, ist die zweite labil, und auch wenn man die freie Beweglichkeit beschränkt und nur gegenseitige Drehungen um horizontale Axen in A_1 und in B_1 zulässt, ist die zweite Lage nicht unbedingt stabil, sondern nur, wenn die Fäden oder Bänder $B_0 A_1$ und $B_1 A_2$ aussen um Axen in B_0 und A_1 drehbar sind, die in hinreichender Nähe des Körpers liegen.

Es würde die folgende Untersuchung ausserordentlich schwerfällig machen, wollten wir diese beiden Fälle für jeden einzelnen in Betracht gezogenen Körper berücksichtigen. Wir wollen deshalb auch im Folgenden vorzugsweise den Fall des unbedingt stabilen Gleichgewichts in Betracht ziehen.

II.

Es hat nun keine Schwierigkeit, das Gleichgewicht eines Systems von schweren starren Körpern mit den Gewichten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ zu untersuchen, welche dadurch zusammenhängen, dass von einem Punkte B_k des k^{ten} Körpers nach einem Punkte A_{k+1} des $(k+1)^{ten}$ Körpers ein gewichtloser Faden führt. Auf die Länge dieser Fäden kommt es nicht an, wie bereits oben

bemerkt; sie können also auch Null sein, d. h. es kann auch der Körper P_{k+1} im Punkte A_{k+1} um den Punkt B_k des vorhergehenden Körpers frei drehbar sein. Der erste Körper sei in A_1 an einem von aussen kommenden Faden $B_0 A_1$, der letzte im Punkte B_n an einem nach aussen führenden Faden $B_n A_{n+1}$ aufgehängt. Die gebrochene Linie $B_0 A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots A_n B_n A_{n+1}$ wollen wir das zum System gehörige Kettenpolygon nennen. Wir bezeichnen die Punkte und die auf die einzelnen Körper bezüglichen Grössen durch dieselben Buchstaben wie oben, und unterscheiden sie durch Indices. Die Strecken $A_k B_k = l_k$ nennen wir die Längen der festen Kettenglieder. Wir bezeichnen endlich das Gesammtgewicht der k ersten Körper durch Q_k, so dass $Q_k = \sum_1^k P_k$, und $P_k = Q_k - Q_{k-1}$ ist. Eine einfache Wiederholung der Betrachtung in I ergiebt dann folgende Resultate.

Wenn H nicht Null ist, so liegt das ganze Polygon und die Schwerpunkte sämmtlicher Kettenglieder in derselben Verticalebene. Ist dagegen $H = 0$, so sind alle Fäden vertical, aber die Verticalebenen, in denen die einzelnen festen Polygonseiten und die zugehörigen Schwerpunkte liegen, sind ganz beliebig. Man kann auch in diesem Falle zunächst annehmen, dass das ganze Polygon in dieselbe Verticalebene falle. Um daraus eine beliebige Gleichgewichtslage zu erhalten, braucht man nur die einzelnen Glieder ohne Aenderung der Winkel τ_k um die vertical gerichteten Fäden als Axen zu drehen. Uebrigens fällt jede Singularität fort, ohne dass die sonstigen Betrachtungen sich wesentlich ändern, wenn man voraussetzt, dass die Glieder nicht frei gegen einander drehbar sind, sondern um horizontale Axen.

Jedenfalls ergeben sich die Gleichungen:

$$10)\quad \left\{\begin{aligned} & T_k \cos\alpha_k = H, \\ & T_k \sin\alpha_k = T_0 \sin\alpha_0 + Q_k, \quad \text{d. h.} \quad V_k = V_0 + Q_k, \\ & \quad tg\,\alpha_k = \frac{V_k}{H}, \\ & \quad tg\,\tau_k = \frac{l_k V_k - a_k P_k}{l_k H + c_k P_k} = \frac{V_k - \frac{a_k}{l_k} P_k}{H + \frac{c_k}{l_k} P_k}. \end{aligned}\right.$$

Wählt man den Punkt B_0 zum Anfangspunkt, und sind a, b die Coordinaten des Endpunktes A_{n+1}, so ist die Abscisse des Schwerpunktes der ganzen Kette:

$$\xi = \frac{a(V_0 + Q_n) - bH}{Q_n}.$$

Diese Formel bleibt auch für den Fall bestehen, dass der Endpunkt frei ist. Dann ist $a = 0$ und $H = 0$, und hieraus folgt $\xi = 0$. Der Schwerpunkt liegt in diesem Falle unter dem Aufhängepunkte.

Auch das hier betrachtete Polygon ist, abgesehen von der schon besprochenen Unbestimmtheit, welche eintreten kann, wenn $H = 0$ ist, voll-

ständig bestimmt, wenn zwei Constante gegeben sind, am einfachsten, wenn man H und V_0 als gegeben ansieht.

Ist für ein Kettenglied c_k gleich Null, so ist bei freier Drehbarkeit der Glieder gegen einander die Lage dieses Gliedes nicht vollständig bestimmt. Dasselbe kann vielmehr ohne Störung des Gleichgewichts um $A_k B_k$ als Axe beliebig gedreht werden. Sind sämmtliche $c=0$, wie z. B. bei einem aus Stangen gebildeten Polygon, und ist $H=0$, so reducirt sich das Polygon auf eine Verticale.

III.

Wir wollen nun specieller eine **Körperkette** betrachten, welche aus n im mechanischen Sinne congruenten Gliedern besteht. Unter Congruenz im mechanischen Sinne ist hier verstanden Gleichheit der Massen und gleiche relative Lage des Schwerpunktes und der Aufhängepunkte zu einander. Die Länge der Fäden sei gleich Null, mit Ausnahme des ersten und letzten, durch welche die Kette gehalten wird. Jedes Kettenglied ist also um das vorhergehende frei drehbar. Bezeichnet man dann mit Q das Gewicht, mit L die Länge der ganzen Kette, so hat man

$$11)\qquad P_k=\frac{Q}{n},\quad l_k=\frac{L}{n};\quad a_k=a,\quad c_k=c,$$

und die Gleichungen 10) werden

$$12)\qquad \left\{\begin{aligned} &T_k\cos\alpha_k=H,\\ &T_k\sin\alpha_k=T_0\sin\alpha_0+\frac{k}{n}Q,\ \text{d. h.}\ V_k=V_0+\frac{k}{n}Q,\\ &tg\,\alpha_k=\frac{V_k}{H},\\ &tg\,\tau_k=\frac{V_k-\frac{aQ}{L}}{H+\frac{c}{L}Q}=\frac{V_0-\frac{a}{L}Q+\frac{k}{n}Q}{H+\frac{c}{L}Q}\end{aligned}\right.$$

oder, wenn man setzt

$$13)\qquad H+\frac{c}{L}Q=H_1,\quad \frac{V_0-\frac{a}{L}Q}{H_1}=tg\,\tau_0,$$

$$14)\qquad tg\,\tau_k=tg\,\tau_0+\frac{k}{n}\,\frac{Q}{H_1}.$$

Diese Gleichung 14) ist genau von derselben Form, wie die entsprechende für ein gewöhnliches Kettenpolygon, d. h. für ein System von n gleichen Gewichten $\frac{Q}{n}$, welche an einem Seil in gleichen Abständen $\frac{L}{n}$ angreifen, wenn die Horizontalspannung $H_1=H+\frac{c}{L}Q$, und der Neigungswinkel des ersten (äusseren) Fadens τ_0 ist. Dieser einfachere Fall ist selbstverständlich als specieller Fall in unserem allgemeineren enthalten. Wir setzen noch

15) $$Q = L\mu, \quad H = h\mu, \quad H_1 = h_1\mu, \quad V_k = v_k\mu,$$

d. h. wir setzen das Gewicht der Kette gleich dem einer homogenen Linie von der Länge L, so dass μ das Gewicht der Längeneinheit ist, und drücken die Gewichte H, H_1 und V_k ebenfalls durch die Gewichte von Theilen derselben homogenen Linie aus, deren Längen h, h_1 und v_k sind. Dann ist

16) $$\left\{\begin{aligned} & v_k = v_0 + \frac{k}{n} L, \quad tg\,\alpha_k = \frac{v_k}{h}, \\ & h_1 = h + c, \qquad tg\,\tau_0 = \frac{v_0 - a}{h + c}, \\ & \qquad tg\,\tau_k = tg\,\tau_0 + \frac{k}{n}\,\frac{L}{h_1} \end{aligned}\right.$$

oder, wenn man $\frac{k}{n} L = s_k$ setzt, so dass s_k die Länge der k ersten Glieder bedeutet, so ist

17) $$tg\,\tau_k = tg\,\tau_0 + \frac{s_k}{h_1}.$$

Wird nun n unendlich gross, während L, a und c endlich bleiben, so werden die Längen und die Gewichte der einzelnen Glieder unendlich klein und das Polygon geht in eine Curve über. Um zu einem beliebigen Punkte dieser Curve zu gelangen, setzen wir k ebenfalls unendlich gross, so dass $\lim \frac{k}{n} L = \lim s_k = s$ einen endlichen Grenzwerth zwischen Null und L bedeutet. Wählt man nun eine beliebige nach oben gerichtete Verticale zur positiven Y-Axe, so wird im Grenzfall

$$tg\,\tau_k = tg\,\tau = \frac{dy}{dx},$$

und es ist

18) $$\frac{dy}{dx} = tg\,\tau_0 + \frac{s}{h_1}, \quad \text{also} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h_1}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Dies ist die bekannte Differentialgleichung der gewöhnlichen Kettenlinie. Bei passender Wahl des Anfangspunktes findet man durch Integration hieraus für diese die bekannte Gleichung

19) $$y = \frac{h_1}{2}\left(e^{\frac{x}{h_1}} + e^{-\frac{x}{h_1}}\right).$$

Die Constante $h_1 = h + c$ ist die sogenannte Höhe der Kettenlinie.

Der hier besprochene Fall lässt sich mit derselben Annäherung realisiren, wie der einer gewöhnlichen Kette, und zwar u. A. in folgender Weise mit sehr einfachen Hilfsmitteln.*

Eine homogene ebene Scheibe von beliebiger Dicke, etwa aus starkem Papier, Pappe oder Cigarrenkistenholz, habe im Grundriss die Gestalt eines Parallelogramms (Fig. 4a) mit der Seite $A_1 A_{n+1} = L$, der zugehörigen

---

* Der Mechaniker Herr Ferdinand Ernecke in Berlin fertigt Modelle der hier betrachteten Körperketten an.

Höhe $2c$ und einem Winkel γ. Die Basis werde durch die Punkte $A_2 A_3 \dots A_n$ in n gleiche Theile und dieser Theilung entsprechend die Scheibe in n congruente Scheiben getheilt, deren jede die Gestalt eines Parallelogramms mit der Basis $\frac{1}{n} L$ und der Höhe $2c$ hat. Klebt man nun die sämmtlichen Körper in der ursprünglichen Lage mit den den Kanten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ..., $A_n A_{n+1}$ entsprechenden Seitenflächen, welche senkrecht zur Ebene des Grundrisses stehen, an ein Band, dessen Breite etwa gleich der Dicke der Scheibe ist, so erhält man eine körperliche Kette, bei welcher die aufeinanderfolgenden Glieder nicht frei gegen einander drehbar sind, sondern um parallele Axen, und es ist bei Vernachlässigung der Dicke und des Gewichts des Bandes

20) $$a = \frac{L}{2n} + c \operatorname{ctg} \gamma, \quad c = c.$$

Hebt man das System an den beiden Bandenden auf, so nimmt das Polygon $A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$ die Gestalt eines gewöhnlichen Kettenpolygons an (Fig. 4c). Durch die verschiedenen Stellungen, welche man beiden Enden des Bandes geben kann, kann man die Horizontalspannung H und somit die Constanten h und $h_1 = h + c$ beliebig ändern und ausserdem bewirken, dass ein beliebiges Glied der Kette zum Scheitelgliede wird.

Je grösser man n wählt, desto mehr nimmt das Band zwischen A_1 und A_{n+1} die Form einer gewöhnlichen Kettenlinie an. Besonders interessant ist der Fall, dass man die Kette nur an einem Ende aufhängt, während man das andere Ende frei herunterhängen lässt. Alsdann ist die Horizontalspannung $H = 0$, also auch $h = 0$ und $h_1 = c$. Der aufgeklebte Theil des Bandes nimmt angenähert, insofern man $\frac{L}{n}$ als unendlich klein betrachten darf, die Form eines Bogens einer Kettenlinie von der Höhe c an. Hält man die Kette an demjenigen Bandende, an welchem der stumpfe Winkel des Parallelogramms liegt, so erhebt sich das freie Ende der Kette über den Scheitel (Fig. 4d). Diese Erscheinung hat auf den ersten Blick etwas Ueberraschendes, weil man nach den gewöhnlich betrachteten Fällen, bei denen der Schwerpunkt in der Verbindungslinie der Aufhängepunkte liegt, also $c = 0$ ist, nicht vermuthet, dass es eine wirkliche Kettenlinie giebt, wenn die Horizontalspannung Null ist.

Theoretisch interessant ist der ganze in diesem Paragraphen behandelte Fall wohl besonders deshalb, weil sich zeigt, dass das allgemeine Problem der Körperketten wesentlich mit dem speciellen Kettenproblem übereinstimmt. Die als Kettenlinie bekannte Curve gewinnt dadurch eine noch weitergehende Bedeutung. Auch liefert diese körperliche Kette, namentlich die nur an einem Ende aufgehängte, ein interessantes Beispiel des Satzes, dass der Schwerpunkt eines der Schwere unterworfenen Systems im stabilen Gleichgewicht die tiefste Lage hat, worauf wir weiter unten in V zurückkommen werden. Bei der frei herabhängenden Kette liegt, wie wir gesehen haben,

der Schwerpunkt senkrecht unter dem Bande, an welchem die Kette hängt, und der Schwerpunkt der m letzten Glieder senkrecht unter der Kante zwischen dem ersten dieser Glieder und dem vorhergehenden Gliede.

IV.

Constructionen. Die Construction eines, einem beliebigen System von Körpern entsprechenden Kettenpolygons ist zwar nach dem bisher Besprochenen schon ziemlich einfach, sie lässt sich aber ganz besonders übersichtlich darstellen, wenn man folgende Vorbetrachtung anstellt. Denkt man sich in Fig. 1 die Aufhängepunkte von A_1 und B_1 nach A'_1 und B'_1 verlegt, welche den Punkten A_1 und B_1 als ähnlich liegende Punkte entsprechen, wenn man S_1 als (äussern) Aehnlichkeitspunkt wählt, so können die Fäden, welche den Körper halten, mit Beibehaltung ihrer Spannungen parallel mit sich selbst nach A'_1 und B'_1 verlegt werden, ohne dass das Gleichgewicht gestört wird. Es wird dabei auch der Punkt D_1 durch den auf derselben Verticalen ihm ähnlich liegenden Punkt D'_1 ersetzt werden, so dass also $\frac{S_1 D'_1}{S_1 D_1} = \frac{S_1 A'_1}{S_1 A_1} = \frac{S_1 B'_1}{S_1 B_1} = \frac{A_1 B'_1}{A_1 B_1}$ ist. Durch eine solche Verlegung der Aufhängepunkte kann man der Entfernung derselben von einander, d. h. der Länge des betreffenden Kettengliedes jede beliebige Grösse geben, wofern nur die Aufhängepunkte nicht zusammenfallen. Wir wollen nun bei allen denjenigen Kettengliedern, die zwei getrennte Aufhängepunkte A_k und B_k haben, diese in der beschriebenen Weise so verlegen, dass die Längen der einzelnen Glieder ihren Gewichten proportional werden, dass also bei passender Wahl der Längeneinheit die Seite $A'_k B'_k$ ebensoviel Längeneinheiten enthält, wie das Gewicht P_k Gewichtseinheiten. Alsdann können wir die Gewichte geometrisch durch die ihnen entsprechenden Gliederlängen darstellen. Die Gewichte derjenigen Glieder, deren Aufhängepunkte zusammenfallen, denken wir uns ebenfalls geometrisch durch Längen dargestellt. Das so entstehende Kettenpolygon nennen wir das dem ursprünglichen entsprechende, statisch reducirte Kettenpolygon, seine Glieder die statisch reducirten. Das ursprüngliche und das ihm entsprechende statisch reducirte Polygon haben die entsprechenden Seiten parallel. Hat man also das statisch reducirte Polygon construirt, so hat die Construction des nicht reducirten keine Schwierigkeit mehr. Für das statisch reducirte Polygon ist

$$21)\qquad l'_k = P_k,\quad a'_k = \frac{a_k}{l_k} P_k,\quad c'_k = \frac{c_k}{l_k} P_k.$$

Ist $l_k = 0$, so sind a_k und c_k unbestimmt, ihr Verhältniss kann ganz beliebig angenommen werden. Dementsprechend werden a'_k und c'_k unendlich gross, aber ebenfalls so, dass $\frac{a'_k}{c'_k}$ unbestimmt bleibt, d. h. für das statisch reducirte Glied ist als Schwerpunkt irgend ein unendlich entfern-

ter Punkt zu nehmen, und es ist gleichgiltig, in welcher Richtung derselbe liegt.

Die drei letzten Gleichungen 10) werden nun

$$22)\quad V_k = V_0 + Q_k = V_{k-1} + P_k, \quad tg\,\alpha_k = \frac{V_k}{H}, \quad tg\,\tau_k = \frac{V_k - a'_k}{H + c'_k}.$$

Um also, wenn V_{k-1} und H gegeben sind, die Winkel α_k und τ_k zu construiren, denke man sich zunächst das statisch reducirte Glied $A'_k B'_k S_k$. Der Fusspunkt der Senkrechten von S_k auf $A'_k B'_k$ sei C'_k; dann ist $A'_k B'_k = P_k$, $A'_k C'_k = a'_k$, $C'_k S'_k = c'_k$. Man construire nun (Fig. 2) die horizontale Strecke $EM = H$, errichte in E nach unten die Verticale $EF_{k-1} = V_{k-1}$, verlängere sie bei F_k, so dass $F_{k-1}F_k = P_k$, ziehe $F_{k-1}M$ und $F_k M$. Diese Strecken stellen nach Grösse und Richtung die Spannungen T_{k-1} und T_k dar, ihre Richtungswinkel sind α_{k-1} und α_k. Dann trage man auf der Verticalen von F_k nach oben $F_k G_k = a'_k$ ab, verlängere ME über E bis J_k, so dass $EJ_k = c'_k$ ist. Wir ziehen durch J_k die Verticale, durch G_k die Horizontale und verbinden deren Durchschnitt N_k mit M. Die Strecke $N_k M$ giebt die Richtung des Kettengliedes $A_k B_k$, sie bildet mit der Horizontalen den Richtungswinkel τ_k. Verbindet man noch N_k mit F_{k-1} und F_k, so erhält man das Dreieck $N_k F_k F_{k-1}$, welches congruent ist mit $S_k A'_k B'_k$, aber so liegt, dass das letztere erst um irgend eine in seiner Ebene liegende Gerade als Axe um 180° gedreht werden muss, damit es durch Verschieben in der Ebene mit $N_k F_k F_{k-1}$ zur Deckung gebracht werden kann. Hierdurch ergiebt sich eine andere Construction von N_k, welche namentlich bei der Anwendung auf eine aus mehreren Gliedern bestehende Kette übersichtlicher ist. Ist $H = 0$, so fällt E mit M zusammen.

Anwendung auf eine aus vier Gliedern bestehende Kette. In Fig. 3a sind die Aufhängepunkte AB und der Schwerpunkt S eines jeden der vier gegebenen Kettenglieder in der Ebene der Zeichnung liegend dargestellt. Beim dritten Gliede fallen beide Aufhängepunkte zusammen. Die gegebenen Gewichte der vier Glieder stellen wir durch Strecken dar, welche wir der Reihe nach von oben nach unten auf einer Verticalen abtragen (Fig. 3b), und zwar $F_0F_1 = P_1$, $F_1F_2 = P_2$, $F_2F_3 = P_3$, $F_3F_4 = P_4$.

Als gegeben nehmen wir ferner an die Spannung im ersten Faden T_0, dargestellt nach Grösse und Richtung durch die Strecke $F_0 M$. Wir verbinden die Punkte F_1, F_2, F_3, F_4 ebenfalls mit M und erhalten so die vier Strecken T_1, T_2, T_3, T_4, welche die Spannungen in den übrigen Fäden darstellen. Wir construiren ferner die Dreiecke $F_1 N_1 F_0 \sim A_1 S_1 B_1$, $F_2 N_2 F_1 \sim A_2 S_2 B_2$, $F_4 N_4 F_3 \sim A_4 S_4 B_4$, aber so, dass die ähnlichen Dreiecke nicht durch Verschieben in der Ebene in ähnliche Lage gebracht werden können. Für den dritten Körper fällt die analoge Construction aus, da seine Aufhängepunkte zusammenfallen — man kann für N_3 irgend einen in beliebiger Richtung in unendlicher Entfernung liegenden Punkt nehmen. Wir verbinden dann die Punkte N_1, N_2, N_3 mit M; die drei Verbindungslinien geben

die Richtungen der drei Geraden A_1B_1, A_2B_2, A_4B_4, d. h. der festen Polygonseiten an (A_3B_3 ist Null mit unbestimmter Richtung). Es sind also sowohl die Richtungen der Fäden, als auch die der festen Polygonseiten bestimmt; sind nun noch die Fadenlängen gegeben, so hat es keine Schwierigkeit, das Kettenpolygon $B_0A_1B_2 \dots B_4A_5$ vollständig zu construiren, wie in Fig. 3c geschehen ist. Die Dreiecke $F_1N_1F_0$, $F_2N_2N_1$, $F_4N_4F_3$, um die Axe F_0F_4 geklappt, geben die drei entsprechenden statisch reducirten Kettenglieder an.

In Fig. 4a, 4b, 4c, 4d ist die Construction für den in III betrachteten Fall einer körperlichen Kette aus acht im mechanischen Sinne congruenten Gliedern durchgeführt. In Fig. 4b sind die Spannungen und die Richtungen der festen Kettenglieder dargestellt. Das Dreieck MN_1N_8 ist gleichschenklig gewählt. Infolge dessen ist das entsprechende Kettenpolygon Fig. 4c symmetrisch und A_5 ist der tiefste Punkt oder der Scheitel. Die Strecke EM stellt die constante Horizontalspannung dar. $F_0M = T_0$ und $F_8M = T_8$ sind nach Grösse und Richtung die Spannungen der beiden Fäden, an denen die Kette hängt. Will man die Spannung zwischen irgend zwei benachbarten Gliedern, also in einem der Gelenke darstellen, z. B. in A_3, so hat man nur von dem dieser Verbindungsstelle entsprechenden Punkte F, nämlich von F_3 nach M die Strecke F_3M zu ziehen.

Verändert man die Lage von M, so erhält man alle möglichen Gleichgewichtslagen der Kette. Soll T_8 gleich Null sein, also das letzte Glied frei herabhängen, so fällt Punkt M mit F_8 zusammen. Die Kette nimmt alsdann die Gestalt Fig. 4d an, und die Horizontalspannung in sämmtlichen Gelenken ist Null.

Anmerkung. Es sind auch bei diesen Constructionen in der Zeichnung, entsprechend dem in der Anmerkung zu I Gesagten, nur die unbedingt stabilen Gleichgewichtslagen dargestellt.

V.

Da bekanntlich der Schwerpunkt eines der Schwere und gewissen geometrischen Bedingungen unterworfenen Systems in der stabilen Gleichgewichtslage am tiefsten liegt, so lässt sich die stabile Gleichgewichtslage einer Körperkette auch dadurch finden, dass man untersucht, für welche Anordnung der in einem oder in beiden Endpunkten festen Kette der Schwerpunkt die tiefste Lage hat. Einen Unterschied zwischen Fäden und festen Kettengliedern brauchen wir hierbei nicht zu machen, da die Fäden als feste Glieder mit der Masse Null und beliebig liegendem Schwerpunkt angesehen werden können.

Aus sehr einfachen Ueberlegungen kann man zunächst folgern, dass das Polygon und sämmtliche Schwerpunkte in dieselbe Verticalebene fallen müssen, wenn beide Endpunkte fest sind. Ist nur ein Endpunkt fest, so

kann man zunächst dasselbe annehmen und dann die einzelnen Glieder gegeneinander um verticale Axen drehen, welche durch die Verbindungsstellen zu legen sind, wie wir schon oben besprochen haben. Nehmen wir dann die Ebene des Polygons zur xy-Ebene, die nach oben gerichtete Verticale zur positiven y-Axe und den festen Anfangspunkt der Kette zum Coordinatenanfang, so sind die Coordinaten des Endpunktes des k^{ten} Gliedes:

$$23)\quad \begin{cases} x_k = x_{k-1} + l_k \cos\tau_k = l_1 \cos\tau_1 + l_2 \cos\tau_2 + l_3 \cos\tau_3 + \ldots + l_k \cos\tau_k, \\ y_k = y_{k-1} + l_k \sin\tau_k = l_1 \sin\tau_1 + l_2 \sin\tau_2 + l_3 \sin\tau_3 + \ldots + l_k \sin\tau_k. \end{cases}$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes des k^{ten} Gliedes sind:

$$x_{k-1} + a_k \cos\tau_k + c_k \sin\tau_k, \quad y_{k-1} + a_k \sin\tau_k - c_k \cos\tau_k,$$

und die Coordinaten des Schwerpunktes des ganzen Systems, welche wir mit u und v bezeichnen, sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$u\sum_1^n P_k = \sum_1^n P_k x_{k-1} + P_k a_k \cos\tau_k + P_k c_k \sin\tau_k,$$

$$v\sum_1^n P_k = \sum_1^n P_k y_{k-1} + P_k a_k \sin\tau_k - P_k c_k \cos\tau_k.$$

Nun ist $\cos\tau_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{l_k}$, $\sin\tau_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{l_k}$ und wenn man, wie oben, $\sum_1^k P_k = Q_k$ setzt, ist

$$24)\quad \begin{cases} Q_n u = \sum_1^n P_k x_{k-1} + \frac{a_k}{l_k} P_k (x_k - x_{k-1}) + \frac{c_k}{l_k} P_k (y_k - y_{k-1}), \\ Q_n v = \sum_1^n P_k y_{k-1} + \frac{a_k}{l_k} P_k (y_k - y_{k-1}) - \frac{c_k}{l_k} P_k (x_k - x_{k-1}). \end{cases}$$

Um nun zu untersuchen, für welche Anordnung v ein Minimum wird, gehen wir zu einer Nachbarlage über, indem wir $x_k y_k$ übergehen lassen in $x_k + \xi_k$, $y_k + \eta_k$. Hierdurch geht v über in $v + \varphi$, und es ist

$$25)\quad \varphi . Q_n = \sum_1^n \left[P_k \eta_{k-1} + \frac{a_k}{l_k} P_k (\eta_k - \eta_{k-1}) - \frac{c_k}{l_k} P_k (\xi_k - \xi_{k-1})\right].$$

Da die Längen der Kettenglieder ungeändert bleiben, ist

$$26)\quad \begin{cases} 2(\xi_k - \xi_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + 2(\eta_k - \eta_{k-1})(y_k - y_{k-1}) \\ \qquad + (\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (\eta_k - \eta_{k-1})^2 = 0. \end{cases}$$

Jede der k Gleichungen 26) multipliciren wir mit einem vorläufig noch nicht bestimmten Factor λ_k und addiren sie sämmtlich zu 25); dann kommt, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$29)\quad \begin{cases} \frac{a_k}{l_k} P_k + 2\lambda_k (y_k - y_{k-1}) = \quad V_k, \\ \frac{c_k}{l_k} P_k - 2\lambda_k (x_k - x_{k-1}) = - H_k, \\ (\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (\eta_k - \eta_{k-1})^2 = \varrho_k^2, \end{cases}$$

$$\varphi\, Q_n = \sum_1^n [P_k \eta_{k-1} + V_k(\eta_k - \eta_{k-1}) - H_k(\xi_k - \xi_{k-1}) + \lambda_k \varrho_k^2].$$

Nun ist identisch

$$V_k(\eta_k - \eta_{k-1}) = V_k \eta_k - V_{k-1}\eta_{k-1} - \eta_{k-1}(V_k - V_{k-1}),$$
$$H_k(\xi_k - \xi_{k-1}) = H_k \xi_k - H_{k-1}\xi_{k-1} - \xi_{k-1}(H_k - H_{k-1}).$$

Diese Identitäten wollen wir für alle Werthe von k zwischen 1 und n anwenden, indem wir die noch nicht definirten Grössen H_0 und V_0 vorläufig unbestimmt lassen. Wir erhalten alsdann, da der Anfangspunkt fest, also $\xi_0 = \eta_0 = 0$ ist,

$$\varphi\, Q_n = V_n \eta_n - H_n \xi_n + \sum_1^n [(P_k - V_k + V_{k-1})\eta_{k-1} + (H_k - H_{k-1})\xi_{k-1} + \lambda_k \varrho_k^2].$$

Wir verfügen nun zunächst über die Grössen λ_k so, dass $H_k = H_0 = H$ constant wird; dann ist

$$30)\qquad \varphi\, Q_n = V_n \eta_n - H \xi_n + \sum_1^n [(P_k - V_k + V_{k-1})\eta_{k-1} + \lambda_k \varrho_k^2].$$

Soll nun für das betrachtete Polygon die Ordinate ein Maximum oder Minimum haben, so darf φ für keine mögliche Wahl der η sein Vorzeichen wechseln. Hierzu muss

$$31)\qquad V_n \eta_n - H \xi_n = 0, \quad P_k - V_k + V_{k+1} = 0$$

sein, und zwar gilt die letztere Gleichung zunächst für alle Werthe von k zwischen 2 und n. Wir setzen fest, dass sie auch gelte für $k = 1$, und bestimmen dadurch V_0.

Die Gleichungen 31) müssen erfüllt sein, weil bei unendlich kleinen Werthen der η_k die Werthe ϱ_k von höherer Ordnung unendlich klein werden, die η_k aber nur durch die Bedingung verknüpft sind, dass $\sum_1^n \eta_k = 0$ sei, so dass alle ausser einem ganz willkürlich gewählt werden können. Damit nun ein relatives Minimum (oder Maximum) der Schwerpunktsordinate vorhanden sei, muss $\Sigma \lambda_k \varrho_k^2$ für jede mit den Bedingungen verträgliche Wahl der unendlich klein zu nehmenden Werthe η_k, durch welche die ϱ_k mit bestimmt werden, positiv (oder negativ) sein. Die allgemeine Durchführung dieser Discussion würde äusserst verwickelt werden. Ist aber λ_k für jeden Werth von k positiv (resp. negativ), so hat die Ordinate ein absolutes Minimum (resp. Maximum); d. h. es kann für keine andere Anordnung des Polygons der Schwerpunkt tiefer (resp. höher) oder auch nur ebenso tief (resp. hoch) fallen.

Wir wollen nun die ermittelten Bedingungen näher betrachten.

Setzt man in der Gleichung 31) $P_k = V_k - V_{k-1}$ für k alle Werthe von 1 bis k und addirt, so folgt

$$32)\qquad Q_k = V_k - V_0, \quad \text{also} \quad V_k = V_0 + Q_k,$$

und die beiden ersten Gleichungen 29) werden

$$33)\quad \begin{cases} \frac{a_k}{l_k} P_k + 2\lambda_k (y_k - y_{k-1}) = V_k = V_0 + Q_k, \\ \frac{c_k}{l_k} P_k - 2\lambda_k (x_k - x_{k-1}) = -H. \end{cases}$$

Die Elimination von λ_k ergiebt

$$34)\quad \begin{cases} \left(V_k - \frac{a_k}{l_k} P_k\right)(x_k - x_{k-1}) - \left(H + \frac{c_k}{l_k} P_k\right)(y_k - y_{k-1}) = 0, \text{ also} \\ tg\,\tau_k = \frac{V_k - \frac{a_k}{l_k} P_k}{H + \frac{c_k}{l_k} P_k} = \frac{V_0 + Q_k - \frac{a_k}{l_k} P_k}{H + \frac{c_k}{l_k} P_k}. \end{cases}$$

Ferner ist

$$35)\quad 2\lambda_k = \frac{H + \frac{c_k}{l_k} P_k}{x_k - x_{k-1}} = \frac{V_k - \frac{a_k}{l_k} P_k}{y_k - y_{k-1}}.$$

Es handelt sich nun noch um die beiden Constanten V_0 und H und um die erste Bedingung 31). Ist der Endpunkt $x_n y_n$ auch fest, so sind ξ_n und η_n von selbst Null, und zur Bestimmung von V_0 und H dienen die Gleichungen:

$$36)\quad x_n = a = \sum_1^n l_k \cos\tau_k, \quad y_n = b = \sum_1^n l_k \sin\tau_k,$$

in welchen man sich die Werthe $\cos\tau_k$ und $\sin\tau_k$ durch $tg\,\tau_k$ ausdrücken, also vermöge der Gleichungen 34) durch V_0 und H darstellen kann.

Ist dagegen der Endpunkt frei, so fallen die Gleichungen 36) fort; dagegen liefert die Gleichung 31), da bei mehr als einem Gliede ξ_n und η_n von einander unabhängig sind, die beiden Bedingungen

$$36\text{a})\quad H = 0, \quad V_n = 0, \quad \text{mithin } V_0 = -Q_n.$$

Die hier gefundenen Gleichungen stimmen mit den früher gefundenen, wie von vornherein zu erwarten war, vollständig überein. Namentlich ist $tg\,\tau_k$ durch die Gleichungen 10) und 34) in derselben Weise bestimmt und V_k und H sind die Vertical- und die Horizontalcomponente der Spannung im Gelenke $x_k y_k$.

Zur vollständigen Lösung des Problems bei gegebenen festen Endpunkten würde die Auflösung der Gleichungen 36) erforderlich sein, welche im Allgemeinen ausserordentlich verwickelt sind. Es würden sich mehrere Lösungen ergeben, und die Prüfung der Vorzeichen der λ_k und des Ausdrucks $\Sigma\lambda_k\varrho_k^2$ würde noch weitere Verwickelungen mit sich bringen.

Weit einfacher gestaltet sich die Sache, wenn wir uns darauf beschränken, V_0 und H als gegeben zu betrachten. Dies schliesst nicht aus, dass der Endpunkt $x_n y_n$ fest ist, aber seine Lage kann dann nicht willkürlich gegeben sein, sondern sie ist bestimmt. Alsdann lässt sich das Polygon vollständig construiren. Man kann zunächst sämmtliche Werthe $tg\,\tau_k$ bestimmen, und da man jedesmal hieraus zwei entgegengesetzte Richtungen

erhält, würde man im Allgemeinen 2^n verschiedene Gleichgewichtslagen erhalten oder, wenn man die c_k auch noch durch $-c_k$ ersetzt, sogar 4^n, aber jede mit anderem Endpunkte. Von diesen sind zwei besonders ausgezeichnet, welche ein absolutes Minimum oder Maximum der Schwerpunktsordinate für das gefundene Polygon, wenn man seine Endpunkte festhält, bedingen. Man kann nämlich unter den beiden Werthen von τ_k jedesmal denjenigen wählen, der bewirkt, dass der entsprechende Werth λ_k positiv (resp. negativ) wird. Im ersteren Falle erhält man stets eine stabile Gleichgewichtslage, im letzteren stets eine labile.

Sind alle c_k positiv, wie wir es oben angenommen haben, und ist H so gewählt, dass alle Werthe $H+\frac{c_k}{l_k}P_k$ positiv sind, so hat man nur $x_k > x_{k-1}$ zu wählen, was stets bei einer der beiden Richtungen zutreffen wird. Alsdann ist die Abscisse jedes Eckpunktes grösser als die des vorhergehenden. Aber auch unter anderen Voraussetzungen lässt sich stets die absolute Minimalbedingung ohne Schwierigkeit erfüllen.

Berlin, im August 1886.

XIX.

Ueber die Beziehung des Nullsystems und linearen Strahlencomplexes zum Polarsystem des Rotationsparaboloids.

Von

Prof. Dr. Guido Hauck

in Berlin.

Hierzu Taf. V Fig. 5a u. 5b.

Die sehr nahe Beziehung, in welcher das Nullsystem zum Polarsystem des Rotationsparaboloids steht, scheint bis jetzt nicht bemerkt worden zu sein. Dieselbe ergiebt sich aber (ganz abgesehen von graphostatischen Erwägungen*) auf sehr einfache Weise, sobald man das Nullsystem als zwei in einander liegende reciproke räumliche Systeme betrachtet und die Frage aufwirft, welche von den Eigenthümlichkeiten des Nullsystems auf Kosten einer Besonderheit der reciproken Verwandtschaft — und welche auf Kosten der Besonderheit der Lage kommen.

Als erstere Eigenschaften, welche wir innere Eigenschaften nennen wollen, geben sich sofort zu erkennen: 1. die Existenz einer Centralaxe, 2. das Unendlichferneliegen des Pols der unendlich fernen Ebene.

Beide Eigenschaften sind auch dem Polarsystem des Rotationsparaboloides als innere Eigenschaften charakteristisch. Es liegt daher die Vermuthung nahe, das Nullsystem möchte nur eine andere gegenseitige Lage der nämlichen zwei im Polarsystem eines Rotationsparaboloides vereinigten reciproken Systeme Σ und Σ' vorstellen. Diese Vermuthung bestätigt sich insoweit, als zwar nicht Σ und Σ' selbst, wohl aber Σ und ein mit Σ' symmetrisches System Σ'' stets in eine solche gegenseitige Lage gebracht werden können, in welcher sie ein Nullsystem constituiren.

Dies soll im Folgenden näher ausgeführt werden, indem die wesentlichsten Eigenschaften des Nullsystems** aus denjenigen des Polarsystems eines Rotationsparaboloids auf elementare Weise abgeleitet werden.

* Vergl. hierüber meinen Aufsatz: „Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik“, im 100. Band des Journals f. d. reine u. angew. Math.

** Ueber dieselben vergleiche man: Möbius, Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume, Crelle J. X, S. 317. Ferner: Reye, Die Geometrie der Lage, 2. Aufl. 1882, II. Abth. S. 69.

§ 1.

Die Axe des Rotationsparaboloids sei $\mathfrak{A}$, sein Scheitelpunkt — S, die Tangentialebene im Scheitelpunkt — σ'; der Parameter der Meridianparabel sei $= 2p$. Das als Originalsystem betrachtete räumliche System sei Σ. Das von den Polarebenen, Polaren und Polen der Punkte, Geraden und Ebenen von Σ in Beziehung auf das Rotationsparaboloid gebildete System — wir nennen es das Polaren-System — sei Σ'. Endlich bedeute Σ'' das Spiegelbild des Systems Σ' in Beziehung auf die Ebene σ' als Spiegelebene.

Ist nun P irgend ein Punkt des Systems Σ, so erhält man dessen Polarebene π' wie folgt (vergl. Taf. V, Fig. 5a): Man lege durch den Punkt P und die Axe $\mathfrak{A}$ die Meridianebene, welche als Zeichenebene diene, und zeichne in ihr die Meridianparabel sammt Scheiteltangente $\mathfrak{s}'$. Man ziehe hierauf durch P eine Parallele zu $\mathfrak{A}$, welche die Meridianparabel in X schneide, verlängere PX um sich selbst nach M' und ziehe durch M' die Linie $\mathfrak{p}'$ parallel zu der Parabeltangente im Punkte X; dann ist $\mathfrak{p}'$ die Polare des Punktes P in Beziehung auf die Meridianparabel. Legt man endlich durch $\mathfrak{p}'$ die Ebene π' senkrecht zur Meridianebene, so ist π' die Polarebene des Punktes P in Beziehung auf das Rotationsparaboloid.

Die Linie $\mathfrak{p}'$ schneide die Scheiteltangente $\mathfrak{s}'$ in U' und die Axe $\mathfrak{A}$ in r'; die Parabeltangente in X schneide die Axe in t. Man fälle von den Punkten P und X die Senkrechten Pp und Xx auf die Axe. Es ist dann $pS = Sr'$, (weil $px = PX = XM' = tr'$ und $xS = St$); der Punkt p ist also das Spiegelbild von r' in Beziehung auf die Ebene σ'. Hieraus folgt, dass die Linie $U'p$ das Spiegelbild $\mathfrak{p}''$ der Linie $\mathfrak{p}'$ — und ferner: dass die durch $\mathfrak{p}''$ senkrecht zur Meridianebene gelegte Ebene das Spiegelbild π'' der Ebene π' vorstellt.

Man drehe nun die Ebene π'' um die Axe $\mathfrak{A}$ um einen Winkel von 90^0, wobei sie den Mantel eines Rotationskegels beschreibt, dessen Spitze p ist. Nach Vollendung der Drehung geht sie durch die Linie pP. Sie wird durch die Linie pP in ein oberes und ein unteres Blatt getheilt*. Das obere Blatt liegt vor der Meridianebene oder hinter derselben, je nachdem die Drehung um die Axe nach links oder nach rechts (d. i. von oben gesehen — entgegengesetzt dem Uhrzeiger oder im Sinne desselben) erfolgt. Die erste Lage werde durch π''_1, die zweite durch π''_2 bezeichnet.

Würden wir umgekehrt die Ebene π''_1 oder π''_2 als dem Originalsystem Σ angehörig betrachten und demgemäss durch ϱ_1, bezw. ϱ_2 bezeichnen, so würde der Pol R'_1 von ϱ_1 auf der Senkrechten zur Meridian-

* Im Hinblick auf Fig. 5a (Taf. V) möge der ins Innere des Paraboloids fallende Ast der Axe $\mathfrak{A}$ als der obere, der ausserhalb fallende Ast als der untere bezeichnet werden.

ebene durch r' in einem Abstand $r'R'_1 = pP$ vor der Meridianebene liegen. Sein Spiegelbild R''_1 würde folglich auf der Senkrechten durch p vorn im nämlichen Abstand liegen und würde also nach einer Linksdrehung um die Axe um 90° mit P zusammenfallen (vergl. Taf. V, Fig. 5b, welche die Projection auf eine zur Axe senkrechte Ebene vorstellt). Das Spiegelbild R''_2 des Pols R'_2 von ϱ_2 würde in gleichem Abstand hinter der Meridianebene liegen und demgemäss durch eine Rechtsdrehung um 90° zum Zusammenfallen mit P gelangen.

Führt man die nämliche Operation mit sämmtlichen Punkten P und Ebenen ϱ des Systems Σ aus, so ist das von den Polarebenen π' und Polen R' gebildete System Σ' — und folglich auch dessen Spiegelbild Σ'' reciprok zu Σ, und es befindet sich Σ'' nach seiner Links- oder Rechtsdrehung um die Axe $\mathfrak{A}$ um 90° beidemal in einer solchen involutorischen Lage mit Σ, dass jede Ebene π'' durch den ihr entsprechenden Punkt P geht und jeder Punkt R'' in der ihm entsprechenden Ebene ϱ liegt. Das heisst: Das System Σ und das um 90° nach links oder rechts verdrehte System Σ'' bilden zusammen je ein Nullsystem.

In anderer Fassung lässt sich hiernach auch sagen: Entsprechen sich zwei Polyeder reciprok in Beziehung auf das Polarsystem eines Rotationsparaboloids, so kann das eine mit dem Spiegelbild des andern stets in eine solche gegenseitige Lage gebracht werden, dass jedes dem andern zugleich ein- und umbeschrieben ist.

§ 2.

Der Abstand des Punktes P von der Axe $\mathfrak{A}$ sei $= e$; der Winkel, den die Ebene π' mit der Axe $\mathfrak{A}$ macht, sei $= \alpha'$. Schneidet nun (vergl. Taf. V, Fig. 5a) die im Punkt X gezogene Parabelnormale die Axe in n, so ist die Subnormale xn constant gleich dem halben Parameter p. Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreieck $Xxn : Xx = e$ und Winkel $xXn = \alpha'$. Folglich hat man:

1) $$e \, tg \, \alpha' = p.$$

Da das Spiegelbild π'' der Ebene π' mit der Axe $\mathfrak{A}$ den nämlichen Winkel α' macht wie π', und da sich dieser Winkel bei der Drehung der Ebene π'' um die Axe nicht ändert, so gilt die Relation 1) in gleicher Weise für das Nullsystem wie für das Polarsystem des Rotationsparaboloids. Vermöge derselben ist in beiden Systemen der Axenwinkel α' der Polarebene aus dem Axenabstand e des Pols direct bestimmt, und umgekehrt. Es kann daher für jeden Pol die Polarebene — und umgekehrt — angegeben werden, wenn ausserdem noch beachtet wird, dass im Nullsystem die Polarebene durch die vom Pol P auf die Axe gefällte Senkrechte Pp —, dagegen im Polarsystem des Rotationsparaboloids

durch das um 90° verdrehte Spiegelbild $R'r'$ dieser Senkrechten geht.

Bezeichnet man die Grösse p in Beziehung auf das Nullsystem als die Constante des Nullsystems, so kann man nunmehr den Satz aussprechen:

Das Polaren-System eines Nullsystems kann betrachtet werden als das um 90° axial verdrehte Spiegelbild des Polaren-Systems eines Rotationsparaboloids, dessen Parameter doppelt so gross ist, als die Constante des Nullsystems.

§ 3.

Es seien $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ zwei conjugirte gerade Linien im Polarsystem des Rotationsparaboloids. Die kürzeste Entfernung der Linie $\mathfrak{l}$ von der Axe $\mathfrak{A}$ sei $= e$, der Winkel, den ihre Richtung mit der Axe macht, sei $= \alpha$; der Axenabstand der Linie $\mathfrak{l}'$ sei $= e'$, ihr Axenwinkel sei $= \alpha'$.

Die zu $\mathfrak{l}'$ parallele Meridianebene diene als Zeichenebene (vergl. Taf. V, Fig. 5a). Man lege durch $\mathfrak{l}'$ senkrecht zur Meridianebene die Ebene π', welche die Meridianebene nach $\mathfrak{p}'$ schneide. Es ist dann $\mathfrak{p}'$ parallel zu $\mathfrak{l}'$ und stellt deren Projection auf die Meridianebene vor.

Legt man durch die Linie PM' die Ebene λ senkrecht zur Meridianebene, so stellt diese die conjugirte Durchmesserebene der Linie $\mathfrak{p}'$ und folglich auch der zu $\mathfrak{p}'$ parallelen $\mathfrak{l}'$ vor. In ihr muss also die Polare $\mathfrak{l}$ von $\mathfrak{l}'$ liegen. Da aber die durch $\mathfrak{l}'$ gehende Durchmesserebene parallel zur Meridianebene und folglich senkrecht zur Durchmesserebene λ ist, so hat man den Satz:

Im Polarsystem des Rotationsparaboloids stehen die Durchmesserebenen, welche durch je zwei conjugirte gerade Linien gelegt werden, auf einander senkrecht.

Hieraus folgt dann, wenn man das Spiegelbild $\mathfrak{l}''$ von $\mathfrak{l}'$ (welches mit $\mathfrak{l}'$ in der nämlichen Durchmesserebene liegt) um die Axe $\mathfrak{A}$ um 90° dreht, weiter:

Im Nullsystem sind die Durchmesserebenen, welche durch je zwei conjugirte gerade Linien gelegt werden, zu einander parallel.

Der kürzeste Abstand der Linie $\mathfrak{l}'$ von der Axe $\mathfrak{A}$ ist senkrecht zur Meridianebene, sein Fusspunkt auf der Axe ist r', sein Fusspunkt auf $\mathfrak{l}'$ sei R'. Es ist also $r'R' = e'$. Ferner ist der Winkel, den die mit $\mathfrak{l}'$ parallele Linie $\mathfrak{p}'$ mit der Axe macht, $= \alpha'$. Derselbe ist also identisch mit dem Axenwinkel der Ebene π'. — Da $\mathfrak{l}'$ in der Ebene π' liegt, so muss ihre Conjugirte $\mathfrak{l}$ durch den Pol P von π' gehen. Da ferner $\mathfrak{l}$ in der zur Meridianebene senkrechten Durchmesserebene λ liegt, so projicirt

sie sich auf die Meridianebene nach PM', und es stellt Pp den kürzesten Abstand e zwischen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{A}$ vor. Da endlich $\mathfrak{l}'$ durch den Punkt R' geht, so muss $\mathfrak{l}$ in der Polarebene ϱ von R' liegen. Diese geht nach § 1 durch pP; ihr oberes Blatt liegt vor der Meridianebene oder hinter derselben, je nachdem der Punkt R' vorn oder hinten liegt. Demgemäss liegt auch der obere Ast der Linie $\mathfrak{l}$ vor der Meridianebene oder hinter derselben, je nachdem die Linie $\mathfrak{l}'$ vorn oder hinten liegt. Der Winkel, den die Ebene ϱ mit der Axe $\mathfrak{A}$ und also auch mit der Meridianebene macht, wird gemessen durch den von $\mathfrak{l}$ und PM' gebildeten Winkel und ist demzufolge gleich dem Axenwinkel α der Linie $\mathfrak{l}$.

Da hiernach bewiesen ist, dass die Axenabstände e und e' und die Axenwinkel α und α' der zwei conjugirten Linien $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ bezw. identisch sind mit den Axenabständen der zwei Punkte P und R' und den Axenwinkeln der zwei Polarebenen ϱ und π', so folgt aus dem Satze des § 2 unmittelbar die Relation:

2) $$e \operatorname{tg} \alpha' = e' \operatorname{tg} \alpha = p.$$

Dreht man das Spiegelbild $\mathfrak{l}''$ von $\mathfrak{l}'$, welches den nämlichen Axenabstand e' und Axenwinkel α' besitzt, um die Axe um 90^0, so ändert sich hierbei weder Axenabstand noch Axenwinkel. Die Relation 2) gilt daher ebensowohl für das Nullsystem, wie für das Polarsystem des Rotationsparaboloids. Vermöge derselben ist Axenabstand und Axenwinkel der einen von zwei conjugirten Linien aus Axenabstand und Axenwinkel der andern direct bestimmt. Betreffs ihrer gegenseitigen Lage ist noch Folgendes zu bemerken: Das Spiegelbild R'' des Punktes R' liegt auf der Linie, welche in p senkrecht zur Meridianebene steht und also bei einer Drehung um die Axe um 90^0 mit der Linie pP zusammenfällt. *Daher fallen im Nullsystem die Axenabstände zweier conjugirten Linien in die nämliche Gerade. Im Polarsystem des Rotationsparaboloids dagegen fallen sie in Linien, von denen die eine das um 90^0 verdrehte Spiegelbild der andern vorstellt.*

§ 4.

Besteht zwischen Axenabstand e und Axenwinkel α einer geraden Linie $\mathfrak{l}$ die Beziehung:

3) $$e \operatorname{tg} \alpha = p,$$

so folgt aus der Relation 2) des vorigen Paragraphen, dass Axenabstand e und Axenwinkel α' der conjugirten Linie $\mathfrak{l}'$ die nämlichen Werthe:

$$e' = e, \quad \alpha' = \alpha$$

besitzen. Umgekehrt folgt: Haben zwei conjugirte gerade Linien $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ gleiche Axenabstände, so haben sie auch gleiche Axenwinkel, und umgekehrt, und es besteht dann zwischen beiden die Beziehung 3).

Zwei conjugirte Linien von dieser besonderen Art haben im Nullsystem eine solche Lage, dass ihre Axenabstände (welche nach § 3 in derselben geraden Linie liegen) entweder zusammenfallen oder auf verschiedenen Seiten der Axe liegen. Um diese Verhältnisse näher zu prüfen, denken wir uns im Anschluss an die Betrachtungen des vorigen Paragraphen (vergl. Taf. V, Fig. 5a) zwei gerade Linien $\mathfrak{l}'_1$ und $\mathfrak{l}'_2$, beide parallel zu $\mathfrak{p}'$ und sich nach $\mathfrak{p}'$ projicirend, — $\mathfrak{l}'_1$ vor der Meridianebene, $\mathfrak{l}'_2$ hinter derselben, aber mit gleichen Axenabständen $r'R'_1 = r'R'_2$. Ihre conjugirten Linien $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ liegen dann in der zur Meridianebene senkrechten Ebene λ und projiciren sich beide nach PM'; sie gehen beide durch P und liegen symmetrisch zur Meridianebene, — der obere Ast von $\mathfrak{l}_1$ vor der Meridianebene, der obere Ast von $\mathfrak{l}_2$ hinter derselben; ihr gemeinschaftlicher Axenabstand ist pP. Axenabstand e und Axenwinkel α von $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ mögen der Relation 3) genügen. Es haben also dann Axenabstand und Axenwinkel von $\mathfrak{l}'_1$ und $\mathfrak{l}'_2$ die nämlichen Werthe: $r'R'_1 = r'R'_2 = pP = e$, und $\alpha' = \alpha$.

Die Spiegelbilder von R'_1 und R'_2 seien R''_1 und R''_2; sie liegen auf der Senkrechten zur Meridianebene durch p, — R''_1 vorn, R''_2 hinten, in gleichen Abständen $pR''_1 = pR''_2 = pP$ (vergl. Taf. V, Fig. 5b). Man denke sich noch Pp um sich selbst verlängert nach Q. — Die Spiegelbilder von $\mathfrak{l}'_1$ und $\mathfrak{l}'_2$ seien $\mathfrak{l}''_1$ und $\mathfrak{l}''_2$. In Fig. 5b (Taf. V) sind die Projectionen der oberen Aeste sowohl von $\mathfrak{l}''_1$ und $\mathfrak{l}''_2$ als von $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ auf die zur Axe senkrechte Ebene durch p markirt. Die oberen Aeste von $\mathfrak{l}''_1$ und $\mathfrak{l}''_2$ sind beide nach links geneigt, der obere Ast von $\mathfrak{l}_1$ ist nach vorn, der von $\mathfrak{l}_2$ nach hinten geneigt. Da die Axenwinkel durchweg gleich sind, so kann man diese vier Linien auffassen als Mantellinien eines windschiefen Rotationshyperboloids, dessen Mittelpunkt p und dessen Kehlhalbmesser e ist; und zwar gehören $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}''_1$ der einen Mantellinienschaar, $\mathfrak{l}_2$ und $\mathfrak{l}''_2$ der andern Schaar an.

Dreht man daher das System Σ'' um die Axe $\mathfrak{A}$ nach links (d. i. entgegengesetzt dem Uhrzeiger) um 90°, so fällt R''_1 mit P — und $\mathfrak{l}''_1$ mit $\mathfrak{l}_1$ zusammen, während R''_2 nach Q gelangt und der obere Ast von $\mathfrak{l}''_2$ vor die Meridianebene zu liegen kommt, so dass $\mathfrak{l}''_2$ und $\mathfrak{l}_2$ sich kreuzen. Dreht man dagegen nach rechts (d. i. im Sinne des Uhrzeigers), so fällt R''_2 mit P — und $\mathfrak{l}''_2$ mit $\mathfrak{l}_2$ zusammen, während R''_1 nach Q gelangt und der obere Ast von $\mathfrak{l}''_1$ hinter die Meridianebene zu liegen kommt, so dass $\mathfrak{l}''_1$ und $\mathfrak{l}_1$ sich kreuzen.

Die Gesammtheit der zusammenfallenden Linien — also bei der Linksdrehung die sämmtlichen Linien $\mathfrak{l}_1$, bei der Rechtsdrehung die sämmtlichen Linien $\mathfrak{l}_2$ — bilden je einen linearen Strahlencomplex. Denkt man sich zwei Schraubenlinien, welche beide $\mathfrak{A}$ zur Axe haben, und von denen die eine die Linie $\mathfrak{l}_1$, die andere die Linie $\mathfrak{l}_2$ zur Tangente hat, so ist die erstere rechts gewunden, die letztere links gewunden. Hierdurch

ist auch der Charakter der zwei Strahlencomplexe bestimmt. Die zwei Nullsysteme, von denen das eine durch Linksdrehung, das andere durch Rechtsdrehung des Systems Σ'' um 90^0 entsteht, unterscheiden sich somit dadurch von einander, dass der von den Doppellinien (Leitstrahlen) gebildete Strahlencomplex bei der Linksdrehung rechts gewunden, bei der Rechtsdrehung links gewunden ist.

Zugleich folgt hieraus, dass ein Nullsystem mit Linkswindung in ein solches mit Rechtswindung umgewandelt werden kann dadurch, dass man sein Polaren-System um die Axe um 180^0 dreht.

Kleinere Mittheilungen.

XXVI. Zur Theorie der Invarianten.

Dass die Summe der numerischen Coefficienten einer Invariante verschwindet, kann aus elementaren Eigenschaften dieser Gebilde geschlossen werden, wie im Nachfolgenden gezeigt werden soll.

In Faà di Bruno's „Theorie der binären Formen“ (§ 10, 7; S. 108 der deutschen Ausgabe) finde ich diesen Satz mit Hilfe einer complexen Substitution abgeleitet — ein Weg, der wenig geeignet ist, die überaus einfache Natur des Satzes hervortreten zu lassen.

Jener Satz wird nun ohne Weiteres evident gemacht mit Hilfe der beiden bekannten *Hilfssätze:*

1. Die Bestandtheile (Summanden) einer Invariante sind zu einander isobarisch (a. a. O. § 10, 5);

2. eine Invariante J genügt der Differentialgleichung:

$$a_0 \frac{\partial J}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial J}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial J}{\partial a_3} + \dots + m a_{m-1} \frac{\partial J}{\partial a_m} = 0$$

(bei letzterer Gleichung ist vorausgesetzt, dass die vorgelegte Form f, deren Coefficienten die a vorstellen, mit Binomialcoefficienten geschrieben wurde:

$$f \equiv a_0 x_1^m + \binom{m}{1} a_1 x_1^{m-1} x_2 + \dots;$$

a. a. O. § 10, 8).

Beweis des Satzes:

Es seien $C_1, C_2, \dots, C_\nu, \dots, C_k$ die Summanden (Buchstabenaggregate), aus denen sich J zusammensetzt — ohne die numerischen Coefficienten. Dann gilt für jedes C_ν der Hilfssatz 1, der sich so einkleiden lässt:

Es ist

$$\frac{\partial C_\nu}{\partial a_1} + 2 \frac{\partial C_\nu}{\partial a_2} + 3 \frac{\partial C_\nu}{\partial a_3} + \dots + m \frac{\partial C_\nu}{\partial a_m} = p$$

(p = Gewicht der Invariante), wenn man nach Vollzug der links vorgeschriebenen Operation auf das C_ν alle $a = 1$ setzt.*

---

* Beispiel. Die cubische Invariante einer Form vierter Ordnung

$$a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4$$

enthält fünf Summanden C, sämmtlich vom Gewichte 6. Die Operation

$$\frac{\partial C}{\partial a_1} + 2 \frac{\partial C}{\partial a_2} + 3 \frac{\partial C}{\partial a_3} + 4 \frac{\partial C}{\partial a_4}$$

Unter derselben Voraussetzung ist auch

$$\left[a_0 \frac{\partial C_\nu}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial C_\nu}{\partial a_2} + . \; . + m a_{m-1} \frac{\partial C_\nu}{\partial a_m}\right]_{a_0 = \dots = a_m = 1} = p.$$

Wir führen nunmehr die Zahlencoefficienten der C ein, um die es sich handelt: $c_1, c_2, \dots, c_\nu, \dots, c_k$, so dass also der Summand C_ν der Invariante J den Zahlencoefficienten c_ν besitzen soll: $J = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} c_\nu C_\nu$.

Wir erhalten zunächst einmal:

$$c_\nu \left[a_0 \frac{\partial C_\nu}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial C_\nu}{\partial a_2} + \dots + m a_{m-1} \frac{\partial C_\nu}{\partial a_m}\right]_{a_0 = a_1 = \dots = a_m = 1} = c_\nu . p$$

und durch Summation über alle ν:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=k} c_\nu \left[a_0 \frac{\partial C_\nu}{\partial a_1} + \dots\right]_{a_0 = a_1 = \dots = a_m = 1} = (c_1 + \dots + c_k) p.$$

Oder schliesslich:

$$\left[a_0 \frac{\partial \Sigma c_\nu C_\nu}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \Sigma c_\nu C_\nu}{\partial a_2} + \dots + m a_{m-1} \frac{\partial \Sigma c_\nu C_\nu}{\partial a_m}\right]_{a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_m = 1}$$
$$= (c_1 + c_2 + \dots + c_k) . p.$$

Hier verlangt nun der Ausdruck links, dass man an der Invariante J die Operation

$$a_0 \frac{\partial J}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial J}{\partial a_2} + \dots + m a_{m-1} \frac{\partial J}{\partial a_m}$$

vornehmen und schliesslich alle vorkommenden a gleich 1 setzen soll.

Aber nach dem Hilfssatze 2 ist für alle Invarianten allgemein

$$a_0 \frac{\partial J}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial J}{\partial a_2} + \dots = 0,$$

und zwar identisch. Demnach ist diese Summe auch $= 0$, wenn man nach ihrer Bestimmung nachträglich allen Coefficienten a den Werth 1 ertheilt.

Daher ist jene Summe

$$\left[a_0 \frac{\partial J}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial J}{\partial a_2} + \dots + m a_{m-1} \frac{\partial J}{\partial a_m}\right]_{a_0 = \dots = a_m = 1}$$

jedenfalls gleich 0, somit auch

$$c_1 + c_2 + \dots + c_k = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Dieser Beweis ist allgemein giltig, für Invarianten **beliebigen** Grades, von **beliebigen** Formen.

Eine ebenso einfache Ableitung des uns vorliegenden Theorems findet sich in einer Bemerkung in **Fiedler's** „Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen" Art. 18, S. 146 der ersten Ausgabe.

---

giebt (indem wir von den numerischen Coefficienten der C absehen) der Reihe nach die fünf Resultate:

$$2.a_0 a_4 + 4.a_0 a_2, \quad 1.a_2 a_3 + 2.a_1 a_2 + 3.a_1 a_2, \quad 2.3 a_2^2, \quad 3.2 a_0 a_3, \quad 1.2 a_1 a_4 + 4.a_1^2.$$

In der That verwandeln sich aber alle diese Grössen in die Zahl 6 für $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$.

Der dort benützte Gedankengang ist übrigens von dem obigen total verschieden und nur anwendbar für eine ganz bestimmte Erzeugungsweise von Invarianten, nämlich nur für die durch die Operation

$$f\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)f$$

dargestellten Invarianten. Diese Operation liefert aber bekanntlich nur die quadratischen Invarianten der Formen gerader Ordnung, also nur eine beschränkte Anzahl solcher Gebilde.

Anmerkung. Es soll übrigens nicht verschwiegen werden, dass — will man nicht die Differentialgleichung der Invarianten als bekannt voraussetzen, sondern dafür den Satz: „Alle Invarianten sind Productsummen, gebildet aus Wurzeldifferenzen" — alsdann ein ganz besonders einfacher Beweis des uns beschäftigenden Theorems existirt. (Vergl. Salmon-Fiedler, Algebra d. Transform., Art. 61, sowie auch 136.)

Denn jenem Satze entsprechend verschwindet eine Invariante jedenfalls dann, wenn die Wurzeln der zugehörigen Form sämmtlich gleich werden. Setzt man aber in der zu einer Invariante gehörigen Form

$$a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{1.2} x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n$$

alle Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gleichzeitig $=1$, so erhält man eine Form von n gleichen Wurzeln und die zugehörigen Invarianten verschwinden daher sämmtlich. Invarianten haben also allgemein die Eigenschaft, sich auf Null zu reduciren, wenn die in ihnen enthaltenen Coefficienten $a_0, \ldots, a_n$ gleichzeitig $= 1$ gesetzt werden. Dies ist aber eben unser Satz.

München. Fritz Hofmann.

XXVII. Logische Einführung der Liniencoordinaten in der Ebene.

Zweck der folgenden Zeilen ist, die Künstlichkeit zu heben, mit der die Lehrbücher der analytischen Geometrie bei Einführung der Liniencoordinaten in der Ebene zu verfahren pflegen; zugleich soll damit ein kleiner Beitrag geliefert werden zu natürlicherer und rationellerer Behandlungsweise in der Mathematik.

Punkt und Gerade sind die Fundamentalgebilde in der Ebene. Wie nun in der Descartes'schen Geometrie die Bestimmung eines Punktes durch Coordinaten die Grundlage bildet, so kann man auch die Gerade als Grundlage wählen, indem man Coordinaten für dieselbe einführt. Stellt man nämlich auf als

Definition des Coordinatenbegriffs: Unter Coordinaten eines geometrischen Gebildes versteht man eindeutige und von einander

unabhängige Bestimmungsstücke desselben in genügender Anzahl,
so hat man, da die allgemeinste Gleichung der Geraden

$$1)\qquad Ax + By + C = 0$$

drei Coefficienten, also nach Division mit einem derselben zwei von einander unabhängige Constanten enthält, für die Gerade, wie für den Punkt, zwei Bestimmungsstücke oder Coordinaten einzuführen.

Es fragt sich nun, was für Bestimmungsstücke sind zu wählen? In Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, S. 27, ist hierüber wörtlich gesagt: „Welche Bestimmungsstücke der Geraden man benutzen will, ist zunächst gleichgiltig, aber unsere weiteren Betrachtungen werden die folgende Wahl als die zweckmässigste erscheinen lassen:

Wir verstehen unter den Coordinaten u, v einer Geraden die negativen reciproken Werthe ihrer Abschnitte auf den Coordinatenaxen."

In einer ähnlichen künstlichen und jedenfalls ungenetischen Weise verfahren andere Lehrbücher. Daher wird es einem Philosophen, wie Schmitz-Dumont, keineswegs zu verargen sein, dass er in seinem Werk: „Die mathematischen Elemente der Erkenntnisstheorie", S. 295, den Descartes'schen Punktcoordinaten, die er als natürliche Coordinaten bezeichnet, die Liniencoordinaten als künstliche Coordinaten gegenüberstellt, während doch vom mathematischen Standpunkte beide vollständig gleichberechtigt sind.

Es ist zunächst nicht, und überhaupt nicht gleichgiltig, welche Bestimmungsstücke man für die Gerade einführt. Auf das Descartes'sche Coordinatensystem gründet sich in erster Linie die Bestimmung eines Punktes durch seine mit Vorzeichen behafteten Abstände von den Coordinatenaxen, d. h. durch seine Coordinaten; alsdann stellt die allgemeinste lineare Gleichung 1) in x und y eine Gerade dar und umgekehrt ist jede Gerade durch eine lineare Gleichung zwischen den Coordinaten eines auf ihr „laufenden" Punktes dargestellt. Es müssen daher auch die Coordinaten der Geraden in Beziehung auf dieses Coordinatensystem lediglich aus der Gleichung der Geraden durch logische Schlüsse sich ableiten lassen. Dies lässt sich in der That im Anschluss an die schon oben gemachten Bemerkungen über die Constanten in Gleichung 1) folgendermassen bewerkstelligen.

Da A und B als Coefficienten der beiden Veränderlichen, von denen keine vor der anderen etwas voraus hat, dieselbe Rolle spielen, so könnte man mit derselben Berechtigung die Gleichung 1) mit A oder mit B durchdividiren, man wird daher logischerweise (logisches Symmetrieprincip!) weder das Eine, noch das Andere thun, sondern man wird mit dem für sich allein stehenden Absolutglied C dividiren, wodurch man $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ als die „natürlichen" Constanten in der Gleichung der Geraden erhält;

diese sind daher naturgemäss als die Coordinaten der Geraden einzuführen.

Wie nun die Coordinaten eines veränderlichen Punktes mit x und y, der Punkt selbst als *Punkt* (x, y) bezeichnet wird, so werden die Coordinaten einer veränderlichen Geraden mit u und v, die Gerade selbst als *Gerade* (u, v) bezeichnet; x und y heissen Punktcoordinaten, u und v Liniencoordinaten. Dem Obigen gemäss hat man also:

1. Die Coordinaten u, v der Geraden

$$1)\qquad \mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{C} = 0$$

sind:

$$2)\qquad \left\{ \begin{array}{l} u = \dfrac{A}{C} \\ v = \dfrac{B}{C} \end{array} \right\}.$$

2. Die Gerade (u, v) hat die Gleichung

$$3)\qquad ux + vy + 1 = 0.$$

3. Ist in der auf Null gebrachten Gleichung einer Geraden das Absolutglied gleich $+1$, oder wird dasselbe gleich $+1$ gemacht, so sind die Coefficienten von x und y die Coordinaten der Geraden.

Nun ist hinterher die geometrische Bedeutung der rein analytisch gewonnenen Liniencoordinaten zu bestimmen. Da u nur von A und C abhängig ist, so setze man $y = 0$ in der Gleichung 1) oder 3), womit man

$$x = -\frac{C}{A} = -\frac{1}{u}$$

als Axenabschnitt der Geraden auf der x-Axe erhält; mit $x = 0$ erhält man ebenso

$$y = -\frac{C}{B} = -\frac{1}{v}.$$

Die Axenabschnitte α und β* der Geraden sind somit:

$$4)\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{1}{u} \\ \beta = -\dfrac{1}{v} \end{array} \right\}, \quad \text{woraus:} \quad 5)\quad \left\{ \begin{array}{l} u = -\dfrac{1}{\alpha} \\ v = -\dfrac{1}{\beta} \end{array} \right\};$$

also:

---

* Um eine weitere Reihe von Buchstaben in der Mathematik zu haben, in der sich häufig der Mangel an solchen fühlbar macht, schlage ich die Zeichen α, β, ... vor und belege dieselben mit den Namen *Aleph*, *Bed*, ... der hebräischen Buchstaben. An Stelle der schleppenden Ausdrucksweise „das durch die Gerade von der x-Axe abgeschnittene Stück“ kann man dann kurz und bezeichnend „das α der Geraden“, ebenso „das β der Geraden“ sagen; analog für die Ebene im Raum. Dass diese Bezeichnung nicht unzweckmässig ist, dürfte auch noch aus Folgendem einleuchten. Führt man in die Gleichung

$$\varphi(u, v) = 0$$

Geometrische Bedeutung der Liniencoordinaten. Die Coordinaten einer Geraden sind die negativen reciproken Werthe ihrer Axenabschnitte.

Ganz in derselben Weise kann man bei Einführung der Ebenencoordinaten im Raum verfahren.

Stuttgart, 17. März 1886. Prof. Dr. C. Reuschle.

XXVIII. Notiz über die Wendepunkte einer algebraischen Curve; sowie einen Satz von Clebsch aus der Theorie der Curven dritter Ordnung.

I. Ist ein Punkt x einer algebraischen Curve ein Wendepunkt, so liegt er auf der Hesse'schen Curve der vorgegebenen Curve: dies kann mit recht einfachen Hilfsmitteln direct bewiesen werden, vergl. etwa: Durège, Ebene Curven dritter Ordnung § 155.

Dass umgekehrt ein Schnittpunkt einer algebraischen Curve mit ihrer Hesse'schen Curve im Allgemeinen ein Wendepunkt der vorgegebenen Curve ist, wird in den am häufigsten gebrauchten Lehrbüchern, wenn auch streng, so doch immerhin theils indirect, theils in wenig übersichtlicher Weise bewiesen — so dass es vielleicht erwünscht erscheinen mag, jene indirecten Methoden durch einen ganz directen und somit überzeugenderen Beweisgang ersetzt zu sehen.

(Vergl. von der einschlägigen Literatur: Durège *l. c.* § 156; Salmon, Höhere ebene Curven § 74; Clebsch-Lindemann, Geometrie S. 312.)

Die nachfolgenden Bemerkungen möchten die hier fühlbare Lücke ausfüllen durch Verwendung des Gedankens: „jenen Schnittpunkt s der beiden Geraden ins Auge zu fassen, in welche die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare in Bezug auf eine Curve zerfällt, wenn sie gebildet wird für einen Schnittpunkt x jener Curve mit ihrer Hesse'schen Curve.“

Beweis.

Es sei $u_x=0$ die Gleichung einer algebraischen Curve — zu zeigen ist dann, dass, wenn ein Punkt x zugleich auf $u_x=0$ gelegen ist, wie auch auf

$$H)\qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

---

einer Curve in Liniencoordinaten vermittelst der Gleichungen 5) das α und das β ein, so erhält man für ihre Gleichung:

$$\varphi\left(-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}\right)=0 \qquad \text{oder} \qquad \psi(\alpha, \beta)=0,$$

welche neben der obigen *u, v-Gleichung* als die *α, β-Gleichung* der Curve bezeichnet werden kann. Während erstere in theoretischer Beziehung den Vorzug verdient, ist die α, β-Gleichung zur „strahlenweisen“ Berechnung einer „Strahlencurve“ (Umhüllungscurve einer Geraden) besonders geeignet.

er ein **Wendepunkt** jener vorgegebenen Curve $u_x = 0$ ist. $u_{11}\ u_{12} \ldots$ bedeutet hierbei in herkömmlicher Weise die zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \ldots$

Aus dem Verschwinden der Determinante H) schliesst man, dass sich drei **Zahlen** $z_1 z_2 z_3$ finden lassen, so dass gleichzeitig

$$A)\qquad \begin{cases} z_1 u_{11} + z_2 u_{12} + z_3 u_{13} = 0, \\ z_1 u_{21} + z_2 u_{22} + z_3 u_{23} = 0, \\ z_1 u_{31} + z_2 u_{32} + z_3 u_{33} = 0. \end{cases}$$

Indem man die Gleichungen A) successive multiplicirt mit $x_1 x_2 x_3$ resp. und addirt, erhält man nach **Euler's** Satz:

$$B)\qquad z_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + z_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \text{ kürzer } \Delta_z(u_x) = 0.$$

Und indem man ebenso successive multiplicirt mit $z_1 z_2 z_3$ resp. und addirt, erhält man

$$C)\qquad z_1^2 u_{11} + z_2^2 u_{22} + z_3^2 u_{33} + 2 z_2 z_3 u_{23} + 2 z_3 z_1 u_{31} + 2 z_1 z_2 u_{12} = 0$$

oder kürzer $\Delta_z^2(u_x) = 0$.

In der Curvengleichung, geschrieben für den beweglichen Punkt $x + \lambda z$ in der Form:

$$D)\qquad u_x + \lambda \Delta_z(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \Delta_z^2(u_x) + \ldots = 0$$

verschwinden demnach die ersten drei Glieder; und es ist aus D) direct zu entnehmen, dass es in der That durch den Punkt x gehend eine Gerade giebt, welche die Curve in drei zusammenfallenden Punkten schneidet, nämlich die Verbindungsgerade von dem Punkte x nach dem Punkte z hin, dessen Coordinaten $z_1 z_2 z_3$ sich aus den Gleichungen A) bestimmen. x **ist demnach ein Wendepunkt**, wie zu beweisen war.

In symbolischer Rechnung: aus der Existenz der Gleichungen A): $a_i a_z a_x^{n-2} = 0\ (i = 1, 2, 3)$ schliesst man nach obigen Operationen B): $a_x^{n-1} a_z = 0$ und C): $a_x^{n-2} a_z^2 = 0$, womit der Satz bewiesen ist.

II. Wir können aber diese Formeln noch weiter verwenden, um von einem Satze, der die Grundlage bildet für die Theorie des Zusammenhangs der **Hesse**'schen Curve mit der Originalcurve, eine ganz directe Ableitung zu geben*.

Indem wir die rein symbolischen Methoden verlassen, mögen im Folgenden die Zeichen $u_1, u_2, u_3, u_{11} \ldots$ die nach y genommenen Differentialquotienten der Gleichung $u = 0$ der Originalcurve bedeuten. Für einen Punkt y der **Hesse**'schen Curven, den wir aber im Nachfolgenden nicht mehr zugleich auf der Originalcurve gelegen denken, hat man dann als **Definition:**

---

* Das Nachfolgende bezieht sich speciell auf Curven dritter Ordnung.

$$E)\quad \begin{cases} z_1 u_{11} + z_2 u_{12} + z_3 u_{13} = 0, \\ z_1 u_{21} + z_2 u_{22} + z_3 u_{23} = 0, \\ z_1 u_{31} + z_2 u_{32} + z_3 u_{33} = 0, \end{cases}$$

welche drei Gleichungen erstens sichtbar machen, dass y der Hesse'schen Curve angehört, und welche uns zweitens den Schnittpunkt z jenes Linienpaares angeben, in welches die conische Polare von y zerfällt. Durch Multiplication der drei Gleichungen mit $y_1 y_2 y_3$ resp. und Addition erhält man, wie früher schon bemerkt wurde:

$$F)\quad z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3 = 0;$$

was aussagt, dass z auf der geraden Polare von y gelegen (wie auch geometrisch evident, da diese gerade Polare, als vierte harmonische Gerade eines durch z gehenden Linienpaares, jedenfalls z enthalten muss).

Wir können uns nun fragen: lassen wir den Punkt y auf der Hesse-schen Curve $H=0$ sich weiter bewegen, so dass also dabei die Gleichung:

$$\frac{\partial H}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial H}{\partial y_2}\delta y_2 + \frac{\partial H}{\partial y_3}\delta y_3 = 0$$

zwischen den unendlich kleinen Zuwächsen δy der drei Coordinaten von y besteht, welche Bedingung erfüllen dann die Veränderungen δz der Coordinaten jenes Punktes z, der, als Schnittpunkt eines Linienpaares, immer noch sich einstellen muss, so lange eben y auf der Hesse'schen Curve bleibt?

Jedenfalls müssen dann die obigen drei Gleichungen, die Definitionsgleichungen für den Zusammenhang zwischen y und z, erhalten bleiben; und wir stellen daher auf (unter ausdrücklicher Voraussetzung, dass y auf der Tangente der Hesse'schen Curve im Punkte y bleibt):

$$G)\quad \begin{cases} z_1\delta u_{11} + z_2\delta u_{12} + z_3\delta u_{13} + u_{11}\delta z_1 + u_{12}\delta z_2 + u_{13}\delta z_3 = 0, \\ z_1\delta u_{21} + z_2\delta u_{22} + z_3\delta u_{23} + u_{21}\delta z_1 + u_{22}\delta z_2 + u_{23}\delta z_3 = 0, \\ z_1\delta u_{31} + z_2\delta u_{32} + z_3\delta u_{33} + u_{31}\delta z_1 + u_{32}\delta z_2 + u_{33}\delta z_3 = 0. \end{cases}$$

Deutlicher: die Coordinaten $z_1 z_2 z_3$ sind abhängig von denen des Punktes $y: y_1 y_2 y_3$. Bei einer Aenderung der letzteren erfahren sowohl die Functionen $u_{11}, u_{22} \ldots,$ als auch die Coordinaten $z_1 z_2 z_3$ Variationen, welche alle zu berücksichtigen sind.

Indem wir die Gleichungen G) mit $z_1 z_2 z_3$ resp. multipliciren und addiren, erhalten wir (weil die letzten drei Summanden verschwinden infolge der früheren definirenden Gleichungen E) für die z):

$$z_1^2\delta u_{11} + z_2^2\delta u_{22} + z_3^2\delta u_{33} + 2z_2 z_3\delta u_{23} + 2z_3 z_1\delta u_{31} + 2z_1 z_2\delta u_{12} = 0.$$

Je nachdem man in der Bedingungsgleichung für die δy zwei der drei Variationen δy_1, δy_2, δy_3 beliebig annimmt und hierauf die dritte bestimmt, wird man ganz verschiedene Werthe für die sechs Grössen δu_{11}, δu_{22}, δu_{33}, δu_{12}, δu_{13}, δu_{23} erhalten. Aber das Gesetz, welches diese sechs Grössen dabei immer noch verbindet, ist nunmehr in der soeben erhaltenen Gleichung sichtbar geworden. —

Wir kehren zur Gleichung F) zurück, die eine bemerkenswerthe Umgestaltung zulässt. Denken wir uns die Gleichung der Curve in einer Normal-

form geschrieben: $fx_1^3+gx_2^3+hx_3^3+6ax_1x_2x_3=0$, so nehmen die drei zwischen den Punkten y und z bestehenden Gleichungen die Form an:

$$z_1.fy_1+z_2.ay_3+z_3.ay_2=0,\quad z_1.ay_3+z_2.gy_2+z_3.ay_1=0,$$
$$z_1.ay_2+z_2.ay_1+z_3.hy_3=0.$$

Stellt man nun den Ausdruck auf:

$$J)\left\{\begin{array}{l} z_1(y_1\delta u_{11}+y_2\delta u_{12}+y_3\delta u_{13})+z_2(y_1\delta u_{21}+y_2\delta u_{22}+y_3\delta u_{23}) \\ \qquad +z_3(y_1\delta u_{31}+y_2\delta u_{32}+y_3\delta u_{33})=0,\end{array}\right.$$

so können bei Benutzung obiger Normalform die Werthe von δu_{11}, δu_{22}, δu_{33}; δu_{32}, δu_{31}, δu_{12} direct gebildet werden. Sie sind aus den vorhergehenden drei Gleichungen, welche die Functionen u_{11}, u_{22}, u_{33}; u_{23}, u_{31}, u_{12} ausgerechnet enthalten, zu erkennen als: $\delta u_{11}=f\delta y_1$; $\delta u_{22}=g\delta y_2$; $\delta u_{33}=h\delta y_3$; $\delta u_{12}=\delta u_{21}=a\delta y_3$; $\delta u_{13}=\delta u_{31}=a\delta y_2$; $\delta u_{23}=\delta u_{32}=a\delta y_1$.

Führt man diese Werthe in die soeben gebildete Summe J) ein, so erhält man, nachdem man nach δy_1, δy_2, δy_3 geordnet hat:

$$J)\left\{\begin{array}{l} (z_1.fy_1+z_2.ay_3+z_3.ay_2)\delta y_1+(z_1.ay_3+z_2.gy_2+z_3.ay_1)\delta y_2 \\ \qquad +(z_1.ay_2+z_2.ay_1+z_3.hy_3)\delta y_3.\end{array}\right.$$

Jeder einzelne Summand verschwindet hier identisch, nach den aufgestellten drei Gleichungen für z. Daher schliesst man, dass allgemein:

$$J)\quad z_1(y_1\delta u_{11}+y_2\delta u_{12}+y_3\delta u_{13})+z_2(y_1\delta u_{21}+y_2\delta u_{22}+y_3\delta u_{23})$$
$$+z_3(y_1\delta u_{31}+y_2\delta u_{32}+y_3\delta u_{33})=0.$$

Nun können wir aber obige Gleichungen G), welche aus der Existenz eines neuen Doppelpunktes $z+\delta z$ für das neue $y+\delta y$ zu folgern waren, auch multipliciren mit $y_1y_2y_3$ resp., und erhalten durch Addition:

$$u_1\delta z_1+u_2\delta z_2+u_3\delta z_3+z_1(y_1\delta u_{11}+y_2\delta u_{12}+y_3\delta u_{13})$$
$$+z_2(y_1\delta u_{21}+y_2\delta u_{22}+y_3\delta u_{23})+z_3(y_1\delta u_{31}+y_2\delta u_{32}+y_3\delta u_{33})=0.$$

Die Summe der drei letzten Glieder verschwindet zufolge der Gleichung J): daher:

$$u_1\delta z_1+u_2\delta z_2+u_3\delta z_3=0.$$

Dies ist nun nichts Andres, als die Tangente an die Hesse'sche Curve im Punkte z. Denn z lag *a priori* auf der Hesse'schen Curve; und durch die Umänderung des ursprünglichen y in ein ebenfalls auf der Hesse'schen Curve liegendes $y+\delta y$ bleibt z jedenfalls auf der Hesse'schen Curve gelegen, auch bei Umwandlung seiner Coordinaten in $z+\delta z$. Obige Gleichung gilt nun gerade für die unendlich kleinen Zuwächse der Coordinaten des auf der Hesse'schen Curve gelegenen Nachbarpunktes $z+\delta z$; muss daher in der That identisch sein mit der Gleichung der Tangente der Hesse'schen Curve im Punkte z.

Nun sind aber $u_1u_2u_3$ die Coordinaten der geraden Polaren des Punktes y in Bezug auf die Originalcurve; daher fällt jene Tangente mit der Polaren des Punktes y zusammen. Also:

„Für jeden Punkt y der Hesse'schen Curve ist die gerade Polare

$$x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0$$

in Bezug auf die Originalcurve identisch mit der Tangente

$$\frac{\partial H}{\partial z_1}x_1 + \frac{\partial H}{\partial z_2}x_2 + \frac{\partial H}{\partial z_3}x_3 = 0$$

im entsprechenden Punkte z der Hesse'schen Curve an diese letztere Curve. Wenn also y und z einander entsprechen, so herrscht die Relation:

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\partial H}{\partial z_1} : \frac{\partial H}{\partial z_2} : \frac{\partial H}{\partial z_3}.\text{“}$$

Dies war der Satz, den wir uns vorgesetzt hatten zu beweisen. (Vergl. Salmon, höhere eb. Curven, art. 179; Durège, ebene Curv. III. Ordn., art. 459.)

Oder mit anderen Worten: sind y und z einander zugeordnet durch den Verein der Gleichungen E):

$$z_1 u_{11} + z_2 u_{12} + z_3 u_{13} = 0,\quad z_1 u_{21} + z_2 u_{22} + z_3 u_{23} = 0,\quad z_1 u_{31} + z_2 u_{32} + z_3 u_{33} = 0,$$

so sind die Gleichungen:

$$H_1 \delta y_1 + H_2 \delta y_2 + H_3 \delta y_3 = 0 \text{ und}$$
$$u_1 \delta z_1 + u_2 \delta z_2 + u_3 \delta z_3 = 0$$

gleichzeitig erfüllt, sind sich äquivalent. Hierbei ist gedacht, dass man sich den entsprechenden Punkt zu $y + \delta y$ verschafft hat auf der Hesse'schen Curve in der Nachbarschaft von z, nämlich $z + \delta z$.

Wir wollen, um wieder auf unsere Wendepunkte zu kommen, eine Anwendung des Vorhergehenden machen auf den Fall, wo y auf der Originalcurve gewählt wird (während es, wie immer, zugleich auf der Hesse'schen Curve liegt). Alsdann fällt seine gerade Polare in Bezug auf die Originalcurve zusammen mit der Wendetangente, und auf ihr liegt z selbst. Demnach kann man sagen: „die Hesse'sche Curve wird berührt von der Verbindungsgeraden eines Wendepunktes y mit seinem auf der Hesse'schen Curve ihr entsprechenden Punkte z, oder: sie wird berührt von der Wendetangente selbst und zwar im Punkte z.“ (Vergl. Clebsch, Ueber die Wendepunkte etc., Crelle Bd. 58.)

München, Herbst 1886. Fritz Hofmann.

XXIX. Auflösung der Congruenz $x^2 \equiv r \pmod N$.

Um die Congruenz $x^2 \equiv r \pmod N$, wobei N eine Primzahl ist, aufzulösen, kann man bekanntlich in dem Falle, wenn N die Form $4n + 3$ hat, durch wiederholtes Potenziren zu der Congruenz $r^{2n+1} \equiv 1 \pmod N$ und von dieser zu der neuen r^{2n+2} oder $(r^{r+1})^2 \equiv r \pmod N$ gelangen, so dass $x \equiv r^{n+1} \pmod N$ die Lösung für die vorgesetzte Congruenz ist. Hat N die Form $8n + 5$, so tritt der Uebelstand auf, dass man entweder $(r^{n+1})^2 \equiv + r$ oder $- r \pmod N$ erhält und in letzterem Falle die Rechnung vergeblich gemacht hat, wenn man nicht etwa schon die Congruenz $x^2 \equiv - 1 \pmod N$ kennt. Ist endlich N von der Form $8n + 1$, so gelingt das Verfahren nur dann, wenn für den ungeraden Factor q in $N - 1$ die Congruenz $r^q \equiv 1 \pmod N$ besteht.

In allen übrigen Fällen hat man bisher das Ausschliessungsverfahren von Gauss (Disqu. arithm.) oder das Verfahren von Desmarest (Théorie des nombres par E. Desmarest) befolgt; beide Methoden erfordern jedoch bei einigermassen grossen Moduln viel Zeit und geben leicht zu Versehen Anlass. Auch hier bietet sich nun in dem von mir angegebenen Verfahren, Zahlen zu analysiren, ein bequemerer und sicherer Weg dar, wenn man das in Heft 5 dieser Zeitschrift enthaltene Ergebniss beachtet, dass man die einzelnen Primzahlen p als Determinanten oder als quadratische Reste von N erhält, wenn N eine Primzahl ist. Ein Beispiel wird zum Nachweise genügend sein. Ich hatte die Aufgabe gestellt, die Congruenz $x^2 \equiv 41 \ (mod\, 120097)$ zu lösen.

Setzt man $N = 120097 = (346-\alpha)^2 + (692-\alpha)\,\alpha + 381$, so hat man

$$\alpha = 2^3 y + 1, 3, 5, 7;\ \ 2^4 y + 1, 3, 9, 11;\ \ 2^5 y + 9, 11, 25, 27;$$
$$2^6 y = 9, 11, 41, 43.$$
$$\alpha = 3y + 0, 2;\ \ 3^2 y + 3, 5;\ \ 3^3 y + 21, 23;\ \ 3^4 y + 50, 75.$$
$$\alpha = 13 y + 4, 12;\ \ 13^2 y + 56, 129.$$
$$\alpha = 17 y + 3, 9;\ \ 17^2 y + 173, 230.$$
$$\alpha = 19 y + 10, 17;\ \ 19^2 y + 112, 219.$$
$$\alpha = 41 y + 11, 25;\ \ 41^2 y + 763, 1610.$$

Bezeichnet man $(692-\alpha)\,\alpha + 381$ mit b, so ist für

1)	$\alpha = 11$,	$b = 3.41.8^2$,	$D = -3.41$,
2)	$\alpha = 9$,	$b = 2.13.17.8^2$,	$D = -2.3.17$,
3)	$\alpha = 3$,	$b = 17.12^2$,	$D = -17$,
4)	$\alpha = 17$,	$b = 3.13.19.4^2$,	$D = -3.13.19$,
5)	$\alpha = -9$,	$b = -2.3.13.19.2^2$,	$D = +2.3.13.19$,
6)	$\alpha = 173$,	$b = 2.3.13.34^2$,	$D = -2.3.13$,
7)	$\alpha = 219$;	$b = 2.228^2$;	$D = -2$.

Nr. 1, 2, 3, 7 liefern eine Darstellung von μN mit der Det. 41. Man hat nämlich

$$1)\ 335^2 + 3.41.8^2 = N,$$
$$2)\ 337^2 + 2.3.17.8^2 = N,$$
$$3)\ 343^2 + 17.12^2 = N,$$
$$4)\ 127^2 + 2.228^2 = N,$$

und erhält, indem man jede Grundzahl eines Quadrates, die grösser als N ist, durch dieses reducirt

$$61198^2 - 41.38744^2 = \mu N.$$

Nun setze man

$$120097x + 6119 = 38744y$$

und

$$(120097x + 6119)^2 - 41.38744^2 = \mu' N,$$

so lässt sich die letzte Gleichung durch 38744^2 dividiren und man hat schliesslich

$$(\pm 13036)^2 \equiv 41 \ (mod\, 120097).$$

Uebrigens hätte die Rechnung schon bei 5) abgebrochen werden können, da 4) und 5) bereits die Det. -2 liefern.

Dass dies Verfahren sich auch mit Vortheil dann anwenden lässt, wenn r und N zusammengesetzte Zahlen sind, liegt klar zu Tage.

Mit dieser Lösungsweise der Congruenz $x^n \equiv r \ (mod\ N)$ ist zugleich die Lösung der Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Unbekannten überhaupt vereinfacht, da die Auflösung jener Congruenz ja die Grundlage hierfür ist.

Bremen, im Juli 1886. P. Seelhoff.

XXX. Die Zahlen von der Form $k.2^n+1$.

Ich habe das Verfahren, wie ich es in dem in Heft 5 dieser Zeitschrift enthaltenen ersten Aufsatze angab, benutzt, um die Zahlen von der Form $k.2^n+1$ zu untersuchen, und erlaube mir aus den Resultaten die grösseren Primzahlen, sowie für einige jener Zahlen die Factoren anzugeben. Für k sind sämmtliche Primzahlen von 3 bis 97 benutzt, für n ist als obere Grenze 30 genommen, bei einigen kleineren Werthen von k ist diese Grenze überschritten worden. Für $k=3m+1$ ist n gerade, für $k=3m+2$ ist es ungerade, für $k=3$ ist es gerade und ungerade.

Primzahlen sind:

$3.2^{30}+1=3221225473$,	$5.2^{25}+1=167772161$,
$5.2^{39}+1=2748779069441$,	$7.2^{26}+1=469762049$,
$7.2^{50}+1=7881299347898369$,	$11.2^{21}+1=23068673$,
$13.2^{20}+1=13631489$,	$13.2^{28}+1=3489660929$,
$17.2^{27}+1=2281701377$,	$19.2^{22}+1=79681777$,
$19.2^{26}+1=1275068417$,	$23.2^{29}+1=12348030977$,
$29.2^{27}+1=3892314113$,	$37.2^{22}+1=155189249$,
$37.2^{26}+1=2483027969$,	$41.2^{19}+1=21495809$,
$41.2^{25}+1=1375731713$,	$43.2^{18}+1=11272193$,
$43.2^{26}+1=2885681153$,	$53.2^{19}+1=111149057$,
$59.2^{27}+1=7918845953$,	$67.2^{20}+1=70254593$,
$71.2^{23}+1=595591169$,	$71.2^{27}+1=9529458689$,
$73.2^{24}+1=1224736769$,	$73.2^{30}+1=78383153153$,
$89.2^{21}+1=186646529$,	$97.2^{20}+1=101711873$.

Theilbar sind: $7.2^{36}+1$ durch 166609, $7.2^{42}+1$ durch 708493, $7.2^{44}+1$ durch 8803, $7.2^{46}+1$ durch 1329241, $11.2^{27}+1$ durch 4271, $13.2^{26}+1$ durch 2129, $17.2^{23}+1$ durch 9871, $29.2^{25}+1$ durch 13709, $37.2^{30}+1$ durch 60169, $41.2^{23}+1$ durch 2677, $61.2^{21}+1$ durch 2207, $67.2^{18}+1$ durch 1153, $67.2^{22}+1$ durch 1471, $67.2^{30}+1$ durch 4691, $89.2^{27}+1$ durch 1201, $97.2^{23}+1$ durch 3449, $97.2^{28}+1$ durch 997.

Bremen, im Juli 1886. P. Seelhoff.

XXXI. Ein Minimumproblem.

II.

Im ersten Hefte dieses Jahrgangs wurde in Bezug auf Flächen, deren Gleichung homogen ist, von mir nachgewiesen, dass diejenige Berührungsebene, deren Tangentialpunkt zugleich der Schwerpunkt des Dreiecks ist, in welchem sie die Coordinatenebenen (diese beliebig als schiefwinkliges oder rechtwinkliges System vorausgesetzt) schneidet, vom Trieder der Coordinaten ein Minimaltetraeder abschneidet. Ich beabsichtige nunmehr die allgemeine Giltigkeit dieser Relation für beliebige Flächen nachzuweisen.

Unter denselben übrigen Voraussetzungen wie damals haben wir das Minimum des Tetraedervolumens

$$V = {}^1/_6 \frac{(px+qy+rz)^3}{pqr} \sin\gamma \sin i \quad \text{zu ermitteln,}$$

wo $\varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer beliebigen Fläche, (x, y, z) der Tangentialpunkt, $p = D_x\varphi$, $q = D_y\varphi$, $r = D_z\varphi$ ist.

Wir haben also:

$$1)\qquad \begin{cases} pD_z V - rD_x V = 0, \\ qD_z V - rD_y V = 0 \end{cases}$$

zu setzen.

Der Kürze wegen sei $px+qy+rz = S$, $pqr = P$, $\frac{6P^2}{S^2 \sin\gamma \sin i} = m$.

Dann ergiebt die Differentiation des obigen Ausdrucks für V nach den drei Variabeln:

$$2)\qquad \begin{cases} mD_x V = 3PD_x S - SD_x P, \\ mD_y V = 3PD_y S - SD_y P, \\ mD_z V = 3PD_z S - SD_z P. \end{cases}$$

Es ist aber:

$$3a)\qquad \begin{cases} D_x S = p + xD_x p + yD_x q + zD_x r, \\ D_y S = q + xD_y p + yD_y q + zD_y r, \\ D_z S = r + xD_z p + yD_z q + zD_z r, \end{cases}$$

und

$$3b)\qquad \begin{cases} D_x P = qrD_x p + prD_x q + pqD_x r, \\ D_y P = qrD_y p + prD_y q + pqD_y r, \\ D_z P = qrD_z p + prD_z q + pqD_z r. \end{cases}$$

Wird

$$\begin{aligned} qr(2px - qy - rz) &= A, \\ pr(2qy - px - rz) &= B, \\ pq(2rz - px - qy) &= C \end{aligned}$$

gesetzt, so gehen nach Substitution der Werthe 3a) und 3b) in 2), letztere Gleichungen über in:

$$4)\quad \begin{cases} D_x V = m(3p^2qr + AD_xp + BD_xq + CD_xr), \\ D_y V = m(3pq^2r + AD_yp + BD_yq + CD_yr), \\ D_z V = m(3pqr^2 + AD_zp + BD_zq + CD_zr). \end{cases}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in 1) erlangen wir:

$$5)\quad \begin{cases} A(rD_xp - pD_zp) + B(rD_xq - pD_zq) + C(rD_xr - pD_zr) = 0, \\ A(rD_yp - pD_zp) + B(rD_yq - qD_zq) + C(rD_yr - qD_zr) = 0, \end{cases}$$

welchen Gleichungen durch

$$A = B = C = 0$$

oder

$$qy + rz = 2px,$$
$$px + rz = 2qy,$$

und die hieraus ableitbare

$$px + qy = 2rz,$$

d. h. durch

$$px = qy = rz$$

genügt wird. Das Weitere stimmt mit dem in dem früheren Aufsatze Erörterten überein.

Es ist also allgemein richtig, dass von jedem eine Fläche schneidenden Trieder diejenige Berührungsebene der Fläche ein Minimaltetraeder (Tetraeder von kleinstem Inhalt) abschneidet, welche jener zu Anfang genannten Bedingung genügt.

Als Beispiel möge das Paraboloid

$$\varphi = ax^2 + by + cz + d = 0$$

dienen, für welches $xD_x\varphi = 2ax^2$, $yD_y\varphi = by$, $zD_z\varphi = cz$ ist, so dass $2ax^2 = by = cz$ wird. In Verbindung mit der Flächengleichung wird hier $x_0 = \sqrt{\frac{d}{5a}}$, $y_0 = \frac{2d}{5b}$, $z_0 = \frac{2d}{5c}$ und das Volumen des Minimaltetraeders: $\frac{18}{25\sqrt{5}} \cdot \frac{d^2\sqrt{d}}{bc\sqrt{a}} \sin\gamma \sin i$.

Liegnitz. Dr. O. Bermann.

XXXII. Zur Entartung einer Fläche zweiter Ordnung.

Die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Punktkoordinaten sei:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3;\ a_{ik} = a_{ki})$$

und in der Determinante $|a_{ik}|$ der Coefficienten werde die Adjuncta von a_{ik} durch α_{ik} ausgedrückt; dann ist die Gleichung derselben Fläche in Ebenencoordinaten:

$$\Sigma \alpha_{ik} \xi_i \xi_k = 0.$$

Besteht die Fläche zweiter Ordnung aus zwei Ebenen, so muss diese letztere Gleichung identisch verschwinden, was zehn Gleichungen zu erfordern scheint. Da aber drei Gleichungen nothwendig und hinreichend sind, eine Fläche zweiter Ordnung entarten zu lassen (Schlömilch, Anal. Geom. § 38), so ist hier, wie häufig (Clebsch, Binäre Formen S. 91 und 163), eine Ueberzahl von Bedingungen vorhanden, deren Reduction mit Hilfe der Kronecker-schen Subdeterminanten-Relationen gelingt.

Setzt man in der Identität (Pasch, diese Ztschr. XXVII S. 123):

$$\left| a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \sum_{i=1,2,3} a_{1i} v_i \right| = 0,$$

$$v_1 = a_{42} - a_{43}, \quad v_2 = a_{43} - a_{41}, \quad v_3 = a_{41} - a_{42},$$

so ist

$$\Sigma a_{4i} v_i = 0$$

und

$$\Sigma a_{ki} v_i = \Sigma \pm a_{k1} a_{42} + \Sigma \pm a_{k2} a_{43} + \Sigma \pm a_{k3} a_{41},$$

$$\alpha_{14} \Sigma a_{1i} v_i - \alpha_{24} \Sigma a_{2i} v_i + \alpha_{34} \Sigma a_{3i} v_i = 0,$$

d. h. je drei Adjuncten einer Zeile sind durch eine Gleichung verbunden, deren Coefficienten Summen von Subdeterminanten zweiten Grades sind. Sind die letzteren nicht sämmtlich Null, so verschwinden mit zwei Adjuncten einer Zeile sämmtliche Adjuncten derselben Zeile, also mit drei nicht derselben Zeile entnommenen unter Berücksichtigung der Symmetrie alle Adjuncten α_{ik} der Determinante $|a_{ik}|$. Statt dreier Adjuncten kann man auch die Hauptdeterminante $|a_{ik}|$ und zwei Diagonaladjuncten verschwinden lassen, unter Berücksichtigung der dann bestehenden Gleichung (Baltzer, Det. § 7, 3):

$$\alpha_{ii} \alpha_{kk} - \alpha_{ik}^2 = 0.$$

Eine Fläche zweiter Ordnung artet also in zwei Ebenen aus, wenn entweder ihre Determinante und zwei Diagonaladjuncten, oder drei nicht derselben Zeile angehörige Adjuncten verschwinden (vergl. diese Ztschr. XXIX S. 374).

Sollen die zwei Ebenen zusammenfallen, so müssen alle Subdeterminanten zweiten Grades verschwinden, das sind 21 Gleichungen statt der erforderlichen sechs. Da auch hier eine entsprechende Beziehung zwischen drei Subdeterminanten einer Zeilencombination besteht, z. B.:

$$(a_{31} - a_{32})(a_{11} a_{22} - a_{12}^2) - (a_{21} - a_{22})(a_{12} a_{32} - a_{12} a_{31}) + (a_{11} - a_{12})(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) = 0,$$

so verschwinden mit zwei Subdeterminanten einer Zeilencombination alle Subdeterminanten derselben Zeilencombination, vorausgesetzt, dass nicht

alle Elemente einer Colonne den entsprechenden einer anderen Colonne gleich sind. In der That genügen also sechs beliebig, aber nie drei aus einer Zeilencombination, gewählte Subdeterminanten zweiten Grades, um alle Subdeterminanten verschwinden zu machen. Statt dessen kann man auch, analog dem obigen, wählen:

$$|a_{ik}| = a_{11} = a_{44} = \Sigma \pm a_{11} a_{22} = \Sigma \pm a_{22} a_{33} = \Sigma \pm a_{33} a_{44} = 0.$$

Berlin. A. THAER.

Berichtigungen.

Im 5. Hefte dieser Zeitschrift Seite 259 ist nach der 10. Zeile des auf U. s. w. folgenden Absatzes einzuschalten „ohne die Absolutglieder". Seite 264 Zeile 12 v. u. statt „den Gleichungen" zu lesen „der Gleichung". Seite 271 in Gleichung XIX die drei Minuszeichen durch Pluszeichen zu ersetzen.

Seite 294 Zeile 11 v. u. lies $= x'_1$ statt $= 0$.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXXI. Jahrgang.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1886.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik.

Arithmetik, Algebra, Analysis.

Synthetische, analytische, descriptive Geometrie, Geodäsie.

Mechanik und Physik.

Historisch-literarische Abtheilung.

Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes und Hero.

Von

C. Demme.

Hierzu Taf. I Fig. 17 und 18.

I.

Im XXVII. Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik (Supplement zur historisch-literarischen Abtheilung) stellt Günther in seiner Abhandlung über die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden* das auf diese Frage bezugnehmende Material auf Grund einer sorgfältigen kritischen Musterung zusammen, um den Leser in den Stand zu setzen, sich selbst darüber ein Urtheil zu bilden, welche Art und Weise der Ausziehung der Quadratwurzeln als die für das Alterthum natürlichste und damit wahrscheinlichste betrachtet werden könne. Es liegt in der Natur der Sache, dass den Verfasser einer solchen Arbeit die verschiedenen Methoden, je nachdem sie ihm selbst mehr oder weniger wahrscheinlich erscheinen, verschieden ansprechen und es darf uns deshalb nicht Wunder nehmen, wenn ihm die Methode am meisten zusagt, bei welcher nur „der einfachste, ja alltäglichste Apparat zur Anwendung gebracht wird, dessen sich die antike Zahlentheorie in sehr vielen andern zu unserer Kenntniss gelangten Fällen bediente“.** Es ist hiermit die Methode von P. Tannery gemeint, der in letzter Zeit besonders die bei Archimedes und Hero vorkommenden Näherungswerthe für quadratische Irrationalitäten wiederholt untersucht und bearbeitet hat. Tannery's Grundgedanke ist nach Günther folgender:** Archimedes kannte ein unserer modernen Methode ganz ähnliches Extractionsverfahren, um sich zunächst einen brauchbaren Näherungswerth der vorgelegten Quadratwurzel zu verschaffen. In den meisten Fällen blieb er bei dieser ersten Annäherung stehen. Bei $\sqrt{3}$ genügte ihm dieselbe jedoch nicht, vielmehr bediente er

* In der Folge nur als „Günther“ angeführt.

** Günther, S. 87.

sich jenes Verfahrens in diesem Falle nur, um eine erste Lösung der beiden Gleichungen $p^2 - 3q^2 = 1$, $p^2 - 3q^2 = -2$ zu bekommen, und nun verfügte er über eine neue, selbständige Methode, welche ihm zu diesen ersten Lösungen eine beliebige Vielzahl weiterer Lösungen hinzuzufinden lehrte, wodurch er also Näherungswerthe von grösserer Genauigkeit erhielt.

Für diesen zweiten Theil der Arbeit können nach Tannery zwei verschiedene Wege eingeschlagen werden, von denen der eine auf einer indirecten Kettenbruchentwickelung beruht; wir wenden uns deshalb gleich zur Betrachtung des nach Günther vorzuziehenden zweiten Weges. Tannery findet nämlich*, indem er eine Auflösung der Gleichung $p^2 - aq^2 = r$ nach Diophant's Muster versucht, dass man annehmen könne, zur Auflösung der eben genannten Gleichung sei von den Substitutionen

$$p_1 = \alpha p + \beta q, \quad q_1 = \gamma p + \delta q$$

ausgegangen worden.

Es genügt, zur Bestimmung von α, β, γ und δ die drei Gruppen der einfachsten Lösungen zu kennen und zwei Paar Gleichungen vom ersten Grade mit zwei Unbekannten aufzulösen. Für den speciellen Fall $p^2 - 3q^2 = 1$ brauchte man nur die durch Versuch leicht zu beschaffenden drei einfachsten Lösungen

$p = 1$	2	7
$q = 0$	1	4

zu kennen und fand denn die 4 Coefficienten $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$, $\delta = 2$, mit deren Hilfe die Herleitung aller weiteren Näherungswerthe von $\sqrt{3}$ ohne jede Schwierigkeit erfolgen konnte.

Mir will es erscheinen, als ob diese Herleitung dem altgriechischen Geiste nicht recht angepasst sei, da ich glaube, dass die erste Gruppe der Lösungen $p = 1$, $q = 0$ eine für einen Archimedes unfassbare war.**

Schon vor dem Erscheinen der Tannery'schen Abhandlung hatte Zeuthen*** der Berechnung der Näherungswerthe von $\sqrt{3}$ ebenfalls die Lösung der Gleichungen $x^2 - 3y^2 = 1$, $x^2 - 3y^2 = -2$ zu Grunde gelegt.

Die erste dieser Gleichungen wird von ihm auf die Identität

$$3(2mn)^2 + (m^2 - 3n^2)^2 = (m^2 + 3n^2)^2,$$

die zweite auf die Identität

$$(m + 3n)^2 - 3(m + n)^2 = -2(m^2 - 3n^2)$$

zurückgeführt. Hatte man für $m^2 - 3n^2 = 1$ eine Lösung, so waren die neuen Werthe nach der ersten Identität

* Günther, S. 89.

** Man vergleiche: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik von M. Cantor, S. 107 und 144.

*** Günther, S. 90.

$$m_1 = m^2 + 3n^2$$
$$n_1 = 2mn$$

und nach der zweiten

$$m_1 = m + 3n$$
$$n_1 = m + n.$$

Nach Günther's Urtheil zeichnet sich diese Methode durch Einfachheit und Natürlichkeit aus, wogegen derjenigen Tannery's der hohe Vorzug zukomme, überhaupt auf jede Diophantische Gleichung von der Form $x^2 - py^2 = r$ anwendbar zu sein.

Ich muss gestehen, so einfach finde ich Zeuthen's Methode gerade nicht; denn er findet z. B. mit Hilfe der ersten Identität den Archimedischen Werth $\frac{1351}{780}$ überhaupt nicht, und mit Hilfe der zweiten Identität $\frac{265}{153}$ als sechsten und $\frac{1351}{780}$ sogar erst als neunten Werth.

Einen zweiten Ausgangspunkt* für seine Untersuchungen fand Tannery in den Relationen $\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a}$, $\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a+1}$, wobei er sich dann auf die Anbringung ganz einfacher und naheliegender Verbesserungen an diesen primären Näherungswerthen beschränkt.

Allein so bequem und elegant auch einige Heronische Werthe nach ihnen ihre Erklärung finden würden, so kann ich doch nach der neuesten Arbeit von Schönborn (im 3. Heft des vorigen Jahrganges dieser Zeitschrift) an einen Gebrauch der obigen Formeln nicht glauben. Schönborn theilt nämlich einige Aufgaben aus Diophant's ἀϱιϑμητικά mit. Bei der ersten Aufgabe handelt es sich darum, 13 in zwei Quadrate, deren jedes grösser als 6 ist, zu zerlegen. Diophant halbirt 13 und sucht einen Bruch, der zu $\frac{13}{2}$ addirt, die Summen zu einem Quadrate macht, das heisst nach moderner Ausdrucksweise: er sucht einen Näherungswerth für $\sqrt{\frac{13}{2}}$. Er setzt $\sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$, macht also den Nenner durch Erweitern rational. Bei einer zweiten Aufgabe handelt es sich darum, 10 in die Summe dreier Quadrate zu zerlegen, deren jedes grösser ist als 3. Da der dritte Theil von $10 = 3\frac{1}{3}$ ist, so würde es sich hier um einen Näherungswerth von $\sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{30}$ handeln. Sowohl $\sqrt{26}$ als auch $\sqrt{30}$ würden nach der Formel $\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a}$ die bei Diophant vorkommenden Resultate ($\sqrt{26} = 5\frac{1}{10}$ und $\sqrt{30} = 5\frac{1}{2}$) ergeben; allein Diophant gebraucht eine solche Formel nicht, setzt vielmehr $\sqrt{26} \sim \sqrt{\frac{26x^2+1}{x^2}}$ und $\sqrt{30} \sim \sqrt{\frac{30x^2+1}{x^2}}$ und bestimmt x so, dass sowohl $26x^2+1$ als auch $30x^2+1$ Quadratzahlen werden. Er findet im ersten Falle $x = 10$ und im zweiten Falle $x = 4$, wodurch sich $\sqrt{26} = \frac{51}{10}$ und $\sqrt{30} = \frac{11}{2}$ er-

* Günther, S 118.

giebt. Sehr beachtenswerth findet hierbei Schönborn das Rationalmachen des Nenners. Aber auch in der weiteren Behandlung der beiden obigen Aufgaben tritt bei Diophant das Bestreben hervor, das Rechnen mit Brüchen möglichst zu vermeiden. Schönborn findet es unwahrscheinlich, dass Diophant eine Scheu vor Brüchen gehabt habe und meint, dass die Schwierigkeit gehoben sei, wenn man annimmt, dass Diophant hier alte Methoden der Berechnung irrationaler Quadratwurzeln verwendet habe. Ist dies aber der Fall, so kann man daraus, dass Diophant bei so einfachen Fällen wie $\sqrt{26}$ und $\sqrt{30}$ die Resultate nicht nach der Formel $\sqrt{a^2+b} \backsim a + \frac{b}{2a}$, obwohl sie ihr entsprechen würden, sondern auf einem viel umständlicheren Wege findet, schliessen, dass die Formel dem Diophant und demnach wohl auch seinen Vorgängern nicht bekannt gewesen sei.

Den Schlussfolgerungen jedoch, die Schönborn hieraus und aus der weiteren Behandlung der Diophantischen Aufgaben zieht, kann ich nicht überall beistimmen. So behandelt z. B. Schönborn ganz nach Diophantischem Muster: $\sqrt{58\tfrac{7}{16}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{935}$ Aus $935x^2 + 1 = (31x - 1)^2$ folgt $x = \tfrac{31}{13}$, mithin $\sqrt{935} \backsim 31 - \tfrac{13}{31} = 30\tfrac{18}{31}$; $\tfrac{1}{4}\sqrt{935} \backsim 7\tfrac{20}{31} \backsim 7\tfrac{2}{3}$.

Bei Diophant kommen für x nur ganze Zahlen vor. Die Ausdehnung auf gemischte Werthe scheint mir hier nicht unbedenklich, zumal das Heronische Resultat doch nicht erreicht wird.

Als einer der wenigen ganz genauen Heronischen Werthe wird von Günther* $\sqrt{167\tfrac{1}{169}} = 12\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{78}$ angeführt. Verwandelt man den Radicanden in einen Quotienten, so erhält man

$$\sqrt{167\tfrac{1}{169}} = \sqrt{\frac{167.169+1}{169}} = \sqrt{\frac{167.13^2+1}{13^2}},$$

einen Ausdruck, der in der Form vollständig mit den bei Diophant vorkommenden $\sqrt{30} \backsim \sqrt{\frac{30x^2+1}{x^2}}$ und $\sqrt{26} \backsim \sqrt{\frac{26x^2+1}{x^2}}$ übereinstimmt. Da sowohl $30x^2+1$, als auch $26x^2+1$ ein vollständiges Quadrat sein soll, so müssen $30x^2$ und $26x^2$ von der Form $a^2 - 1$ sein, sich also in $(a+1)$ $(a-1)$ zerlegen lassen, welcher Form ja auch das Product 167.169 entspricht, so dass wir als erste der Grundformen der Reducirung hätten: $\sqrt{\frac{(a+1)(a-1)}{b^2}} < \frac{a}{b}$. Schreibt man hierfür

$$\sqrt{\frac{c(c \pm 2)}{b^2}} = \sqrt{\frac{c^2 \pm 2c}{b^2}} < \frac{c \pm 1}{b},$$

woraus dann

$$\sqrt{\frac{c^2}{b^2} \pm \frac{2c}{b^2}} < \frac{c}{b} \pm \frac{1}{b}$$

---

* Günther, S. 110.

folgt, und setzt man $\frac{c}{b} = m$, so wird $\sqrt{m^2 \pm \frac{2m}{b}} < m \pm \frac{1}{b}$. Setzt man nunmehr $\frac{2m}{b} = s$, so wird $\frac{1}{b} = \frac{s}{2m}$ und $\sqrt{m^2 \pm s} < m \pm \frac{s}{2m}$.

Den Zusammenhang dieser letzten Formel mit der Diophantischen Lösung der oben erwähnten Aufgaben hat Schönborn in seinem Aufsatze hervorgehoben, indem er angiebt, dass zur Bestimmung des x in den Ausdrücken $30x^2 + 1 = (5x + 1)^2$ und $26x^2 + 1 = (5x + 1)^2$, wobei $30 = 5^2 + 5$ und $26 = 5^2 + 1$, oder allgemein bei $(A^2 \pm B)x^2 + 1 = (Ax \pm 1)^2$ die Gleichung $x = \frac{2A}{B}$ diene, woraus dann $\sqrt{A^2 \pm B} < A \pm \frac{B}{2A}$ folge. Nach Schönborn besteht hierbei nur die Bedingung $x > 1$; nach meiner Ansicht muss, wie schon oben bemerkt, entsprechend den Diophantischen Beispielen x auch eine ganze Zahl sein. Da dies aber nicht immer zu ermöglichen war, so konnte naturgemäss auch nur eine beschränkte Anwendung der Formel

$$\sqrt{a} = \sqrt{\frac{ax^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{m^2 - 1}{p^2}} = \sqrt{\frac{(m+1)(m-1)}{p^2}} < \frac{m}{p}$$

stattfinden.

Vor allen Dingen war sie bequem bei Radicanden, die nur um eine Einheit von einer Quadratzahl verschieden waren. Hier brauchte man für x^2 nur das Vierfache der benachbarten Quadratzahl zu nehmen. So hat man z. B. bei $\sqrt{26}$ $x^2 = 100$, bei $\sqrt{3}$ $x^2 = 16$, bei $\sqrt{63}$ $x^2 = 256$, bei $\sqrt{50}$ $x^2 = 196$ u. s. w. zu setzen. Auch bei $\sqrt{30} = \sqrt{3.10}$ war leicht einzusehen, dass man durch Multiplication mit 4 die Form $\sqrt{\frac{(a+1)(a+1)}{b^2}}$ herstellen konnte $\left(\sqrt{\frac{12.10}{4}}\right)$.

Wie eben erwähnt, wäre bei $\sqrt{3}$ $x^2 = 16$, also

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3.16}{16}} = \sqrt{\frac{49-1}{16}} < \frac{7}{4}.$$

Dieser Werth genügt in Bezug auf Genauigkeit weder dem Archimedes noch dem Hero, so dass man genöthigt ist, sich noch nach einer andern Formel umzusehen, die genauere Werthe zu liefern im Stande ist.

II.

Die bei Archimedes vorkommenden Näherungswerthe für $\sqrt{3}$ sind

$$\tfrac{1351}{780} > \sqrt{3} > \tfrac{265}{153},$$

wofür man auch schreiben kann

$$\tfrac{7}{4} \cdot \tfrac{193}{195} > \sqrt{3} > \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{53}{51}.$$

Beide Näherungswerthe bestehen in dieser Form aus 2 Factoren, deren erster ein unechter Bruch ist, und zwar ist dieser in dem einen Falle zu gross, in dem andern Falle zu klein. Der zu grosse Werth ($\frac{7}{4}$) wird mit einem echten Bruch ($\frac{193}{195}$), der zu kleine Werth ($\frac{5}{3}$) mit einem unechten Bruch ($\frac{53}{51}$) multiplicirt. Sowohl bei dem echten Bruch ($\frac{193}{195}$), als auch bei dem unechten Bruch ($\frac{53}{51}$) ist der Unterschied von Zähler und Nenner 2.

Vergleicht man $\sqrt{\frac{49}{16}\cdot\frac{192}{196}} = \sqrt{3} = \sqrt{\frac{25}{9}\cdot\frac{54}{50}}$ mit der obigen zweiten Ungleichung, geschrieben in der Form

$$\sqrt{\frac{49}{16}\cdot\frac{193}{195}} > \sqrt{3} > \sqrt{\frac{25}{9}\cdot\frac{53}{51}},$$

so würde hieraus folgen $\sqrt{\frac{192}{196}} < \frac{193}{195}$ und $\sqrt{\frac{54}{50}} > \frac{53}{51}$, oder allgemein

$$\sqrt{\frac{a \mp 2}{a \pm 2}} \lesseqgtr \frac{a \mp 1}{a \pm 1}.$$

Berücksichtigt man, dass der Werth eines Bruches kleiner wird, wenn man den Nenner vergrössert, also $\frac{m}{n} > \frac{m}{n+p}$, so muss $\frac{a+b}{a} > \frac{a+b+c}{a+c}$, denn $1+\frac{b}{a} > 1+\frac{b}{a+c}$ und $\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$ sein, denn

$$1-\frac{b}{a+b} < 1-\frac{b}{a+b+c}.$$

Es ist aber

$$\sqrt{\frac{a+2}{a-2}} = \sqrt{\frac{a^2+2a}{a^2-2a}}, \text{ demnach } > \sqrt{\frac{a^2+2a+1}{a^2-2a+1}} \text{ oder } \sqrt{\frac{a+2}{a-2}} > \frac{a+1}{a-1}$$

und $$\sqrt{\frac{a-2}{a+2}} = \sqrt{\frac{a^2-2a}{a^2+2a}}, \quad < \sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}} \text{ oder } \sqrt{\frac{a-2}{a+2}} < \frac{a-1}{a+1}.$$

Resul'ate, welche die Richtigkeit der oben aufgestellten Formeln bestätigen.

Setzt man nach der oben erwähnten Gleichung

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{49}{16}\cdot\frac{192}{196}} = \sqrt{\frac{49}{16}\cdot\frac{16}{49}\cdot\frac{4}{4}\cdot 3} \text{ und } \frac{7}{4}\sqrt{\frac{48}{49}\cdot\frac{4}{4}} = \frac{7}{4}\sqrt{\frac{192}{196}} < \frac{7}{4}\cdot\frac{193}{195},$$

sowie

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{25}{9}\cdot\frac{54}{50}} = \sqrt{\frac{25}{9}\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{2}{2}\cdot 3} \text{ und } \frac{5}{3}\sqrt{\frac{27}{25}\cdot\frac{2}{2}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{54}{50}} > \frac{5}{3}\cdot\frac{53}{51},$$

so kann man leicht einsehen, dass sich der Weg, den man bei Anwendung unserer abgeleiteten Formeln zu gehen hat, etwa folgendermassen bezeichnen liesse:

$$\sqrt{a} = \sqrt{a\,\frac{b^2}{c^2}\,\frac{c^2}{b^2}} = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{ab^2}{c^2}} = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{p\pm 2}{p\mp 2}} \gtrless \frac{c}{b}\,\frac{p\pm 1}{p\mp 1},$$

je nachdem $\frac{ab^2}{c^2} \gtrless c^2$.

Die Umwandlung von $\frac{c}{b}\sqrt{\frac{ab^2}{c^2}}$ in $\frac{c}{b}\sqrt{\frac{p\pm 2}{p\mp 2}}$ ist aber nur dann möglich, wenn $\frac{ab^2 n}{c^2 n} = \frac{p\pm 2}{p\mp 2}$ gesetzt werden kann. Hieraus folgt

$$\frac{ab^2n}{c^2n} = 1 \pm \frac{4}{p \mp 2}$$

und $ab^2n = c^2n \pm \frac{4c^2n}{p \mp 2}$, sowie $n(c^2 - ab^2) = \mp 4\frac{c^2n}{p \mp 2}$. Für den Specialfall $c^2n = p \mp 2$ wäre dann $n(c^2 - ab^2) = \mp 4$ oder $c^2 - ab^2 = \mp \frac{4}{n}$, eine Gleichung, welche, abgesehen von einer später zu besprechenden Ausnahme, die hier in Frage kommenden Werthe für b und c liefert. Da aber a, b, c, p und n ganze Zahlen sind, so muss auch nothwendig $\frac{4}{n}$ eine ganze Zahl sein, woraus dann weiter folgt, dass n nur 1, 2 oder 4 sein kann.

Eine allgemeine Discussion der Gleichung ist, so lange es sich um $\sqrt{3}$ handelt, offenbar nicht nöthig. Man braucht, da in diesem Falle $a = 3$, nur 2 Werthe b^2 und c^2 zu suchen, so dass der Unterschied der grösseren Quadratzahl und der dreifachen kleineren 1, 2 oder 4 beträgt. Man kann durch einfaches Probiren erkennen, dass* $1 . 3 + 1 = 4$, $4 . 3 + 4 = 16$, $9 . 3 - 2 = 25$, $16 . 3 + 1 = 49$ u. s. w. und also die Zahlen 1 und 4, 4 und 16, 9 und 25, 16 und 49, 64 und 196 u. s. w. solche Werthgruppen für b^2 und c^2 darzustellen vermögen, die der Bedingung $3b^2 - c^2 = \pm \frac{4}{n}$ Genüge leisten.

Die Zahlengruppen 1 und 4, sowie 4 und 16 führen in unserem speciellen Falle ($a = 3$) zu demselben Werthe für $\sqrt{3}$, da ja $\frac{4}{16}$ nichts Anderes ist, als der mit 4 erweiterte Bruch $\frac{1}{4}$, und zwar ist der hierbei erhaltene Werth etwas zu gross, da $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$ ein echter Bruch; die Anwendung der Gruppe 9 und 25 führt zu einem kleineren Werth, da $\frac{9.3}{25}$ ein unechter Bruch, wogegen die Anwendung der Gruppe 16 und 49 wieder zu einem zu grossen Werth führt, da $\frac{16.3}{49}$ ein echter Bruch u. s. w. Wir ersehen also hieraus, dass zur Berechnung der Archimedischen Näherungswerthe für $\sqrt{3}$ mit Hilfe unserer Formeln zwei benachbarte Werthgruppen zu verwenden sind.

Schreibt man statt $\sqrt{\frac{p+2}{p-2}} > \frac{p+1}{p-1}$, $\sqrt{\frac{m+4}{m}} > \frac{m+3}{m+1}$, so folgt hieraus

$$\sqrt{1 + \frac{4}{m}} > 1 + \frac{2}{m+1}.$$

Unter dem Wurzelzeichen befindet sich hier nur der irrationale Factor unserer oben aufgestellten Formel

$$\sqrt{\frac{c^2}{b^2}\,\frac{p \pm 2}{p \mp 2}} \gtrless \frac{c}{b}\,\frac{p \pm 1}{p \mp 1}.$$

* Man vergleiche hiermit die Methode von de Lagny, Günther, S. 64.

Multiplicirt man nun beide Seiten mit dem rationalen Factor c, so erhält man

$$\sqrt{c^2+\frac{4c^2}{m}} > c+\frac{2c}{m+1} \quad \text{oder} \quad \sqrt{c^2+\frac{4c^2}{m}} > c+\frac{4c^2}{m}\cdot\frac{m}{2c(m+1)},$$

wofür man auch schreiben kann

$$\sqrt{c^2+\frac{4c^2}{m}} > c+\frac{\frac{4c^2}{m}}{2c+\frac{2c}{m}}.$$

Setzt man $\frac{4c^2}{m}=b$, so ist $\frac{2c}{m}=\frac{b}{2c}$ und $\sqrt{c^2+b} > c+\frac{b}{2c+\frac{b}{2c}}$. In ganz gleicher Weise erhält man aus $\sqrt{\frac{a-2}{a+2}} < \frac{a-1}{a+1}$, wenn $a+2=m$ und das bei der weiteren Rechnung sich ergebende $\frac{4c^2}{m}=b$ setzt: $\sqrt{c^2-b} < c-\frac{b}{2c-\frac{b}{2c}}$; das heisst also: unsere Formeln gehen unter der Bedingung $\frac{4c^2}{m}=b$, wobei m eine ganze Zahl bedeutet, in den dritten Näherungswerth eines eingliederig-periodischen Kettenbruchs über.

Doch will ich im Anschluss hieran gleich bemerken, dass dieser Zusammenhang den Gebrauch der Formel $\sqrt{\frac{a\mp 2}{a\pm 2}} \lessgtr \frac{a\mp 1}{a\pm 1}$ bei den Griechen keineswegs in Frage zu stellen vermag, da weder in der Form, noch in der Anwendung der Formel die geringste Hindeutung auf ein Kettenbruchverfahren gefunden werden kann; wohl aber wird der oben geschilderte Uebergang zur Genüge erklären, wie Heilermann mit Hilfe des dritten Näherungswerthes eines eingliederig-periodischen Kettenbruches bei günstiger Zerlegung des Radicanden Werthe abzuleiten im Stande ist, die unsere Formel $\sqrt{\frac{a\pm 2}{a\mp 2}} \gtrless \frac{a\pm 1}{a\mp 1}$ uns später liefern wird.

Heilermann leitet z. B.

$$\sqrt{135} = 11\tfrac{13}{21} \text{ aus } \sqrt{12^2-9} = 12-\frac{9}{24-\frac{9}{24}},$$

$$\sqrt{6300} = 79\tfrac{19}{51} \text{ aus } \sqrt{80^2-100} = 80-\frac{100}{160-\frac{100}{160}},$$

$$\sqrt{216} = 14\tfrac{23}{33} \text{ aus } \sqrt{15^2-9} = 15-\frac{9}{30+\frac{9}{30}},$$

$$\sqrt{54} = 7\tfrac{1}{3} \text{ aus } \sqrt{6^2+18} = 6+\frac{18}{12+\frac{18}{12}},$$

$$\sqrt{8\tfrac{7}{16}} = 2\tfrac{11}{12} \text{ aus } \sqrt{(3\tfrac{3}{4})^2-5\tfrac{5}{8}} = 3\tfrac{3}{4}-\frac{5\frac{5}{8}}{7\frac{1}{2}-\frac{5\frac{5}{8}}{7\frac{1}{2}}}$$

ab und setzt

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \tfrac{7}{5},$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} = 2 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4}} = \tfrac{26}{15},$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{(\tfrac{7}{4})^2 - \tfrac{1}{16}} = \tfrac{7}{4} - \frac{\frac{1}{16}}{\frac{7}{2} - \frac{\frac{1}{16}}{\frac{7}{2}}} = \tfrac{1351}{780},$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{(\tfrac{5}{3})^2 + \tfrac{2}{9}} = \tfrac{5}{3} + \frac{\frac{2}{9}}{\frac{10}{3} + \frac{\frac{2}{9}}{\frac{10}{3}}} = \tfrac{265}{153}.$$

In allen diesen Beispielen ist der Bedingung $\frac{4c^2}{m} = b$, wobei m eine ganze Zahl, Genüge geleistet. So ist

$$\begin{array}{llll}
\text{bei } \sqrt{c^2 \pm b} = \sqrt{135} = \sqrt{12^2 - 9}, & 4.12^2 = 9\,m & \text{also} & m = 64, \\
\text{bei } \sqrt{6300} = \sqrt{80^2 - 100}, & 4.80^2 = 100.m & \text{also} & m = 256, \\
\text{bei } \sqrt{216} = \sqrt{15^2 - 9}, & 4.15^2 = 9.m & \text{also} & m = 100, \\
\text{bei } \sqrt{54} = \sqrt{6^2 + 18}, & 4.6^2 = 18.m & \text{also} & m = 8, \\
\text{bei } \sqrt{8\tfrac{7}{16}} = \sqrt{(3\tfrac{3}{4})^2 + 5\tfrac{5}{8}}, & 4.(3\tfrac{3}{4})^2 = 5\tfrac{5}{8}.m & \text{also} & m = 10, \\
\text{bei } \sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1}, & 4.1 = 1.m & \text{also} & m = 4, \\
\text{bei } \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1}, & 4.2^2 = 1.m & \text{also} & m = 16, \\
\text{bei } \sqrt{3} = \sqrt{(\tfrac{7}{4})^2 - \tfrac{1}{16}}, & 4.(\tfrac{7}{4})^2 = \tfrac{1}{16}.m & \text{also} & m = 196, \\
\text{bei } \sqrt{3} = \sqrt{(\tfrac{5}{3})^2 + \tfrac{2}{9}}, & 4.(\tfrac{5}{3})^2 = \tfrac{2}{9}.m & \text{also} & m = 50.
\end{array}$$

III.

Nach einer Mittheilung des Eutokius, von dem wir einen Commentar zur Archimedischen Kreismessung besitzen, hatte Hero über Quadratwurzelausziehen geschrieben; in gleicher Weise Pappus, Theon und andere Exegeten der grossen Zusammenstellung bei Claudius Ptolemaeus.* Von allen diesen Schriften ist uns nur die des letztgenannten Theon von Alexandria erhalten, der aber die noch heute übliche Schulmethode lehrt, mit der Abänderung, welche durch den Gebrauch der Sexagesimalbrüche geboten ist, eine Methode, welcher sich die bei Archimedes und Hero vorkommenden Wurzelwerthe nicht anpassen lassen, da sie in gemeinen bezw. Stammbrüchen angegeben sind.

Da es also an einer directen Ueberlieferung der Methode des Wurzelausziehens bei den alten Griechen fehlt, so sind wir in dieser Beziehung nur auf Vermuthungen angewiesen, die sich natürlich nur innerhalb der

* Cantor, Geschichte der Mathematik (in der Folge nur als „Cantor" angeführt), S. 274.

Gebiete bewegen dürfen, die uns als den Griechen bekannt überliefert wurden. Hier treten uns nun in erster Linie die Untersuchungen entgegen, die schon von Pythagoras, den ja auch das sogenannte alte Mathematikerverzeichniss den Entdecker des Irrationalen nennt, über den Zusammenhang zwischen Seiten und Diagonalen bei Quadrat und Rechteck angestellt worden. Bei seinen Versuchen, für die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ganze Zahlen aufzufinden, kam er auf Fälle, in denen dies nicht möglich war. Er fand, dass* die Hypothenuse des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit messbaren Katheten selbst unmessbar sei, dass sie durch keine Zahl benennbar, durch keine aussprechbar sei. Seine Nachfolger, d. h. die sich nach ihm mit demselben Gegenstande beschäftigten, mussten die gleiche Ueberzeugung gewinnen; sie erkannten, dass es zwar leicht sei, ein Quadrat zu zeichnen von der doppelten Grösse eines gegebenen, aber eine Quadratzahl, die das Doppelte einer gegebenen Quadratzahl war, fanden sie nicht. Von welcher Quadratzahl sie auch ausgingen, immer war die doppelte etwas grösser oder kleiner, als eine andere Quadratzahl und so lange sie sich auf ganze Zahlen beschränkten, konnten sie bei günstiger Wahl das doppelte Quadrat nur bis auf eine Einheit an ein anderes Qnadrat heranbringen. Diese Erkenntniss scheint mir auch einer auf Quadratwurzeln Bezug habenden Stelle zu Grunde zu liegen, die von Platon herrührt; ich meine jene vielbesprochene Stelle im achten Buche des Staates,** in der von der Diagonale eines Quadrates von der Seite 5 die Rede ist, welche rational ausfalle, wenn eins fehle, dagegen irrational, wenn zwei fehlen. Man versteht das allgemein so, dass jene Diagonale oder $\sqrt{50}$ in den rationalen Werth 7 übergehe, wenn die Zahl 50 um eins verringert werde, dagegen irrational $\sqrt{48}$ bleibe, wenn man 2 von 50 abzieht.

Noch deutlicher allerdings drückt sich Proklos, der Commentator Euklid's, aus, indem*** er geradezu sagt, dass es keine Quadratzahl gebe, die das Doppelte einer Quadratzahl anders als nahezu sei; so sei das Quadrat von 7 das Doppelte des Quadrates von 5, an welchem nur eins fehle.

Aus diesen Angaben geht wohl zur Genüge hervor, dass man die Unmöglichkeit erkannt hatte, zwei Zahlen zu finden, deren Quadrate sich wie 2 zu 1 verhalten, dass man es bei günstiger Wahl aber nahezu könne (d. h. einen Näherungswerth finden könne), wenn man (natürlich ganze Zahlen vorausgesetzt) die Zahlen so wählte, dass das doppelte Quadrat sich um eine Einheit von einem andern Quadrat unterscheide, so dass wir als erste Formeln für die Auffindung von Zahlen, deren Quadrate näherungsweise in einem gegebenen Verhältniss stehen sollten, folgende aufzustellen hätten:

$$\sqrt{\frac{a^2 \pm 1}{b^2}} \gtrless \frac{a}{b}.$$

* Cantor, S. 154.

** und *** Cantor, S. 191.

Eine solche Formel hatte aber nur dann praktischen Werth, wenn man auch Mittel und Wege fand, um die gegebene Verhältnisszahl mit den der Formel entsprechenden Quadratzahlen in Einklang zu bringen. Und hier war man offenbar auf das Probiren angewiesen. Am einfachsten gestaltete sich die ganze Sache bei dem Verhältniss 2 : 1. Hier konnte man leicht solche Werthgruppen finden, die den beiden obigen Formeln entsprechen, und dass man sie auch gefunden, zeigt uns ja der bekannte Satz des Theon von Smyrna, der diese zusammengehörigen quadradischen Werthe, die in dem angenäherten Verhältniss 2 : 1 standen, nach der bei den Griechen beliebten geometrischen Interpretationsweise Diametral- und Seitenzahlen (διαμετρός und πλευρά) nennt. Hierbei ist nun allerdings zu bemerken, dass es dem Theon nicht darum zu thun, Näherungswerthe für $\sqrt{2}$ anzugeben, dass ihm vielmehr seine Regel, wie man nämlich aus einer Werthgruppe die anderen finden könne, die Hauptsache war; denn erst nach Angabe der Regel erklärt er, dass diese so gebildeten Werthgruppen solche seien, die den oben angegebenen Formeln entsprechen.

Das zur Benutzung der obigen Formel nothwendigste Werkzeug war wohl eine Quadratzahlentabelle, deren Gebrauch bei den alten Griechen wohl vorausgesetzt werden darf, um so mehr, da ja den alten Babyloniern schon derartige* Tabellen bekannt waren. Mit Hilfe derselben war es dann leicht, quadratische Werthgruppen zu finden, die nahezu in einem gegebenen Verhältniss standen: z. B. 49 und 16, 676 und 225, die im angenäherten Verhältniss 3 : 1 stehen, oder auch 81 und 16, sowie 1444 und 283, deren angenähertes Verhältniss 5 : 1 ist u. s. w., so dass also

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{49-1}{16}} < \tfrac{7}{4} \text{ und } \sqrt{3} = \sqrt{\frac{676-1}{225}} < \tfrac{26}{15},$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{\frac{81-1}{16}} < \tfrac{9}{4} \text{ und } \sqrt{5} = \sqrt{\frac{1444+1}{289}} > \tfrac{38}{17}.$$

Dass die Griechen derartige Betrachtungen rein arithmetisch, ohne Beziehungen zur Geometrie aufzusuchen, angestellt hätten, möchte ich freilich nicht behaupten; ich glaube vielmehr, dass hier, wie wohl auch vielfach bei anderen Untersuchungen im Alterthum, Geometrie und Arithmetik Hand in Hand gingen, so dass sich schliesslich schwer entscheiden liesse, wem wohl die Priorität zuzuerkennen sei. Es wird wohl desshalb auch nur natürlich erscheinen, wenn wir versuchen, ein geometrisches Bild der obigen Formeln zu verschaffen. Wir kehren zunächst zu $\sqrt{2}$ zurück.

Theilt man die Seiten eines Quadrates in dem Verhältniss 3 : 4, (Fig. 17), so dass immer zwei ungleiche Theile in einer Ecke zusammentreffen, und verbindet man die Theilpunkte in je zwei anstossenden Seiten mit einander, so erhält man ein Quadrat von der Seite 5. Errichtet man nun über

* Cantor, S. 73.

jeder Seite desselben nach innen ein dem ausserhalb der betreffenden Seite befindlichen Dreieck congruentes Dreieck, so dass die beiden über derselben Seite errichteten Dreiecke zusammen ein Rechteck bilden, so wird im Innern der Figur ein Quadrat von der Seite 1 übrig bleiben. Fügt man dem grossen Quadrat ein solches Quadrat von der Seite 1 hinzu, so wird es das Doppelte des kleineren Quadrates betragen. Nimmt man von beiden Quadraten das Quadrat von der Seite 1 hinweg, so wird der Rest des grösseren Quadrates ebenfalls doppelt so gross wie der Rest des kleineren sein, demnach werden die 8 Dreiecke des grossen Quadrates das Doppelte von den 4 Dreiecken des kleineren betragen oder

$$\sqrt{\tfrac{2}{1}}=\sqrt{\frac{49+1}{25}}=\sqrt{\frac{49-1}{25-1}}=\sqrt{\frac{8\cdot\frac{3.4}{2}}{4\cdot\frac{3.4}{2}}}=\sqrt{\frac{8.6}{4.6}}>\tfrac{7}{5}.$$

Hier zeigte sich also der Zähler und Nenner des Resultates als das arithmetische Mittel der Factoren im Zähler und Nenner des Radicanden, Betrachtungen, die den Griechen nach des Nikomachus Mittheilung (Cantor S. 144) geläufig waren.

Von hier aus lag dann der Schluss nahe, dass, da die Dreiecke inhaltsgleich waren, schon die Anzahl derselben im grossen und kleinen Quadrat die Verhältnisszahl $2:1$ bilden konnten, d. h. $\sqrt{\frac{8.6}{4.6}}=\sqrt{\tfrac{8}{4}}>\tfrac{7}{5}$.

Natürlich galt diese ganze Schlussweise nur für $\sqrt{2}$, d. h., wenn Zähler und Nenner des Radicanden im Verhältniss $2:1$ standen. Aber in der Betrachtung von Verhältnissen waren ja die alten Griechen sehr geübt; es musste ihnen deshalb leicht sein, sich zu überzeugen, dass allgemein $\frac{m}{n}\lessgtr\frac{m+1}{n+1}$, je nachdem $m\lessgtr n$, und dass demnach auch

$$\sqrt{\frac{a^2-1}{b^2-1}}=\sqrt{\frac{(a+1)\,(a-1)}{(b+1)\,(b-1)}}\gtrless\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$$

je nachdem der Zähler oder der Nenner des Radicanden grösser war.

Die Factoren im Zähler sowohl wie im Nenner waren um 2 von einander verschieden, so dass die geringste Differenz zwischen dem grössten und kleinsten Factor 4 sein musste. Dies war aber zugleich der günstigste Fall, da alsdann der mittlere Factor im Zähler und Nenner vorkam, also durch Kürzen beseitigt werden konnte, so dass dann allgemein die Formel $\sqrt{\frac{a\pm 2}{a\mp 2}}\gtrless\frac{a\pm 1}{a\mp 1}$ übrig blieb.

Die oben erwähnte Figur konnte aber auch zu einer Ableitung für $\sqrt{3}$ dienen: Das grosse Quadrat von der Seite 7 wurde in 4 Rechtecke mit den Seiten 3 und 4 zerlegt, die noch ein Quadrat von der Seite 1

übrig liessen. Zerlegte man das eine Rechteck in drei gleiche Theile von den Seiten 4 und 1 und legte jedem der drei übrigen Rechtecke einen Theil zu, so erhielt man drei Quadrate von der Seite 4, so dass also $7^2 = 3.4^2 + 1$ oder $\frac{7^2-1}{4^2} = 3$. Wenn man nun, wie vorher, für $7^2 - 1$ das achtfache Dreieck vom Inhalt $\frac{3.4}{2} = 6$ einsetzte, so folgte hieraus

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{8.6}{16}} < \tfrac{7}{4}\,.$$

Auch hier war also der Zähler des Resultates das arithmetische Mittel der beiden Factoren des Zählers im Radicanten, so dass der zweite Theil unserer ersten Formel allgemein $\sqrt{\frac{a^2-1}{b^2}} = \sqrt{\frac{(a+1)(a-1)}{b^2}} < \frac{a}{b}$ lauten würde.

Nun wird freilich der Satz: $(a+1)(a-1)+1 = a^2$ erst von Jamblichus* mitgetheilt, indem er sagt, dass eine jede Zahl mit einer der beiden zunächstliegenden gleichartigen Zahlen vervielfacht unter Hinzufügung der Einheit zu dem Product ein Quadrat giebt; doch ist dies nach meiner Ansicht kein Hinderniss für die Annahme, dass die in dem Satze enthaltene Wahrheit schon früher bekannt war, zumal die in den eben angegebenen Beispielen vorkommende Anwendung desselben sich zum Theil mit der Anwendung des schon früher bekannten Satzes von den achtfachen Dreieckszahlen decken würde und im 27. Satze des VI. Buches des Euklid** eine später bei Pappus*** wiederkehrende Maximumaufgabe enthalten ist, die wir etwa durch $a^2 = \left[\frac{(a+x)+(a-x)}{2}\right]^2 > (a+x)\,a-x)$ ausdrücken könnten, wenn wir zugleich den Satz vom arithmetischen Mittel anwenden wollten.

Diese letzte Formel könnte aber auch als die Grundlage einer Erweiterung der Formel $\sqrt{\frac{a^2-1}{b^2}} < \frac{a}{b}$ betrachtet werden, insofern man von der Bedingung, dass der Zähler die Form $(a+1)(a-1)$ habe, absah, und sich, besonders bei grossen Zahlen, mit der ungenaueren Formel

$$\sqrt{\frac{(a+n)(a-n)}{b^2}} < \frac{(a+n)+(a-n)}{2b}$$

begnügte.

Bei dieser letzten Betrachtung nahmen wir unseren Ausgang von der Zergliederung von geometrischen Figuren, die als Illustrirung des Satzes von den achtfachen Dreieckszahlen gelten können, und in der That lassen sich ganz ähnliche Ableitungen bei einem Quadrat von der Seite 3, von

* Cantor, S. 392.

** Cantor, S. 228.

*** Cantor, S. 285.

der Seite 5, von der Seite 9 u. s w. machen, allgemein bei solchen, welche die mehrerwähnte Beziehung zu den achtfachen Dreieckszahlen besitzen.

Theilt man die Seiten eines Quadrates im Verhältniss 1:4 (Fig. 18) und wendet man hierbei ein ähnliches Verfahren an, wie vorher bei dem Quadrat von der Seite 7, so würde im Innern der Figur ein Quadrat von der Seite 3 übrig bleiben; würde man nunmehr das Verfahren fortsetzen, indem man das Verhältniss 1:2 zu Grunde legte, so würde schliesslich im Innern ein Quadrat von der Seite 1 übrig bleiben. Es würden dann hierbei im Ganzen 5 Quadrate entstehen, wobei der Zwischenraum zwischen dem ersten und zweiten und zwischen dem zweiten und dritten aus je vier Dreiecken bestehen würde, die zusammengelegt ein Rechteck von den Seiten 2 und 4 geben. Der Zwischenraum zwischen dem dritten und fünften Quadrat würde hierbei aus vier Rechtecken von den Seiten 2 und 1 bestehen, die zusammengelegt ein Rechteck von den Seiten 2 und 4 ergeben würden. Das ganze Quadrat ist hierdurch also in drei Rechtecke von den Seiten 2 und 4 und in ein Quadrat von der Seite 1 zerlegt, waraus dann

$$\sqrt{\tfrac{3}{1}} = \sqrt{\frac{25-1}{9-1}} = \sqrt{\frac{25+2}{9}} > \tfrac{5}{3}$$

folgen würde.

Nachdem aber die alten Griechen durch derartige geometrische Zeichnungen grundlegende Betrachtungen für das Quadratwurzelausziehen gewonnen hatten, stellten sie sich im weiteren Verlaufe der Behandlung der Wurzeln offenbar ganz auf algebraischen Boden, sonst hätte Hero unmöglich in einem Radicanden Flächen- und Liniengrössen vereinigen können.* Beweis dafür ist mir ferner der Satz des Theon von Smyrna, der nichts Anderes ist als eine Regel, wie man algebraisch aus einem Nährungswerth für $\sqrt{2}$ die anderen ableiten könne. Theon geht in ihm von zwei Einheiten aus, die doch unmöglich als zusammengehörige Werthe für Diagonale und Quadratseite betrachtet werden konnten, was Theon übrigens auch nicht beansprucht.

Von der Thatsache ausgehend, dass der einen Diagonale zwei Quadratseiten gegenüberstehen, fand er einen Zusammenhang hiermit darin, dass für jede folgende Werthgruppe die Diagonale um die Summe der Quadratseiten, dagegen jede Quadratseite nur um die einfache Diagonale zu vermehren sei.

Nimmt man nun an, dass diese Regel Theon's von ihm selbst gefunden sei, so schliesst das natürlich nicht aus, dass schon vor ihm andere Regeln über den Zusammenhang von Nährungswerthen für dieselbe Quadratwurzel bekannt waren. Schon vorher war ich ja bei $\sqrt{2}$ davon ausgegangen, dass die Griechen es verstanden hätten, unter gewissen Bedingungen von der Formel $\sqrt{\frac{a^2 \pm 1}{b^2}}$ zu $\sqrt{\frac{a^2-1}{b^2-2}}$ überzugehen, was mir besonders da-

* Cantor, S. 341.

durch wahrscheinlich geworden, dass die Griechen nach den Ueberlieferungen sich mit Vorliebe solcher Nährungswerthe für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ bedienten, die sowohl nach der Formel $\sqrt{\frac{a^2+1}{b}} \lessgtr \frac{a}{b}$, als auch nach der Formel $\sqrt{\frac{m^2-1}{n^2-1}} \gtrless \frac{m}{n}$ $\left(\text{je nachdem } m \gtrless n\right)$ dargestellt werden können. So ist

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{49+1}{25}} > \tfrac{7}{5},\quad \sqrt{2} = \sqrt{\frac{49-1}{25-1}} = \sqrt{\frac{(7+1)(7-1)}{(5+1)(5-1)}} > \tfrac{7}{5};$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{676-1}{225}} < \tfrac{26}{15},\quad \sqrt{3} = 2\sqrt{\tfrac{12}{16}} = 2\sqrt{\frac{12.14}{16.14}} < 2.\tfrac{13}{15} \text{ oder } \tfrac{26}{15};$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{\frac{1444+1}{289}} > \tfrac{38}{17},\quad \sqrt{5} = 2\sqrt{\tfrac{20}{16}} = 2\sqrt{\frac{20.18}{16.18}} > 2.\tfrac{19}{17} \text{ oder } \tfrac{38}{17}.$$

Die eine der Formeln wird hier aus der andern erhalten, wenn man Zähler und Nenner in ihrem Verhältniss zu einander vermindert: so ist

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{49+1}{25}} = \sqrt{\frac{49-1}{24-1}} > \tfrac{7}{5};$$

ferner

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{676-1}{225}} = \sqrt{\tfrac{672}{224}} = \sqrt{4\cdot\tfrac{168}{224}} < \tfrac{26}{15},$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{\frac{1444+1}{289}} = \sqrt{\tfrac{1440}{288}} = \sqrt{4\cdot\tfrac{360}{288}} > \tfrac{38}{17}.$$

Der Werth des abgeleiteten Ausdruckes musste natürlich ein anderer sein, wenn die Verminderung im Zähler und Nenner nicht in ihrem Verhältniss zu einander ausgeführt wurden. So setzt Archimedes in seiner Kreisberechnung $\frac{1137}{8069} > \frac{10}{71}$. Verwendet man zum Kürzen den bei der Kettendivision sich ergebenden ersten Rest also, da $8069 = 7.1137 + 110$, hier den Rest 110, so ist $\frac{1137}{8069} = \frac{10.110+37}{71.110+7.37} > \frac{10.110}{71.110}$ oder $\frac{10}{71}$.

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich natürlich auch rückwärts, d. h. bei der Vermehrung von Zähler und Nenner aufstellen, wie wir sie ja auch schon vorgreifend bei Ableitung von $\sqrt{3}$ verwendeten. Unserer Formel $\sqrt{\frac{m^2-1}{r^2}} < \frac{m}{r}$ hatten wir die noch etwas ungenauere $\sqrt{\frac{(m+n)(m-n)}{r^2}} < \frac{(m+n)+(m-n)}{2r}$ angefügt. Schreibt man statt der letzteren $\sqrt{\frac{a^2(a^2+b)}{a^2}} < \frac{2a^2+b}{2a}$, so ist der Zähler $2a^2+b$ mehr als a-mal so gross wie der Nenner $2a$. Einer Vermehrung des Nenners um 1 würde demnach die Vermehrung des Zählers um a nicht vollständig entsprechen. Erhebt

man nun $\frac{2a^2+b+a}{2a+1}$ ins Quadrat, so erhält man $\frac{a^2(2a+1)^2+2a(2a+1)b+b^2}{(2a+1)^2}$ $= a^2 + \frac{[2a(2a+1)+b]\,b}{(2a+1)^2}$. Vergleicht man hiermit den Radicanden $\frac{a^2(a^2+b)}{a^2}$ $= a^2+b$, so erkennt man sofort, dass die beiden Ausdrücke b und $\frac{2a(2a+1)+b}{(2a+1)^2}b$ einander gleich sind unter der Bedingung $b=2a+1$, dass dagegen unter der Bedingung $b<2a+1$ der Radicand $\frac{a^2(a^2+b)}{a^2}$ $> a^2 + \frac{[2a(2a+1)+b]b)}{2a+1)^2}$ oder $\sqrt{\frac{a^2(a^2+b}{a^2}} > \frac{2a^2+b+a}{2a+1}$.

Das Ergebniss unserer Betrachtungen würden folgende sechs Formeln sein:

$$\text{I)}\qquad \sqrt{\frac{a^2+1}{b^2}} > \frac{a}{b},$$

$$\text{II)}\qquad \sqrt{\frac{a^2-1}{b^2}} < \frac{a}{b};$$

hierzu käme dann die noch etwas ungenauere

$$\text{III)}\qquad \sqrt{\frac{(m+n)(m-n)}{r^2}} < \frac{(m+n)+(m-n)}{2r}.$$

Aus dem speciellen Falle $\sqrt{\frac{a^2(a^2+b)}{a^2}}$ leiteten wir dann

$$\text{IV)}\qquad \sqrt{\frac{a^2(a^2+b)}{a^2}} > \frac{2a^2+b+a}{2a+1}$$

ab. Ausserdem hatten wir noch:

$$\sqrt{\frac{m^2-1}{n^2-1}} = \sqrt{\frac{(m+1)(m-1)}{(n+1)(n-1)}} \gtrless \frac{m}{n}, \text{ je nachdem } m \gtrless n.$$

Für $m-n=\pm 2$ gehen diese Formeln über in

$$\text{V)}\qquad \sqrt{\frac{a+2}{a-2}} > \frac{a+1}{a-1}$$

und

$$\text{VI)}\qquad \sqrt{\frac{a-2}{a+2}} < \frac{a-1}{a+1}.$$

Zu diesen 6 Formeln kämen für grössere Zahlen noch zwei Formeln hinzu, die etwas allgemeiner als die beiden ersten gehalten sind:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{VII)} & \sqrt{\frac{a^2+m}{b^2}} < \frac{a}{b} \\ \text{VIII)} & \sqrt{\frac{a^2-m}{b^2}} > \frac{a}{b}\end{array}\right\}, \text{ wenn } m<a.$$

Ausser den beiden erwähnten Näherungswerthen für $\sqrt{3}$, deren Ableitung bei der Aufstellung der Formeln V) und VI) angegeben worden, kommen in Archimed's Kreismessung nachfolgende sieben Wurzelwerthe vor:

$$1)\ \sqrt{349450} > 591\tfrac{1}{8};\qquad 2)\ \sqrt{1373943\tfrac{33}{64}} > 1172\tfrac{1}{8};$$

$$3)\ \sqrt{5472132\tfrac{1}{16}} > 2339\tfrac{1}{4};\qquad 4)\ \sqrt{9082321} < 3013\tfrac{3}{4};$$

$$5)\ \sqrt{3380929} < 1839\tfrac{9}{11};\qquad 6)\ \sqrt{1018405} < 1009\tfrac{1}{6};$$

$$7)\ \sqrt{4069284\tfrac{1}{36}} < 2017\tfrac{1}{4}.$$

Zur bequemeren Berechnung wollen wir zunächst jedesmal die rationalen Factoren herausziehen und dann bei den ersten drei die Formel IV und bei den letzten vier die specielle Formel zu III zur Anwendung bringen.

$$\text{A)}\qquad \sqrt{\frac{(a^2+b)\,a^2}{a^2}} > \frac{2a^2+b+a}{2a+1}.$$

$$1)\ \sqrt{349450} = 5\sqrt{13978} = 5\sqrt{\frac{13978.13924}{13924}} > 5.\frac{13978+13924+118}{2.118\qquad+1}$$
$$= 5\cdot 118\tfrac{54}{237} = 590 + 1\tfrac{33}{237} = 591\tfrac{11}{79} > 591\tfrac{11}{80} > 591\tfrac{10}{80} \text{ oder } 591\tfrac{1}{8};$$

$$2)\ \sqrt{1373943\tfrac{33}{64}} = \tfrac{9}{8}\sqrt{1085585} = \tfrac{9}{8}\sqrt{\frac{1085585.1083681}{1083681}}$$
$$> \tfrac{9}{8}.\frac{1085585+1083681+1041}{2.1041\qquad+1} = \tfrac{9}{8}\left(1041+\tfrac{1904}{2083}\right)$$
$$= 1041 + 130\tfrac{1}{8} + \tfrac{1904}{2083} + \tfrac{238}{2083} = 1172\tfrac{1}{8} + \tfrac{59}{2083} > 1172\tfrac{1}{8};$$

$$3)\ \sqrt{5472132\tfrac{1}{16}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{87554113} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{87554113.87553449}{87553449}}$$
$$> \tfrac{1}{4}.\frac{87554113+87553449+9357}{2.9357+1} = \tfrac{1}{4}\left(9357+\tfrac{664}{18715}\right)$$
$$= 2339\tfrac{1}{4} + \tfrac{166}{18715} > 2339\tfrac{1}{4}.$$

$$\text{B)}\qquad \sqrt{\frac{(a^2+b)\,a^2}{a^2}} < \frac{2a^2+b}{2a}.$$

$$4)\ \sqrt{9082321} = \sqrt{\frac{9082321.9084196}{9084196}} < \frac{9082321+9084196}{2.3014}$$
$$= 3014 - \tfrac{1875}{6028} < 3014 - \tfrac{4}{13} = 3013\tfrac{9}{13} < 3013\tfrac{9}{12} = 3013\tfrac{3}{4},$$

$$\left.\begin{array}{r} 6028 = 3.1875 + 403 \\ 1875 = 4.\ \ 403 + 263 \\ 6028 : 403 = 13 \\ 403 \\ \hline 1998 \\ -\ 789 = 3.263 \\ \hline 1209 \end{array}\right\}\cdot\ \tfrac{1875}{6028} = \frac{4.403+263}{13.403+3.263} > \frac{4\ 403}{13.403} \text{ oder } \tfrac{4}{13};$$

5) $\sqrt{3380929} = \sqrt{\frac{3380929.3381921}{3381921}} < \frac{3380929 + 3381921}{2.1839}$

$= 1839 - \frac{992}{3678} = 1839 - \frac{496}{1839} < 1839 - \frac{2}{11}$ oder $1838\frac{9}{11}$,

$$\left.\begin{array}{r} 1839 = 3.496 + 351 \\ 496 = 1.351 + 145 \\ 496 = 3.145 + 61 \end{array}\right\} \frac{496}{1839} = \frac{3.145 + 61}{11.145 + 4.61}, \text{ es ist demnach } \frac{3}{11} > \frac{496}{1839} > \frac{2}{11};$$

6) $\sqrt{1018405} = \sqrt{\frac{1018405.1020100}{1020100}} < \frac{1018405 + 1020100}{2.1010}$

$= 1010 - \frac{1695}{2020} = 1010 - \frac{339}{404} < 1010 - \frac{5}{6}$ oder $1009\frac{1}{6}$,

$$\left.\begin{array}{r} 404 = 1.339 + 65 \\ 339 = 5.65 + 14 \end{array}\right\} \frac{339}{404} = \frac{5.65 + 14}{6.65 + 14} > \frac{5}{6};$$

7) $\sqrt{4069284\frac{1}{36}} = \frac{5}{6}\sqrt{5859769} = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{5859769.5861241}{5861241}}$

$< \frac{5}{6}.\frac{5859769 + 5861241}{2.2421} = \frac{5}{6}\left(2421 - \frac{1472}{4842}\right)$

$= \frac{5}{6}\left(241 - \frac{736}{2421}\right) < 2017\frac{1}{2} - \frac{5}{6}.\frac{3}{10}$ oder $2017\frac{1}{4}$.

$$\left.\begin{array}{r} 2421 = 3.736 + 213 \\ 736 = 3.213 + 97 \end{array}\right\} \frac{736}{2421} = \frac{3.213 + 97}{10.213 + 3.97} > \frac{3}{10}.$$

Bei Nr. 1) und 4) wurden die gefundenen Grenzen $591\frac{11}{80}$ und $3013\frac{9}{13}$ noch weiter hinausgeschoben und dafür $591\frac{10}{80}$ und $3013\frac{9}{12}$ genommen, weil man dann durch Kürzen bequemere Werthe erhalten konnte.

Bei Nr. 5) wäre ein weiteres Hinausschieben der Grenze von keinem Vortheil gewesen, denn man hätte hier $1838\frac{9}{10}$ oder $1838\frac{10}{11}$ nehmen müssen, die beide kein weiteres Kürzen zugelassen hätten. Bei allen übrigen Werthen zeigte sich die Annäherung in Gestalt eines Stammbruches.

Die Wurzelwerthe des Hero.

Unter Beibehaltung der Eintheilung derselben nach Tannery in eine geometrische und eine goniometrische Gruppe will ich zuerst ein Verzeichniss der der ersteren Gruppe angehörigen Werthe voranschicken, wobei der Seitenangabe die Ausgabe der Schriften Hero's von Hultsch zu Grunde liegt und $\sim$ als Zeichen der Annäherung gewählt wurde, um es vorerst unerörtert zu lassen, ob der Näherungswerth zu gross oder zu klein genommen ist. Hero setzt nämlich

1) (S. 92) $\sqrt{8\frac{7}{16}} \sim 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$,

2) (S. 93) $\sqrt{135} \sim 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$,

3) (S 94) $\sqrt{43\frac{3}{4}} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}$,

4) (S. 95) $\sqrt{6300} \sim 79 + \frac{1}{3} + \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$,

5) (S. 95) $\sqrt{1575} \sim 39 + \frac{2}{3} + \frac{1}{51}$,

6) (S. 95) $\sqrt{886 - \frac{1}{16}} \sim 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68}$,

7) (S. 96) $\sqrt{2460\frac{15}{16}} \sim 49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51}$.

8) (S. 96) $\sqrt{615\frac{15}{64}} \sim 24 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{51} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$,

9) (S. 110) $\sqrt{216} \sim 14 + \frac{2}{3} + \frac{1}{33}$,

10) (S. 112) $\sqrt{58\frac{7}{16}} \sim 7\frac{2}{3}$,

11) (S. 119) $\sqrt{720} \sim 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$,

12) (S. 126) $\sqrt{208} \sim 14 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$.

13) (S. 130) $\sqrt{444\frac{4}{9}} \sim 21\frac{1}{12}$,

14) (S. 163) $\sqrt{63} \sim 8 - \frac{1}{16}$,

15) (S. 182) $\sqrt{1125} \sim 33 + \frac{1}{2} + \frac{1}{27}$.

16) (S. 183) $\sqrt{1081} \sim 32 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}$,

17) (S. 183) $\sqrt{108} \sim 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$,

18) (S. 184) $\sqrt{54} \sim 7\frac{1}{3}$.

19) (S. 184) $\sqrt{50} \sim 7\frac{1}{14}$,

20) (S. 185) $\sqrt{75} \sim 8 + \frac{1}{2}$,

21) (S. 185) $\sqrt{356\frac{1}{18}} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$,

22) (S. 185) $\sqrt{43\frac{31}{36}} \sim 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{9}$,

23) (S. 212) $\sqrt{3400} \sim 58\frac{1}{3}$,

24) (S. 212) $\sqrt{5000} \sim 70 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

25) (S. 217) $\sqrt{356} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Von diesen ordnen sich Nr. 2), 4), 5), 6), 7), 8), 9), 11), 17), 18) und 1) der Formel $\sqrt{\frac{a \pm 2}{a \mp 2}} \gtrless \frac{a \pm 1}{a \mp 1}$ unter.

Da bei 2) $\sqrt{135} = \sqrt{9.15} = 3\sqrt{3.5}$, so hätte hier m die Form $(r+1)(r-1)$, es würde dann die Gleichung $p^2 - mq^2 = +\frac{4}{n}$ für $q = 1^2$ den Werth $p^2 = 4^2$ liefern.

$$\sqrt{135} = 4.3\sqrt{\tfrac{15}{16}} = 12\sqrt{\tfrac{60}{64}} < 12.\tfrac{61}{63} \text{ oder } 12\left(1 - \tfrac{2}{63}\right)$$
$$= 12 - \tfrac{8}{21} = 11\tfrac{13}{21} = 11\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{21}.$$

Bei 4) hätten wir $\sqrt{6300} = \sqrt{100.7.9}$, für m also 7 zu setzen. Wollten wir mq^2 wie vorher auf die Form $(r+1)(r-1)$ bringen, so müssten wir $q^2 = 9$ nehmen, woraus $p^2 = 64$ folgen würde.

$$\sqrt{6300} = 10.8\sqrt{\tfrac{63}{64}} = 80\sqrt{\tfrac{252}{256}} < 80\ \tfrac{253}{255} = 80\left(1 - \tfrac{2}{255}\right) = 80 - \tfrac{32}{51}$$
$$= 79\tfrac{19}{51} = 79\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{34} + \tfrac{1}{102}.$$

Bei 5), 6), 7) und 8) würden wir durch die Zerlegung in Factoren auf dieselben Werthe für q^2 und p^2 geführt werden, also $q^2 = 9$ und $p^2 = 64$ zu nehmen haben.

5) $$\sqrt{1575} = \sqrt{25.9.7} = 5.8\sqrt{\tfrac{63}{64}} < 40.\tfrac{253}{256} = 40 - \tfrac{16}{51}$$
$$= 39\tfrac{35}{51} = 39\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{51},$$

6) $$\sqrt{886} - \tfrac{1}{16} = \sqrt{\tfrac{14175}{16}} \doteq \sqrt{\tfrac{25}{16}.9.7.9} = \tfrac{15}{4}.8\sqrt{\tfrac{63}{64}} < 30.\tfrac{253}{256}$$
$$= 30 - \tfrac{12}{51} = 29\tfrac{39}{51} = 29\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{68},$$

7) $$\sqrt{2460\tfrac{15}{16}} = \sqrt{\tfrac{39375}{16}} = \sqrt{\tfrac{25}{16}.25.9.7} = \tfrac{25}{4}.8\sqrt{\tfrac{63}{64}} < 50.\tfrac{253}{256}$$
$$= 50 - \tfrac{20}{51} = 49\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{34} + \tfrac{1}{51},$$

8) $$\sqrt{615\tfrac{15}{64}} = \sqrt{\tfrac{39375}{64}} = \sqrt{\tfrac{25}{64}.25.9.7} = \tfrac{25}{8}.8\sqrt{\tfrac{63}{64}} < 25.\tfrac{253}{256}$$
$$= 25 - \tfrac{10}{51} = 24\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{51} + \tfrac{1}{51} + \tfrac{1}{68}.$$

Bei 9) ist $\sqrt{216} = \sqrt{9.4.6}$, also, da $m = 6$, unter Berücksichtigung des bei 4) Gesagten $q^2 = 4$ und $p^2 = 25$ zu nehmen, so dass

$$\sqrt{216} = 3.5\sqrt{\tfrac{24}{25}} = 15\sqrt{\tfrac{96}{100}} < 15.\tfrac{97}{99} \text{ oder } 15\left(1 - \tfrac{2}{99}\right) = 15 - \tfrac{10}{33}$$
$$= 14\tfrac{23}{33} = 14\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{33}.$$

Bei 11) ist $\sqrt{720} = \sqrt{16.9.5}$. Da $m = 5$ eine Primzahl ist, die benachbarten Quadratzahlen 4 und 9 sind, so lässt sich hier für mq^2 die Form $(r+1)(r-1)$ nicht herstellen. Setzt man 9 für q^2, so geht mq^2 in die Form $(r+2)(r-2)$ über, deren Werth von r^2 um 4 verschieden. Durch Annahme der Werthe $q^2 = 9$ und $p^2 = 49$ wird demnach der Gleichung $p^2 - 5q^2 = \pm\frac{4}{n}$ Genüge geleistet. Es ist also

$$\sqrt{720} = \sqrt{16.9.5} = 4.7\sqrt{\tfrac{45}{49}} < 28.\tfrac{46}{48} = 28.\tfrac{23}{24} = 28 - 1\tfrac{1}{6} = 26\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}.$$

Bei 17) ist

$$\sqrt{108} = \sqrt{36.3} = 6\sqrt{3} = 6.2\sqrt{\tfrac{12}{16}} < 6.\tfrac{26}{15} = 10 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{15}.$$

Hier ist $m = 3$, also für $q^2 = 1$, $p^2 = 4$ zu nehmen.* Bei dieser Wurzel hat Tannery ebenfalls eine Zerlegung in $6\sqrt{3}$ vorgenommen, $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$

---

* Wir könnten hiernach die Resultate von 5), 6), 7), 8), 11) und 17) ebenfalls in der Form des dritten Näherungswerthes eines eingliederigen periodischen Kettenbruchs angeben, wenn wir die Formeln $\sqrt{\frac{m-4}{m}} < \frac{m-3}{m+1}$, $\frac{4c^2}{m} = b$ und $\sqrt{c^2 - b} < c - \cfrac{b}{2c - \cfrac{b}{2c}}$ anwenden. Bei 5), 6), 7) und 8) ist $\sqrt{\frac{m-4}{m}} = \sqrt{\frac{252}{256}}$, also $m = 256$. Bei 5) ist $\frac{4c^2}{m} = \frac{4.40^2}{256} = b = 25$ und $\sqrt{1575} = \sqrt{1600 - 25} \sim 40 - \cfrac{25}{80 - \frac{25}{80}} = 39\frac{35}{51}$. Bei 6) ist $\frac{4c^2}{m} = \frac{4.30^2}{256} = b = 14\frac{1}{16}$ und $\sqrt{886 - \frac{1}{16}} = \sqrt{900 - 14\frac{1}{16}} \sim 30 - \cfrac{14\frac{1}{16}}{60 - \frac{14\frac{1}{16}}{60}} = 29\frac{39}{51}$. Bei 7) ist $\frac{4c^2}{m} = \frac{4.50^2}{256} = b = 39\frac{1}{16}$ und $\sqrt{2460\frac{15}{16}} = \sqrt{2500 - 39\frac{1}{16}}$

allerdings auf andere Weise herzuleiten gesucht. (Diese Zerlegung tritt bei Tannery gewissermassen als Kunstgriff auf, während sie hier in der Anwendung unserer Formel begründet ist.)

Bei 18) ist $\sqrt{54} = \sqrt{9.6} = 3\sqrt{6}$. Da hier $m = 6 = s^2 + 2$, so ist für $q^2 = 1$ $p^2 = s^2$, d. h. 4 zu setzen, wenn der Gleichung $p^2 - 6q^2 = \pm \frac{4}{n}$ genügt werden soll. Es ist dann

$$\sqrt{6} = 2\sqrt{\tfrac{6}{4}} = 2\sqrt{\tfrac{12}{8}} > 2.\tfrac{11}{9} = \tfrac{22}{9} \text{ und } \sqrt{54} = 3\sqrt{6} > 3.\tfrac{22}{9} = 7\tfrac{1}{3}.$$

Bei 12) ist $\sqrt{208} = \sqrt{16.13}$. Legt man die bei 11) angewandte Betrachtung zu Grunde, so würde $q^2 = 9$, $p^2 = 11$ zu nehmen sein, so dass

$$\sqrt{208} = \sqrt{16.13} = \tfrac{44}{3}\sqrt{\frac{13.9}{121}} = 14\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{117}{121}} < 14\tfrac{2}{3}.\tfrac{118}{120} = 14\tfrac{2}{3}.\tfrac{59}{60}$$

oder $14\tfrac{2}{3}(1 - \tfrac{1}{60}) = 14\tfrac{2}{3} - \tfrac{44}{180} = 14\tfrac{1}{3} + \tfrac{16}{180} = 14\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{180}$.

Der kleinste bei den Heronischen Wurzelwerthen vorkommende Stammbruch hat den Nenner 102. Bedenkt man ferner, dass Hero für $\sqrt{3}$ als Näherungswerth $\frac{26}{15}$ vorzog, obwohl er um $\frac{1}{780}$ ungenauer ist, als der schon von Archimedes gebrauchte Näherungswerth $\frac{1351}{780}$, so liegt die Annahme nahe, dass er den Stammbruch $\frac{1}{180}$ (weil von zu geringer Bedingung) vernachlässigte, zumal das Resultat, wie sich aus der Formel ergiebt, etwas zu gross war, so dass er dann $\sqrt{208} \sim 14\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ setzte. Eine Zusammenstellung der Betrachtungen, die zur Verwandlung des Radicanden in die Form $\sqrt{\frac{a \pm 2}{a \mp 2}}$ dienen sollten, würde folgende vier besondere Lösungen der Gleichung $p^2 - mq^2 = \pm \frac{4}{n}$ ergeben:

a) Ist $m = (s + 1)(s - 1)$, so ist für $q^2 = 1$ $p^2 = s^2$ zu setzen, denn $s^2 - (s + 1)(s - 1) = 1$ [bei 2)];

$\sim 50 - \dfrac{39\frac{1}{16}}{100 - \dfrac{39\frac{1}{16}}{100}} = 49\tfrac{31}{51}$. Bei 8) ist $\dfrac{4c^2}{m} = \dfrac{4.25^2}{256} = b = 9\tfrac{49}{64}$ und $\sqrt{615\tfrac{15}{64}} = \sqrt{625 - 9\tfrac{49}{64}}$ $\sim 25 - \dfrac{9\frac{49}{64}}{50 - \dfrac{9\frac{49}{64}}{50}} = 24\tfrac{41}{51}$. Bei 11) $\sqrt{\dfrac{m-4}{m}} = \sqrt{\tfrac{45}{49}}$, also $m = 49$. $\dfrac{4c^2}{m} = \dfrac{4.28^2}{49} = b = 64$ und $\sqrt{720} = \sqrt{784 - 64} \sim 28 - \dfrac{64}{56 - \frac{64}{56}} = 26\tfrac{5}{6}$. Bei 17) ist $\sqrt{\dfrac{m-4}{m}} = \sqrt{\tfrac{12}{16}}$, $m = 16$; $\dfrac{4c^2}{m} = \dfrac{4.12^2}{16} = b = 36$ und $\sqrt{108} = \sqrt{144 - 36} = 12 - \dfrac{36}{24 - \frac{36}{24}} = 10\tfrac{2}{5}$. — Einige Erklärer leiten 11) $\sqrt{720} = \sqrt{27^2 - 9} \sim 27 - \tfrac{9}{54}$ und 17) $\sqrt{108} = \sqrt{10^2 - 8} \sim 10\tfrac{8}{20}$ ab. Dass diese beiden Wurzelwerthe nach zwei verschiedenen Formeln dargestellt werden können, hat darin seinen Grund, dass die beiden Werthe, auf deren Berechnung es hier ankommt, nämlich $\sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$ und $\sqrt{5} \sim \frac{161}{72}$, nach den Formeln $\sqrt{\dfrac{m^2-1}{p}} < \dfrac{m}{p}$ und $\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}} < \dfrac{a-1}{a+1}$ berechnet werden können.

b) ist $m = s^2 \pm \frac{4}{n}$, so ist für $q^2 = 1$ $p^2 = s^2$ zu setzen, denn
$s^2 - \left(s^2 \pm \frac{4}{n}\right) = \mp \frac{4}{n}$ [bei 18)];

c) ist $q^2 = m \pm 2$, so ist $p^2 = (m \pm 1)^2$, denn
$(m \pm 1)^2 - m\,(m \pm 2) = 1$ [bei 4), 5), 6), 7), 8), 9), 17)];

d) ist $q^2 = m \pm 4$, so ist $p^2 = (m \pm 2)^2$, denn
$(m \pm 2)^2 - m\,(m \pm 4) = 4$ [bei 11), 12)].

Die Gleichung $p^2 - mq^2 = \pm \frac{4}{n}$ ging als Specialfall aus der allgemeineren Gleichung $n\,(p^2 - mq^2) = \mp \frac{4p^2 n}{a \mp 2}$, die wiederum auf $\frac{mq^2}{p^2} = \frac{a \pm 2}{a \mp 2}$ zurückzuführen war, hervor, wenn $p^2 n = a \mp 2$ gesetzt wurde, d. h. wenn $\frac{mq^2}{p^2}$ durch Erweitern in die Form $\frac{a \pm 2}{a \mp 2}$ überging.

Setzt man in der Gleichung $\frac{mq^2}{p^2} = \frac{a \pm 2}{a \mp 2}$ ganz wie bei a) $m = (r+1)\,(r-1)$, $q^2 = 1$, so geht sie über in $\frac{(r+1)\,(r-1)}{p^2} = \frac{a \pm 2}{a \mp 2}$. Man erkennt in dieser Form sofort, dass ausser der bei a) angegebenen Lösung $p^2 = r^2$ auch noch $p^2 = (r+1)^2$ einen etwas zu grossen Werth liefert, während $p^2 = (r-1)^2$ einen zu kleinen liefern würde; denn es ist ja $\frac{(r+1)\,(r-1).2}{(r+1)^2.2} = \frac{a-2}{a+2}$, während $\frac{(r+1)\,(r-1).2}{(r-1)^2.2} = \frac{a+2}{a-2}$ ergeben würde

Bei 1) könnte man $\sqrt{8\tfrac{7}{16}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{135} = \tfrac{3}{4}\sqrt{3.5}$ setzen und unter Berücksichtigung des eben Gesagten

$$\tfrac{3}{4}\sqrt{3.5} = \tfrac{15}{4}\sqrt{\frac{3.5}{5.5}} = \tfrac{15}{4}\sqrt{\tfrac{6}{10}} < \tfrac{15}{4}.\tfrac{7}{9} = 2\tfrac{11}{12} = 2\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}$$

erhalten.

Bei 3) ist

$$\sqrt{43\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{175} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{175.169}{169}} \text{ [nach Formel III)] } < \tfrac{1}{2}.\frac{175+169}{2.13}$$
$$= 6\tfrac{8}{13} = 6\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{26}.$$

Bei 10) ist $\sqrt{58\tfrac{7}{16}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{935}$. Da 900 und 961 zu weit entfernt, so setzt man

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{935} = \tfrac{1}{4}\sqrt{5.11.17} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{5.17.9.11}{9}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{85.99}{9}} < \tfrac{1}{4}.\frac{85+99}{2.3} = 7\tfrac{2}{3}.$$

Bei 13) ist

$$\sqrt{444\tfrac{4}{9}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{4000} = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{4000.16}{16}} = \tfrac{1}{12}\sqrt{64000} < \tfrac{1}{12}.253$$
$$\text{[nach Formel VIII)]} = 21\tfrac{1}{12};$$
$$253^2 = 64009.$$

Bei 14) ist $\sqrt{63} = \sqrt{\frac{63.4.64}{256}} = \sqrt{\frac{126.128}{256}} < \frac{127}{16} = 8 - \frac{1}{16}$ [nach Formel II)].

Bei 15) ist $\sqrt{1125} = \sqrt{125.9} = \sqrt{\frac{375.3.121}{121}} = \sqrt{\frac{375.363}{121}}$ $< \frac{369}{11} = 33\frac{6}{11}$ [nach Formel III)] $= 33\frac{1}{2} + \frac{1}{22}$.

Bei 16) ist $\sqrt{1081} = \sqrt{\frac{1081.4096}{64^2}} = \sqrt{\frac{2162.2048}{64^2}} < \frac{2105}{64} = 32\frac{57}{64}$ [nach Formel III)] $= 32\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}$.

Bei 19) ist $\sqrt{50} = \sqrt{\frac{50.4.49}{14^2}} = \sqrt{\frac{100.98}{142}} < \frac{99}{14} = 7\frac{1}{14}$ [nach Formel II)].

Bei 20) ist $\sqrt{75} = \sqrt{\frac{75.4.64}{16^2}} = \sqrt{\frac{150.128}{16^2}} < \frac{139}{16} = 8\frac{11}{16}$ [nach Formel III)] $= 8\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$.

Bei 21) ist $\sqrt{356\frac{1}{18}} = \sqrt{\frac{6409}{18} \cdot \frac{72}{72}} = \sqrt{\frac{461488}{36^2}} > \frac{679}{36} = 18\frac{31}{36}$
[nach Formel VII)) $= 18\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$;
$680^2 = 462400$,
$679^2 = 461041$.

Bei 22) ist $\sqrt{43\frac{31}{36}} = \sqrt{\frac{1579}{36} \cdot \frac{36}{36}} = \sqrt{\frac{56844}{36^2}} > \frac{238}{36} = 6\frac{11}{18} = 6\frac{1}{2} + \frac{1}{9}$
[Formel VII)];
$239^2 = 57121$,
$238^2 = 56644$.

Bei 23) ist $\sqrt{3400} = \sqrt{\frac{3400.9}{9}} = \sqrt{\frac{30600}{9}} < \frac{175}{3} = 58\frac{1}{3}$
[Formel VII)];
$175^2 = 30625$.

Bei 24) ist $\sqrt{5000} = \sqrt{\frac{5000.16}{16}} = \sqrt{\frac{80000}{16}} < \frac{283}{4} = 70\frac{3}{4} = 70\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
[nach Formel VII)];
$283^2 = 80089$.

Bei 25) ist $\sqrt{356} = \sqrt{\frac{356.64}{64}} = \sqrt{\frac{22784}{64}} < \frac{151}{8} = 18\frac{7}{8} = 18\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
[nach Formel VII)];
$151^2 = 22801$.

Ausser den eben behandelten Näherungswerthen findet sich bei Hero noch eine andere Gruppe Näherungswerthe, von Tannery goniometrische genannt.

Hero hat nämlich zum Gebrauch der Formel $F_n = a_n^2 c_n$, in welcher F den Flächeninhalt und a die Seite eines regelmässigen Vielecks, sowie c eine Constante bedeutet, die Werthe für c_3 bis c_{12} berechnet und zwar setzte er:

$c_3 = \frac{13}{30}$, $c_6 = \frac{13}{5}$, $c_9 = \frac{51}{8}$ und $\frac{19}{3}$,
$c_4 = 1$, $c_7 = \frac{43}{12}$, $c_{10} = \frac{15}{2}$,
$c_5 = \frac{12}{7}$ und $\frac{5}{3}$, $c_8 = \frac{29}{5}$, $c_{11} = \frac{66}{7}$, und $c_{12} = \frac{45}{4}$.

Zur Berechnung derselben stehen uns aus den Heronischen Schriften die beiden Formeln $d_n = n \cdot \frac{a_n}{3}$, wobei d den Durchmesser des um das n-Eck von der Seite a beschriebenen Kreises darstellt und $F_n = n \cdot a_n \sqrt{\frac{d_n^2}{4} - \frac{a_n^2}{4}}$ zur Verfügung. Die erstere Formel passt allerdings wie von **Cantor*** hervorgehoben wird, nur für $n = 6$, während sie für $n < 6$ einen zu kleinen und für $n > 6$ einen zu grossen Werth liefert. Dass dies **Hero** sehr wohl gewusst und sie gewissermassen nur als Ausgangspunkt für in besonderen Fällen zu bestimmende Näherungswerthe gebrauchte, scheint mir daraus hervorzugehen, dass **Hero** selbst in einer von ihm angestellten Berechnung nach einer wahrscheinlich richtigen Vermuthung **Cantor's**** $d_8 = \frac{13}{5} a_8$ gesetzt hat, also zum Coefficienten der Sehne einen Werth gebrauchte, der $< \frac{8}{3}$, denn $8\ 5 - 3.13 = 1$.

Was nun die Berechnung der Werthe selbst betrifft, so stimme ich mit **Tannery** überein, wenn er c_3 aus $F_3 = \frac{1}{4} a_3^2 \sqrt{3}$ und c_6 aus $F_6 = \frac{3}{2} a_6 \sqrt{3}$ berechnet, wobei $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ zu setzen ist.

c_5 lässt sich leicht mit Hilfe der beiden Heronischen Formeln $d_5 = \frac{5}{3} a_5$ und $F_5 = \frac{5}{4} a_5 \sqrt{\frac{25}{9} a_5^2 - a_5^2} = \frac{5}{4} a_5^2 \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{5}{3} a_5^2$ ableiten. **Hero** hat nun offenbar gewusst, dass $d_5 > \frac{5}{3} a_5$ und deshalb für c_5 noch den etwas grössern Werth $\frac{12}{7}$ angegeben. (Es ist $12.3 - 5.7 = 1$.)

Setzt man, da $d_7 < \frac{7}{3} a_7$, für $\frac{7}{3}$ den etwas kleineren Werth $\frac{16}{7}$ (es ist nämlich $7.7 - 16.3 = 1$), so erhält man $F_7 = \frac{7}{4} a_7 \sqrt{\frac{256}{49} a_7^2 - a_7^2} = \frac{1}{4} a_7^2 \sqrt{207} = \frac{1}{12} a_7^2 \sqrt{207.9} = \frac{1}{12} a_7^2 \sqrt{1863} > \frac{43}{12} a_7^2$. $(43^2 = 1849.)$

Bei der Berechnung von F_8 findet man, da $d_8 < \frac{8}{3} a_8$, $\frac{8}{3} > \frac{21}{8}$ $(8.8 - 3.21 = 1)$ und $F_8 = \frac{8}{4} a_8^2 \sqrt{\frac{441}{64} - 1} = \frac{1}{4} a_8^2 \sqrt{377} = \frac{1}{12} a_8^2 \sqrt{3393} > \frac{58}{12} a_8^2$. $(58^2 = 3364.)$

Bei $d_9 \sim \frac{9}{3} a_9$ lässt sich nicht, wie vorher, ein etwas kleinerer Werth für $\frac{9}{3}$ bestimmen, und man hat demnach $F_9 = \frac{9}{4} a_9^2 \sqrt{\frac{81}{9} - 1} = \frac{9}{4} a_9^2 \sqrt{8} = \frac{9}{4} a_9^2 \sqrt{\frac{8.36}{36}} = \frac{3}{8} a_9^2 \sqrt{288} \sim \frac{3}{8} a_9^2 .17$. $(17^2 = 289.)$ Da aber $\frac{51}{8}$ offenbar zu gross war, so gab **Hero** in ähnlicher Weise wie bei c_5 noch den etwas kleineren Werth $\frac{19}{3}$ an. $(51.3 - 19.8 = 1.)$

* Cantor, S. 336.
** Cantor, S. 337.

Setzt man

$$d_{10} \sim \tfrac{13}{4} a_{10} \; (10.4 - 3.13 = 1),$$

so ist

$$F_{10} = \tfrac{10}{4} a_{10}^2 \sqrt{\tfrac{169}{16} - 1} = \tfrac{5}{8} a_{10}^2 \sqrt{153} > \tfrac{5}{8} . 12\, a_{10}^2 = \tfrac{15}{2} a_{10}^2.$$

Für $d_{11} \sim \frac{25}{7}$ (es ist zwar $11.7 - 25.3 = 2$, allein 25 und 7 sind zwei entsprechende Pythagoräische Werthe) erhalten wir

$$F_{11} = \tfrac{11}{4} a_{11}^2 \sqrt{\tfrac{625}{49} - 1} = \tfrac{11}{4} a_{11}^2 . \tfrac{24}{7} = \tfrac{66}{7} a_{11}^2.$$

Bei c_{12} gilt dasselbe von $\frac{12}{3}$, was bei c_9 von $\frac{9}{3}$ gesagt würde; wir erhalten demnach

$$F_{12} = \tfrac{12}{4} a_{12}^2 \sqrt{16 - 1} = 3 a_{12}^2 \sqrt{\frac{15.16}{16}} > 3 . \tfrac{15}{4} a_{12}^2 = \tfrac{45}{4} a_{12}^2.$$

Unsere oben aufgestellten Formeln mit Ausnahme der IV), V) und VI) lassen sich in eine Regel zusammenfassen, die grosse Aehnlichkeit mit der indischen Regel des Bhaskâra haben würde; aber auch Beispiele von Näherungswerthen nach der VI)ten Formel glaube ich bei den Indern angeben zu können. Setzt man nämlich den nach der II)ten Formel gefundenen Werth $\sqrt{2} < \frac{17}{12}$ in die VI)te Formel ein, so erhält man

$$\sqrt{2} = \tfrac{17}{12} \sqrt{\frac{2.144}{289}} = \tfrac{17}{12} \sqrt{\tfrac{1152}{1155}} < \tfrac{17}{12} . \tfrac{1153}{1155} \text{ oder } \tfrac{17}{12} \left(1 - \tfrac{2}{1155}\right).$$

Dieser Werth ist darum interessant, weil in ihm die beiden Näherungswerthe für $\sqrt{2}$ enthalten sind, welche von Baudhâyana in den „Çulvasûtras“ angegeben sind. Es ist nämlich

$$\tfrac{17}{12} \left(1 - \tfrac{2}{1155}\right) = 1 \tfrac{4}{12} + \tfrac{1}{12} - \tfrac{17}{12} . \tfrac{2}{1155}.$$

Will man mit drei Gliedern abbrechen und im dritten Zähler 1 erhalten, so muss man 34 durch Kürzen wegzubringen suchen. Setzt man 1156 statt 1155, so ist $\frac{34}{12.1156} = \frac{1}{12.34}$ und wir haben alsdann

$$\sqrt{2} = 1\tfrac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34},$$

ganz wie es Baudhâyana angiebt.

Ein zweiter Näherungswerth für $\sqrt{2}$ tritt nicht unmittelbar auf, sondern muss erst aus einer Regel des Baudhâyana in Verbindung mit einer Näherungsconstruction abgeleitet werden.

In den „Çulvasûtras“ findet sich nämlich die Lösung der Aufgabe: ein gegebenes Quadrat in einen Kreis zu verwandeln. Aus der hierbei* angewandten Näherungsconstruction lässt sich leicht die Beziehung zwischen Quadratseite und Durchmesser ableiten und zwar wird die Quadratseite gleich Durchmesser mal $\dfrac{3}{2 + \sqrt{2}}$ sein. Thibaut hat zuerst den Gedanken gehabt, hiermit die von Baudhâyana gegebene Regel, den Kreisdurch-

* Cantor, S. 546.

messer mit $\frac{7}{8}+\frac{1}{8.29}-\frac{1}{8.29.6}+\frac{1}{8.29.6.8}$ zu vervielfachen, um die Quadratseite zu erhalten, in Verbindung zu bringen. Und wirklich geht auch der Factor $\frac{3}{2+\sqrt{2}}$ in den von **Baudhâyana** gegebenen Ausdruck über, wenn man statt $\frac{3}{2+\sqrt{2}}$ den gleichwerthigen Factor $\frac{3}{2}(2-\sqrt{2})$ nimmt und $\sqrt{2}=\frac{17}{12}(1-\frac{2}{1155})$ setzt. Es wird alsdann

$$\frac{3}{2}(2-\sqrt{2})=\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{12}+\frac{3}{2}\,\frac{17}{12}\cdot\frac{2}{1155}=\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{12}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{17}{1155}=\frac{7}{8}+\frac{2}{8}\cdot\frac{17}{1155}.$$

Will man nun nach indischer Weise ausser der ersten Zahl noch drei Näherungsstammbrüche erhalten, so darf man weder 1156 für 1155 schreiben, noch auch $\frac{34}{1155}=\frac{35}{1155}-\frac{1}{1155}$ setzen, denn im ersten Falle würde man einen und im zweiten Falle nur zwei Näherungsstammbrüche erhalten. Setzt man $\frac{17}{1155}=\frac{20}{1160}-\frac{20.1155-17.1160}{1155.1160}=\frac{1}{58}-\frac{169}{58.1155}$ so geht der obige Ausdruck über in

$$\frac{7}{8}+\frac{1}{8.29}-\frac{338}{8.29.6.385}=\frac{7}{8}+\frac{1}{8.29}-\frac{385}{8.29.6.385}+\frac{47}{8.29.6.385}$$
$$=\frac{7}{8}+\frac{1}{8.29}-\frac{1}{8.29.6}+\frac{1}{8.29.6.8},$$

wenn man $\frac{47}{385}$ näherungsweise $=\frac{1}{8}$ setzt, um abzubrechen. Der indische Werth $\sqrt{3}=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3.5}-\frac{1}{3.5.52}$* beruht offenbar auf der Erkenntniss, dass der ja auch von **Baudhâyana** gebrauchte Werth $\frac{26}{15}$ um $\frac{1}{780}$ grösser als $\frac{1351}{780}$ ist, denn es ist hiernach $\sqrt{3}=\frac{1351}{780}=\frac{26}{15}-\frac{1}{780}=1\frac{10}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{780}$ $=1\frac{2}{3}+\frac{1}{3.5}-\frac{1}{3.5.52}$.

Zum Schluss möge noch eine kurze Betrachtung der nicht gerade zahlreichen Wurzelwerthe, die bei den Rabbinen vorkommen, stattfinden. Nach **Günther** p. 37 und 38 sind dieselben $\sqrt{2}\sim\frac{4}{3}$, $\sqrt{2}\sim\frac{7}{5}$, $\sqrt{13}\sim\frac{18}{5}$ und $\sqrt{5000}>70\frac{2}{3}$.

Die drei letzten Werthe können ganz nach der bei den Griechen angewandten Schlussweise berechnet werden.

$$r_0\ \sqrt{2}=\sqrt{\frac{2.25}{25}}=\sqrt{\frac{49+1}{25}}>\frac{7}{5}\ \text{und}\ \sqrt{13}=\sqrt{\frac{13.25}{25}}=\sqrt{\frac{324+1}{25}}>\frac{18}{5}\cdot$$

wie ich mit Rücksicht auf den Beitrag zur Geschichte der Mathematik von Dr. E. **Mahler** in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1882 annehmen möchte.

$$\sqrt{5000}=\sqrt{\frac{5000.9}{9}}=\sqrt{\frac{45000}{3}}>\frac{212}{3}=70\tfrac{2}{3}.\ (212^2=44944.)$$

---

* **Günther**, S. 42.

In diesem Falle wussten die jüdischen Weisen, wie es im Jerusalemitischen Talmud heisst, den Werth nicht genauer anzugeben.

Der erstgenannte Werth $\frac{4}{3}$ lässt sich der Formel $\sqrt{\frac{a^2}{(p+1)(p-1)}} \sim \frac{a}{p}$ anpassen, wenn man $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{16}{2.4}} \sim \frac{4}{3}$ setzt. Doch möchte ich hier lieber mit Günther* annehmen, dass $\frac{4}{3}$ seine Entstehung als Näherungswerth für $\sqrt{2}$ blos roher Empirie, nicht mathematischer Ueberlegung verdankt, zugleich noch bemerkend, dass eine der obigen ähnliche Schlussweise zu einer einfachen Erklärung der von einem gewissen Pheidon gebrauchten Näherung $\sqrt[3]{\frac{25}{18}} \sim \frac{10}{9}$** führt. Nimmt man nämlich p^2 als Näherungswerth von $(p+1)(p-1)$ an, so muss auch offenbar $p^3 \sim (p+1)\,p\,(p-1)$ sein. Man kann nun $\sqrt[3]{\frac{25}{18}} = \sqrt[3]{\frac{125}{90}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{9.10}}$ setzen. Da $8 = 2^3$, so erhält man durch Erweitern mit dieser Zahl $\sqrt[3]{\frac{25}{18}} = \sqrt[3]{\frac{5^3.2^3}{8\;9.10}} \sim \frac{10}{9}$.

* Günther, S. 39.

** Günther, S. 51.

Recensionen.

Ueber Herrn Professor Weyrauch's „Theorie der elastischen Körper“ etc.

Duplik zu S. 142 und 278 flg. im vorigen Bande.

Was Herr Prof. Weyrauch durch Citation aus meinem Briefe „richtig stellen“ zu müssen glaubt, ist wohl kaum erfindlich, Er bestätigt ja im vierten Alinea selbst die Wahrheit meiner diesbezüglichen Aussage. Dem Leser können allerdings meine Briefstellen jetzt zur Ueberzeugung dienen, dass ich den übernommenen Recensentenberuf mir nicht leicht machen wollte. Allerdings ward die freudige Voraussetzung, die in literarischen und experimentellen Arbeiten meinerseits auf solchen Gebieten wurzelte, auch durch das Erscheinen des Aufgabenbuches nicht erfüllt.

Die „Schwierigkeiten“ betreffend (5. Alinea), spricht u. A. Ritter in der von Herrn Prof. W. citirten Recension (8. Alinea) neben der „Bewunderung des Eingeweihten“ von „Unverständlichkeit für den Anfänger“ und Wiltmann* äussert: „Allerdings wird selbst der in der Handhabung des mathematischen Apparates Geübte manche Schwierigkeiten finden, wenn ihm nicht zugleich auch die erforderliche Reife und Schulung des mathematischen Denkens zu Gebote stehen.“ Dagegen lauten die Schlussworte des Verfassers in der Vorrede: „Von mathematischen Vorkenntnissen nehmen wir soviel in Anspruch, als sich Jeder auf den Mittelschulen oder doch nach einjährigem Besuche der Hochschule erworben haben kann.“

Die im 6. Alinea mir aufgebürdete „Unrichtigkeit“ muss ich zurückgeben. Selbst wenn ich übersehen hätte, dass der Herr Verfasser im selben Satze von der „specifischen Massenkraft“ und von der „specifischen Flächenkraft“ spricht, so ist doch immer die Kraft für die Masse 1 gleich der Beschleunigung. Und die „elastische Nachwirkung“ (7. Alinea), ob diese in eine im Jahre 1884 erscheinende, „der Sache und der Darstellung nach“ theilweise neue „Theorie der elastischen Körper“ gehört oder nicht, darüber kann man seit einigen Jahren verschiedener Ansicht sein.

Die kurze Anzeige des Aufgabenbuches erklärt sich nach dem Früheren nunmehr wohl von selbst. Mein Standpunkt ist (wohl naturgemäss) ein mittlerer zwischen den durch Ritter's Worte vorhin angedeuteten Standpunkten des Eingeweihten und des in die „neue Sache und Darstellung“ Einzuweihenden. Im Grunde genommen, machten auch Ritter und Wiltmann nur den Leser auf die „Theorie etc.“ aufmerksam. Um ferner gar

---

* Grashof's Recension steht mir nicht zur Verfügung. Wied. Beiblätter, 1884, S. 408—411, enthalten eine Besprechung des Herrn Verfassers selbst.

keinen Zweifel übrig zu lassen, ob meine Schilderung der Beziehung des Aufgabenbuches zur „Theorie etc." „wieder nicht ganz richtig" sei, mögen aus dem Vorworte des Aufgabenbuches die Worte folgen: „Zu jeder Aufgabe ist angegeben, nach welchem Paragraphen der Theorie ihre Einschaltung gedacht ist."

Das 10. Alinea handelt von meiner Erwähnung der Brochure des Herrn Verfassers, die mir Herr Professor Cantor nachträglich noch zugesandt hatte, auf dass ich hierüber etwa gleichzeitig referire. Da hat aber Herr Prof. W. augenscheinlich mich selbst unrichtig citirt, indem ich ausdrücklich Robert Mayer als den „Autor" genannt habe. Eine Verwechselung meinerseits wäre sonst allerdings „unbegreiflich". Was auch ein Helmholtz im Jahre 1847 „Kraft" genannt hat, würde ich im Jahre 1885 insbesondere „zur Orientirung" lieber mit „Energie" benennen.

Schliesslich (11. Alinea) ist jetzt jede der genannten Schriften zum dritten Male der Leserwelt dieser Zeitschrift nahegelegt worden. Die „Urtheile" — ich habe mich, wie gesagt, eines solchen enthalten — werden nach meiner Vermuthung, insbesondere wenn gewogen und nicht blos gezählt, mindestens zum Theil negativ lauten. Ob ich die „nöthige Vorsicht" dabei versäumte — dies kann ich in mehrfacher Beziehung selbst zugeben.

Kurz.

Wittwer, **Grundzüge der Molekularphysik und der mathematischen Chemie.** Stuttgart, Wittwer. 1885.

Der Verfasser hat seit einer Reihe von Jahren seine mathematischen Untersuchungen über Erscheinungen aus den Gebieten der Physik und Chemie in dieser Zeitschrift veröffentlicht. 1871 erschien eine Zusammenstellung seiner Arbeiten unter dem Titel: Die Molekulargesetze. (Leipzig, Teubner.) Nunmehr legt er seine späteren, besonders der Chemie gewidmeten Arbeiten gesammelt vor.

Im I. Abschnitte seines Buches entwickelt der Verfasser mit mehrfacher Bezugnahme auf sein früheres Werk seine Ansichten über die Constitution der Körper. Sein Bestreben ist — wie die Kenner seiner früheren Veröffentlichungen wissen —, der Newton'schen Auffassung der Naturkräfte auch auf dem Gebiete der molekularen Erscheinungen Geltung zu verschaffen. Das Bewegende als Fernewirkung zu denken, ist eine Anschauungsweise, die auf allen Gebieten so schöne Früchte getragen hat, dass es immer wie ein Axiom erschien, auch die Molekularerscheinungen müssten mit solchen Mitteln einer umfassenden mathematischen Behandlung zugänglich sein, obschon sie bisher jedem tiefergehenden Versuche in dieser Richtung widerstanden haben.

Der Verfasser folgt auch darin noch den herrschenden Anschauungen, dass er auf dem Boden des Atomismus steht. Im Raume denkt er sich

discrete (kugelförmige) Atome vertheilt und schreibt die meisten Verschiedenheiten der Körper den Verschiedenheiten in der Aneinanderlagerung dieser Theilchen zu.

Ich hebe den Anschluss der principiellen Ausgangspunkte des Verfassers an die herrschenden Anschauungen hervor, da es von Bedeutung ist, zu sehen, wie weit man durch die mathematische Verfolgung dieser Ideen auf den Gebieten der Molekularerscheinungen gelangen kann. Es mehrt sich ja die Zahl Derer, welche Fortschritte im mathematischen Naturerkennen nur von dem Aufgeben der Vorstellungen des Atomismus und der Fernewirkung hoffen und vor Allem in der stetigen Raumerfüllung eine Quelle weiterer Erkenntniss suchen. Gerade diesen Gegnern des principiellen Standpunktes, den der Verfasser vertritt, möchten dessen Ausführungen als ein Massstab für die Berechtigung ihrer eigenen Ansichten von Interesse sein.

Die Atome denkt sich der Verfasser theils als Massenatome, theils als Aetheratome. Von ersteren nimmt er soviel der Grösse nach verschiedene Arten an, als chemische Elemente existiren; die Aetheratome sind von einander nicht verschieden. Alle diese Atome üben Fernwirkungen aus, die dem Newton'schen Gesetze folgen, wobei Gleichartiges sich abstösst, Ungleichartiges sich anzieht. Der Verfasser bemerkt sehr richtig, dass seine Massentheilchen der negativen, seine Aethertheilchen der positiven Elektricität entsprechen; seine Ansichten berühren sich demnach mit gewissen von Zöllner vertretenen Annahmen. Er unternimmt es nun, aus den Kräften seiner Atome alle bekannten Naturkräfte herzuleiten. An Stelle des Newton-schen Gesetzes müsste wohl das Weber'sche treten, wenn auch die elektrodynamischen Erscheinungen in den Bereich der Untersuchung gezogen würden.

Die Anziehungen und Abstossungen der Atome haben zur Folge, dass jedes Massentheilchen mit einem oder einigen Aethertheilchen in Berührung tritt, die sich gleichförmig über seine Oberfläche vertheilen. Eine solche Combination von Theilchen ist ein „Atom im chemischen Sinne"; dasselbe bildet um sich eine Dynamide, indem es die Dichtigkeit des umgebenden Aethers verändert. Die Dichtigkeit der Dynamiden und deshalb auch des Körperäthers ergiebt sich nun geringer als die des freien Aethers. Um dieses von den Eigenschaften der Redtenbacher'schen Dynamiden abweichende Resultat mit den Ergebnissen der Lichtbrechung in Uebereinstimmung zu bringen, führt der Verfasser in der bekannten Formel $c = \sqrt{(e:d)}$ nicht nur d, sondern auch e als Function des Atomabstandes ein. Im Interesse der Klarheit wäre es wünschenswerth, dass der dabei benutzte Begriff der linearen Dichtigkeit eines Körpers genau definirt oder überhaupt vermieden würde.

Der Hauptinhalt des Buches, der II. Abschnitt, ist der Untersuchung einiger chemischen Atome und ihres gegenseitigen Verhaltens gewidmet. Die Gruppirung der Aetherkugeln um die Massenkugel ist ohne Einfluss auf die Wirkung in weite Ferne, ermöglicht aber mannigfache Wirkungsweisen

in Bezug auf benachbarte Atome. Diese Mannichfaltigkeit nöthigt den Verfasser oft zu einer willkürlich erscheinenden Wahl; dadurch wird es wohl möglich, der einen oder andern experimentell festgestellten Thatsache zu genügen, aber man gewinnt nicht den Eindruck, dass der Theorie Voraussagen möglich seien, wie sie der Newton'schen Anschauung auf anderen Gebieten so glänzend gelungen sind. Vor Allem hindert das auch die mathematische Complication. „Die Grundlagen der chemischen Erscheinungen“, sagt der Verfasser selbst S. 38, „sind wohl sehr einfach, aber in der Anwendung giebt es der Haken allerlei. So einfach das Gravitationsgesetz ist, so haben doch viele Erscheinungen, die durch dasselbe hervorgerufen werden, wie z. B. die Störungen, den Astronomen schon viele Arbeit gemacht, und derartige Sachen, wie die Störungen, erwarten den rechnenden Chemiker in noch höherem Grade, als den rechnenden Astronomen. Man steht hier einem Gewirre von Erscheinungen und Wirkungen gegenüber, bei dem es oft sehr schwer fällt, den Weg zu finden, und es wird darum auch keinen Mangel an Fehlschlüssen geben. Ganz geringfügig erscheinende Umstände sind mitunter von höchster Bedeutung. Grosse Schwierigkeiten bietet die rechnerische Behandlung des Gegenstandes, denn fort und fort hat man mit vielgliedrigen Ausdrücken zu kämpfen. ... Ich verlasse mich jedoch hier auf das: Kommt Zeit, kommt Rath. Hat sich einmal das Bedürfniss ordentlich eingestellt, so werden sich auch bei der mathematischen Behandlung des Stoffes Mittel und Wege finden lassen, von denen man zur Zeit keine Ahnung hat.“ Also gerade an dem Punkte, wo unter allen Umständen — mögen die Hypothesen gewählt werden, wie sie wollen — nach unserer Auffassung das grosse Problem der mathematischen Chemie beginnt, muss der Verfasser beinahe die Waffen strecken. Selbst zugegeben, dass dies an der ganzen bisherigen Entwickelung der Mathematik liegt und daher nicht ihm persönlich zur Last fällt, so spricht es doch gegen den Nutzen seiner Hypothesen, da es hindert, dass dieselben zur Zeit fruchtbringende Leitfäden für Experimentaluntersuchungen sein können.

Andererseits verdient hervorgehoben zu werden, dass die Theorie einen guten Anschluss an einzelne Thatsachen gewinnt. Die Abhängigkeit der Atomvolumina von den Atomgewichten, die periodische Abhängigkeit des elektrischen Verhaltens der Elemente vom Atomgewicht fügen sich gut der Theorie ein, und der Verfasser verfehlt nicht, sie zu Nutzen seiner Ansichten zu verwerthen.

Im III. Abschnitt wird die Wärme als eine schwingende Bewegung der Atome behandelt. Die Folgen der zwischen benachbarten Atomen eintretenden Stösse werden nur an Zahlenbeispielen erörtert. Wäre an Stelle dieser schwerfälligen Darstellung nicht die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Weise Maxwell's angezeigt?

Die schwingenden Theile üben aufeinander eine Newton'sche Fernwirkung aus, die sich als abhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung

erweist. So ergiebt sich die Abhängigkeit der Volumzunahme von der Temperaturzunahme. Sehr ansprechend ist der Gedanke, jene sei als eine (algebraische) Function dieser darstellbar, dergestalt, dass der Uebergang eines Körpers aus einem Aggregats- oder allotropen Zustande in einen andern auf dem Imaginärwerden eines Zweiges der Function beruhe. Die dafür angeführten mühevollen Beweise aus Beobachtungen sind freilich nicht ausreichend: es hätte doch — von anderen Punkten abgesehen — gezeigt werden müssen, dass die Beobachtungen zweier verschiedener Zustände einer und derselben Gleichung entsprechen und verschiedene Werthereihen derselben Function darstellen, während der Verfasser nur zeigt, dass das Imaginärwerden einer Function, die sich einigen Beobachtungen eines Zustandes anschliesst, mit der beobachteten Temperatur der Zustandsänderung zusammenfällt.

Ich hob oben hervor, dass die Untersuchungen des Verfassers auf den älteren Principien der Physik fussen. Wie fern er zum Theil den modernen Anschauungen gegenübersteht, tritt besonders an einer Stelle scharf hervor. Dem Gesetze der Wärmeäquivalenz schreibt er keine umfassende Bedeutung zu; es gilt nach ihm nur für Gase; wo innere Arbeiten eingeführt werden müssen, bezeugen diese nur, dass eben das Gesetz nicht gilt. —

Viele begegnen theoretischen Untersuchungen, wie die sind, denen der Verfasser seine literarische Thätigkeit gewidmet hat, nur mit kühler Abweisung. Freilich lässt sich nicht verkennen, dass die Experimentaluntersuchungen trotz der eifrigen Arbeit der Chemiker uns erst an die Schwelle der tieferen Einsicht in die chemischen Beziehungen geführt haben, also für theoretische Grundlegungen noch wenig herangereift sind. Wir kennen z. B. das chemische Verhalten der meisten Körper nur innerhalb geringer Druckgrenzen, ja theilweise nur zwischen mässigen Temperatur- oder Potentialdifferenzen. Andererseits aber lehrt die Geschichte der exacten Wissenschaften, wie gewaltig oft eine glücklich ersonnene Hypothese die experimentelle Arbeit gefördert hat. Deshalb reizen doch mit vollem Rechte die dunklen Gebiete zu immer neuen Anläufen.

Helm.

F. Hartner, **Handbuch der niederen Geodäsie.** 6. Aufl., bearbeitet von J. Wastler. Wien, Seidel & Sohn. 1885. XII und 786 S. mit 425 Holzschnitten und 2 Tafeln. Preis 16 Mk.

Das vorstehend angekündigte Handbuch erschien zuerst 1852. Mit der Bearbeitung der 5. Auflage hat Hartner Herrn Professor Wastler in Graz beauftragt, welcher nun nach Hartner's Tod auch die vorliegende 6. Auflage besorgte. Nebst Bauernfeind's Elementen der Vermessungskunde, welche ebenfalls in 6. Auflage vorliegen und deren 1. Auflage auch ungefähr zur selben Zeit wie Hartner's Buch erschien (1856—1858), und

dem ersten Bande des Handbuchs der Vermessungskunde von Jordan ist das angezeigte Werk das am weitesten verbreitete Lehrbuch der niederen Geodäsie.

Das Buch hat in der neuen Auflage gegenüber der fünften wesentliche Erweiterungen erfahren und ist in dieser neuen Form noch besser als seitdem geeignet, dem Studium der niederen Geodäsie, soweit diese überhaupt aus Büchern zu erlernen ist, zu Grunde gelegt zu werden. Wenn ich mir im Folgenden trotzdem einige Aenderungsvorschläge erlaube, so bitte ich, daraus lediglich auf das grosse Interesse zu schliessen, welches ich an den ferneren Umgestaltungen des Buches nehme.

Zunächst möchte ich auf Mängel der Raumvertheilung in dem Werke hinweisen, auf eine gewisse Ungleichförmigkeit in der Ausführung der einzelnen Partien; es werden nicht selten nebensächliche Dinge mit grosser Ausführlichkeit vorgeführt auf Kosten thatsächlich wichtiger Gegenstände. Auf der einen Seite wird z. B. angestrebt, ein Stück Geschichte der geodätischen Instrumente einzuflechten, wogegen in einem Handbuche wohl nichts zu erinnern gewesen wäre, wenn die Idee gleichmässig und in gedrängter Form zur Durchführung gekommen wäre, was aber nicht der Fall ist. Ein anderes als historisches Interesse können die früheren dioptrischen Instrumente, das Astrolabium, die (übrigens nicht erwähnte) Zollmann'sche Scheibe, die Kanalwaage, die Wallwaage u. s. f. heute doch kaum mehr beanspruchen. An Stelle der beiden letzteren wäre wohl besser eines der kleinen Instrumentchen, welche zu flüchtigen Nivellements bei generellen Höhenaufnahmen oder Tracenstudien neben dem Nivellirinstrument gute Dienste leisten, aufzunehmen gewesen (Meydenbauer's Pendelspiegel, Patentgefällmesser von Mayer; der letztere ist nur in einer Anmerkung erwähnt). Ferner ist eine Reihe von Gegenständen aufgenommen, welche kaum in einem Handbuche der niederen Geodäsie gesucht werden können; wozu die ausführliche Beschreibung der Heliotrope, wozu gebrochenes Fernrohr und Prismenocular, wozu die lange Beschreibung von Sextant, Spiegelkreis, Prismenkreis, da diese letzteren Instrumente für die Horizontalwinkelmessung gar nicht mehr und für die Höhenwinkelmessung der niederen Geodäsie neben dem Höhenkreise der Theodolite und neben der Mikrometerschraube kaum je in Frage kommen? Sodann ist veralteten Messungsmethoden ein sehr breiter Raum gegönnt, so besonders den Horizontalaufnahmen mit dem Messtische. Es ist allerdings ganz ungerechtfertigt, den Messtisch überhaupt als einen veralteten Apparat zu bezeichnen, wie dies neuerdings ziemlich allgemein geschieht. Er ist für die Aufnahme von Höhencurven bei formenreichem Terrainrelief, besonders für Aufnahmen topographischer Art in kleinerem Massstabe, ein unersetzliches Instrument. Eine sorgfältige Höhenaufnahme dieser Art mit dem Messtische wird die Höhencurven in richtigerer Gestalt, besonders charakteristischer im Detail liefern, als eine Aufnahme mit dem Tachymetertheodolit bei

gleicher Zahl der Höhenpunkte, indem im ersten Falle eine Menge von werthvollen Notizen und Einträgen nach dem Augenmaass gleich bei den betreffenden Punkten gemacht werden können, welche bei der Curvenconstruction treffliche Dienste leisten. Die nachträgliche Vergleichung der aus einzelnen mit dem Theodolit aufgenommenen Punkten construirten Curven mit der natürlichen Oberflächenform hat meist nicht viel Werth, und da die zur Aufnahme einschliesslich der Ausarbeitung erforderliche Zeit für beide Methoden, wie dem Referenten zahlreiche Versuchsmessungen ergeben haben, nahezu gleich ist, so ist der Messtisch mit Tachymeteraufsatz häufig (natürlich nicht immer) vorzuziehen. Das der Aufnahme zu Grunde liegende Situationsnetz ist aber, wie bereits angedeutet, besser durch Triangulirung und Stationirung mit dem Theodolit herzustellen, selbst für ziemlich ungenaue Aufnahmen; und zu genaueren Horizontalaufnahmen, aus welchen später z. B. Grundstücksflächen entnommen werden sollen, ist der Messtisch in Ländern, in welchen der Grund und Boden nicht ganz werthlos ist, nicht mehr zu gebrauchen.

Warum sind endlich mehrere Distanzmesserconstructionen, zum Theil ausführlich, beschrieben, welche auf dem Princip der Parallaxenmessung beruhen, da doch diese Instrumente, welche für militärische Zwecke gut genug sein mögen, für geodätische Messungen alle zusammen nichts taugen? Sogar keines der neuen „Schnellcotirinstrumente", die speciell als Ersatz des gewöhnlichen Tachymeters mit Fadendistanzmesser, gutem Fernrohr und groben, leicht lesbaren Theilungen construirt sind, wird das zuletzt genannte Instrument verdrängen können.

Dieser breiten Ausführung unwichtiger Dinge — bei welcher man nur dankbar sein muss, dass nicht auch noch die Beschreibung jener grossen Reihe von „Forstinstrumenten" der niedersten Geodäsie aufgenommen ist, welche meist erfindungslustige Forstleute zu Schöpfern haben und sich durch nichts vor den sonst üblichen Instrumenten auszuzeichnen pflegen, als durch ihre Unbrauchbarkeit — steht nun auf der andern Seite vielfach eine grosse Knappheit in der Behandlung wichtiger Gegenstände gegenüber.

Bei Beschreibung der Winkelmessung mit dem Theodolit ist z. B. keines der angegebenen Winkelprotokolle bequem und übersichtlich und von der Messung mit Compensation ist erst beim Repetiren die Rede. Nirgends ist ferner eine genügende Anleitung zum Messen der Höhenwinkel gegeben. Die aufgestellten Nivellementsformulare sind ebenfalls nicht bequem; es giebt deren bekanntlich nur zwei gute, von welchen ich nach mehrjährigem Gebrauche beider nebeneinander, das neuere mit Trennung der Rückwärts-, Zwischen- und Vorwärtsablesungen und der Horizont- und Punkthöhen, sowie mit einer sehr einfachen Rechnungscontrole, vorgezogen habe. Dieses Formular scheint nicht so allgemein verwandt zu werden, wie es seiner Uebersichtlichkeit wegen insbesondere für den Beginn des Studiums verdiente. Eine erschöpfende Anleitung zu den verschiedenen Methoden der

Querprofil-Aufnahme fehlt. Die graphischen Ausgleichungsmethoden, welche vielfach für die niedere Geodäsie von Bedeutung sind, finden sich kaum gelegentlich erwähnt. Die Angaben über das Abstecken von Kreisbögen, wie über die Aussteckungen überhaupt sind ebenso dürftig ausgefallen. Es fehlt z. B. bei den Kreisbögen die Methode der rechtwinkligen Coordinaten mit runden Abscissenintervallen, welche der allein angeführten Methode der Aussteckung unter sich gleich weit abstehender Bogenpunkte, wobei deren Abscissen und Ordinaten unrunde Zahlen werden, fast immer vorzuziehen ist. Die so überaus wichtige Tachymetrie muss sich an einem Anhang genügen lassen, und wie wenig gerade dieser dem thatsächlichen Bedürfniss entspricht, möge daraus hervorgehen, dass die bequemen Rechnungsmittel, welche die Tachymetrie erst zu diesem Namen berechtigen, nicht angeführt werden. Im ganzen Buche ist die Rechenmaschine nicht erwähnt; speciell in diesem Anhang fehlt eine bequeme Rechnungsvorschrift für den Reichenbach'schen Distanzmesser, fehlt jede Andeutung über den Wild'schen Rechenschieber oder die Jordan'schen Diagramme und Hilfstafeln.

Zum Schluss dieser allgemeineren Bemerkungen möchte ich noch darauf hinweisen, dass mir die Rechnung mit sechsstelligen Logarithmen, welche der Verfasser durchgängig anwendet, unzweckmässig scheint, da die Genauigkeit derselben über die in der niederen Geodäsie angestrebte meist wesentlich hinausgeht. So lange es sich bei Rechnungen im Coordinatensystem um so kleine Coordinatendifferenzen handelt, wie der Verfasser stets voraussetzt, vor Allem also bei allen polygonalen Zügen, ist die Anwendung fünfstelliger Tafeln geboten, und nur ausnahmsweise kann daneben eine sechsstellige Tafel für die Aufgaben des Vorwärts- oder Rückwärtseinschneidens bei langen Visuren erforderlich sein.

Es möge mir nun noch gestattet sein, einige wenige der Wünsche, welche ich im Einzelnen hätte, namhaft zu machen. Das Princip, den Gebrauch der Instrumente der Angabe ihrer Rectification, beim Theodolit sogar der Beschreibung des Instruments selbst voranzustellen, wird nicht durchaus zu billigen sein. S. 19 und 20 wird für den Centesimalgrad *degré* bezw. ^{d} geschrieben, für die Minuten und Secunden $'$ $''$, während dann später (S. 280) wieder einfach ^{0} $'$ $''$ dafür steht; es empfiehlt sich hier sehr, die Minuten und Secunden bei Centesimaltheilung gar nicht besonders zu bezeichnen. S. 24 wird empfohlen, sich für das Abschreiten einen bestimmten Schritt anzugewöhnen und noch dazu den kleinen Normalschritt (0,75 m) des österreichischen Militärs, was entschieden nicht zu empfehlen ist. S. 125 hätte von der Messkette gesagt werden sollen, dass sie nicht mehr anzuwenden sei und S. 127 von den Messbändern aus Hanf und den Messschnüren, dass sie zu gewöhnlichen Längenmessungen gar nicht, zu gewissen Zwecken aber (hydrometrische Arbeiten z. B.) mit Vortheil zu gebrauchen sind. S. 141 und später ist nur die letzte der angegebenen Latten als einigermassen zweckmässig getheilt zu bezeichnen, dagegen fehlt auch

bei ihr vollständig die Angabe einer rationellen Bezifferung, welche bekanntlich für die Sicherheit und Raschheit der Arbeit von grösster Bedeutung ist. S. 145 ist die Verschiebbarkeit der Distanzfäden beim Fadendistanzmesser als wünschenswerth bezeichnet. Referent hat jedoch stets feste Fäden vorgezogen wegen der jahrelangen Unveränderlichkeit der Constanten, auch wenn die „Fäden“ nicht auf einem Glas- oder Glimmerblättchen angebracht sind; feine Metallfäden, zu denen man zum Theil wieder zurückkehrt, sind Spinnfäden wegen der hygroskopischen Eigenschaften der letzteren vorzuziehen. Es ist allerdings nicht möglich, beim Einziehen fester Fäden die Entfernung derselben so zu reguliren, dass die vom Verfasser mit K bezeichnete Constante genügend genau gleich einer gewünschten runden Zahl werde. Es ist dies aber, sobald man zur Ermittelung von D eine mittelst der Rechenmaschine hergestellte Tabelle anwendet, auch gar nicht nothwendig und ferner machen verschiebbare Distanzfäden eine viel häufigere Bestimmung von K erforderlich, als feste. S. 165 wäre bei dem Winkelspiegel in Verbindung mit dem Spiegelkreuz die Anordnung der beiden Instrumente übereinander (wie bei den von Goldschmid und seinen Nachfolgern hergestellten Instrumenten) statt nebeneinander vorzuziehen. S. 166 fehlt die neuere Construction des Bauernfeind'schen Prismenkreuzes. S. 179 ist nicht beachtet, dass bei kleinen Theodoliten meist eine auf die horizontale Axe aufsetzbare Libelle gar nicht vorhanden ist. Ueber die Rectification der Libellenaxe bezw. der vertikalen Drehaxe wird nichts gesagt. S. 199 fehlt eine Angabe über die Justirung des Schraubenmikroskops. S. 211 hätte wohl besser eine der ausgezeichneten Breithaupt'schen Bussolen mit centrischem Fernrohr Aufnahme gefunden. S. 282 muss der Leser zunächst den Eindruck bekommen, als ob der Refractionscoefficient eine Constante sei; die nachträglichen Bemerkungen S. 615 werden nicht genügen. S. 324, bei der sehr ausführlichen Behandlung der Messtischlösungen der Pothenot'schen Aufgabe, wäre vielleicht entschiedener, als es geschieht, darauf hinzuweisen, dass die zahlreichen Hilfsmittel zur mechanischen Lösung der Aufgabe, welche meist auf das Princip des alten englischen Dreischenkelzirkels hinauskommen, unbrauchbar sind, indem dieselben bei wesentlicher Einbusse an Genauigkeit keine Vereinfachung oder Zeitersparniss gegenüber der bekannten indirecten Methode ergeben. S. 418 wäre zu erwähnen, dass die directe Berechnung der Kleintriangulirungen und Stationirungen mittelst fünf-, in einzelnen Fällen vierstelliger Logarithmen mindestens ebenso bequem und sicher ist, als die mittelst der angeführten Koppeltafeln. S. 444, 445 u. a. a. St. ist zu bemerken, dass die „Vermessungsvorschriften VIII und IX“ (ich will hinzufügen, leider) nur für Preussen gelten. In dem Abriss der Methode der kleinsten Quadrate (S. 460—524) hätte wohl auch noch eine Andeutung über die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen Aufnahme verdient. S. 537 wäre die Bemerkung erwünscht, dass

man sich die parallelen Fäden des Oldendorp'schen Planimeters für viele Zwecke ersetzen kann durch gut getheiltes Millimeterpapier, welches zudem das Auftragen der betreffenden Figuren erleichtert. Es giebt z. B. bei Flächenberechnungen in Querprofilen kein einfacheres und besseres Mittel, als das der mechanischen Ordinatenaddition mit dem gewöhnlichen Zirkel, wenn die Profile auf gutes Millimeterpapier aufgetragen sind. S. 546 ist der einfache Amsler'sche Polarplanimeter nicht erwähnt. Obgleich Miller v. Hauenfels, dessen Instrument in der Starke'schen Modification beschrieben wird, seinen Polarplanimeter etwas vor Amsler construirt zu haben scheint, so gebührt doch dem Letzteren, der seine Entdeckung unabhängig machte, das Verdienst, durch die einfachen und billigen Instrumente, welche aus seiner Fabrik hervorgingen, die allgemeine Anwendung des Polarplanimeters ermöglicht zu haben; und trotzdem, dass sein Instrument an Genauigkeit durch die neueren Abänderungen weit überholt ist, ist es doch so allgemein eingebürgert, dass es unbedingt aufzunehmen wäre. Warum (S. 591) die Methode des doppelten Copirens genauer sein soll, als die unmittelbar vorher behandelte (dritte) Methode des einfachen Durchstechens, ist nicht einzusehen. S. 596 fehlt die Erwähnung des Pantographen von Ott und Coradi in Kempten, welcher doch gerade als der brauchbarste bezeichnet werden muss. S. 650 wird, obgleich auf S. 638 richtig angegeben ist, dass das Aneroid beim Gebrauch im Etui zu belassen sei, empfohlen, auf den einzelnen zu bestimmenden Punkten eine Viertelstunde zuzuwarten, wozu nicht viele Geometer Zeit haben werden. Die S. 761 angegebene Latte für tachymetrische Aufnahmen kenne ich nicht aus Erfahrung, glaube aber nicht, dass sie besonders praktisch ist. Da man hier von vornherein von grosser Genauigkeit der Arbeit absieht, so ist es zweckmässig, für einigermassen bedeutende Entfernungen (etwa von 200 m an für die gewöhnlichen Fernröhren) auf Ablesung der mm zu verzichten und deshalb eine Latte anzuwenden, welche durch starke, etwa 1 cm breite Striche nur in dm getheilt ist und an welcher dann durch Schätzung cm abgelesen werden. Auf der Latte können dann die Meterzahlen so gross angeschrieben werden, dass sie stets lesbar sind, was der vom Verfasser mitgetheilten Anordnung, welche zu Irrungen leicht Anlass geben muss, sicher vorzuziehen ist.

Erfreulich ist, dass das Werk fast ganz frei ist von den sprachlichen Besonderheiten, welche sich sonst bekanntlich zahlreich in österreichischen Büchern, zumal technischen, zu finden pflegen.* In der nächsten Auflage würde es sich wohl empfehlen, die jetzt noch beibehaltene alte Schreibweise der Wörter Azimuth, Zenith zu Gunsten der neuen zu verlassen.

* In einem solchen ist mir z. B. einmal der Ausdruck „portative Katastralmappe“ aufgestossen, der ausserhalb Oesterreichs nicht überall ohne Weiteres verständlich sein wird.

Das Buch ist vortrefflich ausgestattet und seine Benutzung durch ein umfangreiches Register erleichtert. In dem letzteren fehlt das Wort Theodolit.

Einer besonderen Empfehlung bedarf selbstverständlich das treffliche Werk nicht mehr; dass es dem Bedürfniss eines stets sich erweiternden Leserkreises entspricht, hat es durch die Reihe seiner Auflagen bewiesen.

Stuttgart, im Juli 1885. HAMMER.

Die Erforschung der Schwere durch Galilei, Huygens, Newton als Grundlage der rationellen Kinematik und Dynamik, historisch-didaktisch dargestellt von JULIUS HENRICI. Beilage zum Jahresbericht des Heidelberger Gymnasiums für das Schuljahr 1884—1885. 4° 40 S. Bei B. G. Teubner, Leipzig. 1885.

Das gegenwärtig in Deutschland am meisten verbreitete Lehrbuch der Mechanik, das von H. G. Kirchhoff, hat als Aufgabe sich gestellt, „die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben“. So gerechtes Aufsehen diese Definition bei ihrem ersten Erscheinen machen musste, in ihrem bewussten Gegensatze gegen die Mechanik der Kräfte, wie sie von den meisten früheren Schriftstellern aufgefasst wurde, so war sie doch nicht ganz ohne Vorgänger. Herr M. A. Stern unterscheidet in seinen Zusätzen zur deutschen Uebersetzung von Poisson's Mechanik (Berlin 1835, Bd. I, S. 552 flgg.) eine hypothetische Mechanik der Kräfte von einer Einwürfen weniger ausgesetzten Mechanik der Bewegungen, und Referent hörte im Winter 1850—1851 bei eben diesem seinem verehrten Lehrer in Göttingen eine Vorlesung über höhere Mechanik, in welcher wirklich nur von Bewegungen die Rede war. Ist nun die moderne Bewegungslehre der alten Kräfteuntersuchung so schnurstracks entgegengesetzt, dass die alten Ergebnisse der Sicherheit verlustig werden, die man ihnen mehrere Jahrhunderte lang, wenn wir auch nur bis auf Galilei zurückgreifen wollen, zuschrieb? Die Bejahung dieser Frage war im höchsten Grade unwahrscheinlich, nachdem auch die Lehrbücher neuesten Schnittes zu Ergebnissen leiten, die von den älteren sich kaum anders als im Wortlaute unterscheiden. Aber es lohnte doch die Frage zu stellen, und das hat nun Herr Henrici gethan. Er hat in ausführlichen und genauen Auszügen gezeigt, wie die Galilei, Huygens, Newton ihre Lehren aufbauten. Er hat aus diesen Auszügen mit dem Takte des philosophisch denkenden Lehrers herausgeschält, was von neuen Ideen in dem alten Gewande sich barg, und hat so eine Abhandlung geschaffen, welcher er mit Fug und Recht die Bezeichnung als historisch-didaktisch beilegen durfte und welche wir in beiden Beziehungen einer allgemeinen Kenntnissnahme recht sehr empfehlen dürfen.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. bis 30. November 1885.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 15. Bd. 2. Abth. München, Franz. 10 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathemat.-naturwissenschaftl. Classe, Abtheil. II. 91. Bd., 4. u. 5. Heft. 92. Bd., 1. Heft. Wien, Gerold. 13 Mk. 50 Pf.

Mélanges mathématiques et astronomiques, tirés du bulletin de l'académie imp. des sc. de Pétersburg. T. VI, livr. 3. Leipzig, Voss. 1 Mk.

Archiv der Mathematik und Physik, begr. v. Grunert, fortges. v. R. Hoppe. 2. Reihe, 3. Theil, 1. Heft. Leipzig, Koch. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgeg. v. E. Schönfeld und H. Seeliger. 20. Jahrg. 1885. 3. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. von A. Krüger. 113. Bd. (24 Nrn.) Nr. 1. Hamburg, Mauke Söhne. pro compl. 15 Mk.

Geschichte der Physik.

Servus, H., Die Geschichte des Fernrohrs bis auf die neueste Zeit. Berlin, Springer. 2 Mk. 60 Pf.

Reine Mathematik.

Baumgart, O., Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Reuschle, C., Graphisch-mechanischer Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen. Stuttgart, Metzler. 2 Mk. 80 Pf.

Oppolzer, Th. v., Ueber die Auflösung des Keppler'schen Problems. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Mk. 20 Pf.

Gordan, P., Vorlesungen über die Invariantentheorie; herausgegeben von G. Kerschensteiner. 1. Bd.: Determinanten. Leipzig, Teubner. 6 Mk. 40 Pf.

Curtze, M., Liber trium fratrum de geometria. Nach der Lesart des Codex Basileensis mit Einleitung und Commentar herausgeg. (Leop.-Carol. Akademie). Leipzig, Engelmann. 3 Mk. 50 Pf.

Dingeldey, F., Ueber die Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch Bewegungsmechanismen. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Weyr, E., Ueber Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlecht 1. 2. Mitth. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Wiese, B. u. W. Lichtblau, Sammlung geometrischer Constructionsaufgaben. Hannover, Meyer. 2 Mk. 80 Pf.

Angewandte Mathematik.

Herz, N., Lehrbuch der Landkartenprojection. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Neumann, F., Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers, herausgegeben von O. E. Meyer. Ebendas. 11 Mk. 80 Pf.

Physik und Meteorologie.

Lehmann, O., Physikalische Technik, spec. zur Selbstanfertigung physikalischer Apparate. Leipzig, Engelmann. 8 Mk.

Mann, F., Grundzüge einer Undulationstheorie der Wärme. Neue Bearbeitung. Würzburg, Stahel. 2 Mk. 50 Pf.

Oettingen, A. v., Die thermodynamischen Beziehungen, antithetisch entwickelt. (Petersb. Ak.) Leipzig, Voss. 2 Mk.

Rühlmann, R., Handbuch der mechanischen Wärmetheorie. 2. Bd. 3. Lief. (Schluss.) Braunschweig, Vieweg. 10 Mk., compl. 46 Mk.

Himstedt, F., Eine Bestimmung des Ohm. Freiburg i. B., Mohr. 1 Mk. 60 Pf.

Planté, G., Untersuchungen über Elektricität. Uebers. v. G Wallentin. Wien, Hölder. 5 Mk. 60 Pf.

Sprung, A., Lehrbuch der Meteorologie. Hamburg, Hoffmann & Campe. 10 Mk.

Bredichin, Th., Sur les oscillations des jets d'émission dans les comètes. (Acad.) Leipzig, Voss. 1 Mk. 20 Pf.

Fig. 17.

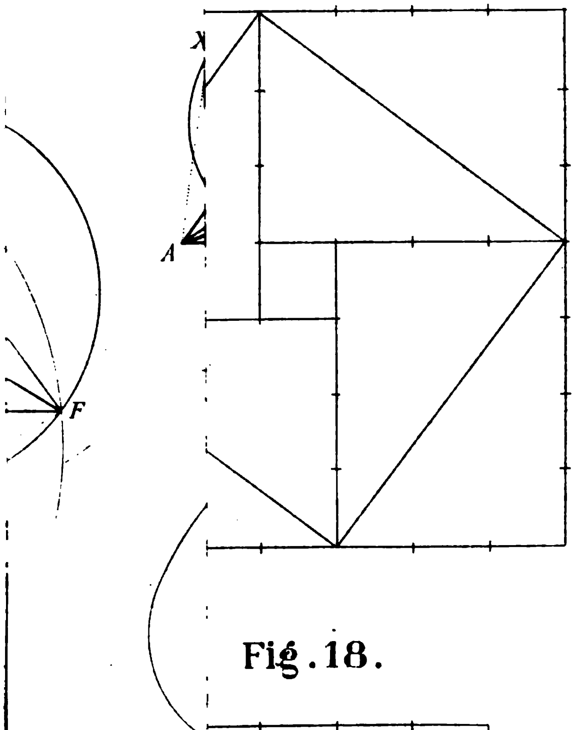
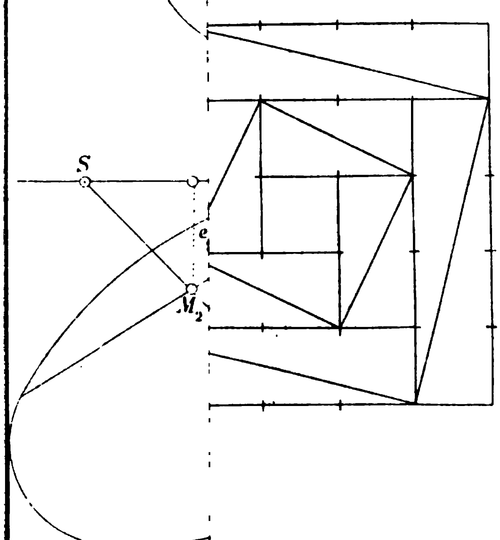


Fig. 18.



INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Historisch-literarische Abtheilung.

Wilhelm Unverzagt.

Ein Nekrolog von einem ehemaligen Schüler.

Vor wenigen Wochen hat man in Wiesbaden einen Mann zu Grabe getragen, dessen Wirken als Lehrer und Vertreter der mathematischen Wissenschaften ihn eines Nachrufs an dieser Stelle dürfte werth erscheinen lassen — den Director der vormaligen Oberrealschule zu Wiesbaden, Herrn Professor Unverzagt.

Wilhelm Unverzagt wurde am 17. December 1830 als der zweite Sohn des Schmiedes Ludwig Unverzagt zu Bad Ems geboren. Schon in der Elementarschule seines Heimathsortes zeigte er so hervorragende Geistesanlagen, dass seine Lehrer in den Vater drangen, einen so talentvollen Knaben weiter ausbilden zu lassen. Dieser, welcher den Sohn anfangs für den eigenen Beruf bestimmt hatte, gab schliesslich ihrem Drängen nach und sandte ihn, da Ems selbst noch keine höhere Schule besass, im Herbste 1844 auf die Realschule nach Wiesbaden, von welcher er im folgenden Frühjahre auf das zu dieser Zeit ins Leben gerufene Realgymnasium derselben Stadt überging. Das Erbtheil des väterlichen Hauses, Sinn für bescheidene und gediegene Arbeit, begleitete ihn in die neue Schule, an welcher er bald alle seine Kameraden überflügelte. Was ihn damals anspornte, sehen wir aus seinen eigenen (von einem Bruder überlieferten) Worten: „Ich dachte an meinen Vater, der, ein einfacher Handwerker, wegen etlicher Arbeiten, in denen er Meister war, in Ems und der Umgegend ein besonderes Ansehen genoss, und auch an meinen Bruder, der dem Vater auf diesem Wege folgte, und ich sagte mir: Was sie in ihrem Berufe fertig bringen, das musst du in dem deinigen, den du ihrer Opferwilligkeit verdankst, erst recht leisten — und ich arbeitete mit dreifachem Fleisse.“

Im Frühjahre 1850 machte er das Maturitätsexamen und widmete sich dann auf den Universitäten Marburg und Göttingen dem Studium der Mathematik und der neueren Sprachen. Er blieb der Anstalt, auf der er seine Vorbildung genossen, nicht lange ferne. Nachdem er zu Beginn des Jahres 1854 das

Staatsexamen ehrenvoll bestanden, wurde er zu Ostern desselben Jahres dem Realgymnasium zu Wiesbaden als Probecandidat zugewiesen. Es entsprach nur seiner Arbeitskraft und Arbeitslust, dass ihm sofort eine grössere Anzahl von Stunden übertragen wurde. Unter schwerer Arbeit trat er in den Dienst, schwere Arbeit war sein ganzes Lebenslos; aber sie sichert ihm auch das treue Gedenken aller derer, in deren Herzen er den Sinn für Arbeit gepflanzt hat.

Zwei Jahre verblieb er in dieser Stellung, dann ging er zu seiner weiteren Ausbildung auf ein Jahr nach Paris. Neben dem Studium der französischen Literatur fesselte ihn dorten namentlich das Studium der französischen Mathematiker. Bei seiner Rückkehr wurde er als Collaborator an der städtischen höheren Bürgerschule angestellt, die gerade damals von dem Realgymnasium war abgezweigt worden, und wirkte dann vier Jahre an derselben.

Zu Ostern 1861 kehrte er zum zweiten Male an das Realgymnasium zurück. Nachdem er an demselben schon seit einem halben Jahre mit wöchentlich neun Stunden Aushilfe geleistet hatte, wurde er der Anstalt als Conrector überwiesen und lehrte von da an an derselben 16 Jahre lang Mathematik und Französisch in den oberen Classen. Hiermit hatte er einen Wirkungskreis gefunden, der seinem Wollen und Können in gleicher Weise entsprach, und rasch kam innerhalb desselben seine Thatkraft zur vollen Entfaltung.

Kurz vor Unverzagt's Rückkehr zur Anstalt nämlich war der damalige Director, der rühmlichst bekannte Mathematiker J. H. T. Müller, in der Lage gewesen, die beiden Jahrgänge der Prima in den wichtigsten Lehrfächern zu trennen. Mit dieser Trennung hatte er eine Erhöhung der Ziele des mathematischen Unterrichts verbunden, indem er von Frühjahr 1860 an in der Oberprima Differential- und Integralrechnung lehrte. Um dieselbe Zeit begann der Unterricht in der darstellenden Geometrie nach streng mathematischer Methode durch alle Classen der Anstalt. Hiermit hatte der Lehrplan der Anstalt die Gestalt gewonnen, die er 22 Jahre hindurch trotz mancher Anfechtungen in den letzten Jahren seiner Geltung im Wesentlichen beibehielt, bis ihm die Ministerial-Verfügung vom 31. März 1882 ein Ende bereitete. Der Schöpfer dieser Consolidation konnte sich seines Werkes nur kurze Zeit freuen; er starb schon in den Frühjahrsferien des Jahres 1861.

Sein Schüler Unverzagt wurde sein Nachfolger im Unterrichte und diese Nachfolge war auch eine solche des Geistes mit der durch die Individualität bedingten Modification. An dem von Müller aufgestellten Grundsatze: „Der Lehrstoff ist so anzuordnen, dass der Schüler den Plan, nach welchem er verarbeitet wird, jederzeit übersehen und selbst construiren kann“, hielt er getreulich fest. Schon hierdurch war sein Unterricht anregend; er wurde es in noch höherem Grade durch den Geistesreichthum

und die Lebhaftigkeit des Lehrers. Ueberall stand das Princip der Entwickelung in dem Vordergrunde: die einzelnen Wahrheiten traten in den meisten Fällen nicht von vornherein in der Form fertiger Lehrsätze vor den Schüler, sondern erschienen als das Resultat einer Untersuchung, deren Abschluss auf neue Untersuchungen hinwies. Dabei hob Unverzagt besonders scharf die Resultate hervor, welche über den in den Grenzen des Schulunterrichts liegenden Stoff hinauswiesen, und deutete an, wie sie weiter verfolgt werden könnten. Das war für die befähigten Schüler ein starker Impuls zu selbstständigem Studium und weckte in allen Sinn und Liebe zur Wissenschaft. Zur Verstärkung dieser Impulse trug seine Lehrthätigkeit noch in anderer Weise bei. Seine klare Einsicht in die verschiedenen Methoden der mathematischen Forschung, verbunden mit der grossen Elasticität seines Geistes, ermöglichten es ihm, denselben Stoff vor den gleichen Schülern von vielen Gesichtspunkten aus zu beleuchten und in verschiedenen Jahren von verschiedenen Gesichtspunkten aus zu bearbeiten. Beispielsweise liess er in einem Jahre die Kegelschnitte zuerst gesondert untersuchen, indem er die Schüler die Eigenschaften jeder Curve aus ihrer speciellen Definition entwickeln liess, wobei er aber fortwährend auf die übereinstimmenden Merkmale aufmerksam machte, und zeigte dann nachher, wie diese geometrischen Oerter in der allgemeinen Gleichung zweiten Grades einen gemeinsamen Ausdruck finden, wie ihre Eigenschaften aus dieser einheitlichen Basis abgeleitet werden können und wie endlich der Gemeinsamkeit der Eigenschaften die Gemeinsamkeit des geometrischen Ursprungs zu Grunde liegt.

Im nächsten Jahre, vor anderen Schülern, schlug er dann wohl den umgekehrten Weg ein, stellte die allgemeine Gleichung zweiten Grades an die Spitze und verfolgte, von ihr ausgehend, die einzelnen Kegelschnitte bis zur Erschöpfung ihrer Eigenschaften. Hatte er einen besonders beanlagten Jahrgang vor sich, so befolgte er wohl zunächst den ersten der bezeichneten Wege, um dann bei der Generalrepetition den zweiten einzuschlagen.

Da er unaufhörlich bemüht war, zur Vereinfachung des Lehrstoffes oder zur Erweiterung des Gesichtskreises der Schüler neue Gesichtspunkte zur Geltung zu bringen, die er entweder selbst ausfindig machte oder der Literatur entnahm, so war der ganze Unterricht in steter Entwickelung und Vervollkommnung begriffen.

Bei solcher Lehrmethode traten die üblichen Lehrbücher naturgemäss in den Hintergrund. An die Stelle des Studiums derselben traten Bearbeitungen der wichtigsten Abschnitte durch die Schüler selbst, oder gar Ausarbeitungen des gesammten Lehrganges, die von dem Lehrer controlirt wurden. Das war die richtige und nothwendige Vorbereitung der Zöglinge für den Uebergang aus der gebundenen Arbeit der Schule zu dem freien Studium auf der Universität. Einzelne der erwähnten Ausarbeitungen haben für manche

Schüler noch eine recht wohlthätige Rolle bei Gelegenheit ihrer Vorbereitung zum Staatsexamen gespielt, andere den späteren Lehrern recht nützliche Winke für ihren Unterricht gegeben.

Die Rückwirkung solcher Lehrthätigkeit auf den Lehrer selbst blieb nicht aus. Sein unausgesetztes Streben, durch Einführung neuer, selbst geschaffener Gesichtspunkte den Unterricht zu vervollkommnen, führte ihn bald zu Untersuchungen, die über den Kreis der Schule hinaus gingen: aus einem genialen Lehrer entwickelte sich ein tüchtiger Vertreter der mathematischen Wissenschaften. In der ersten von ihm veröffentlichten Abhandlung, die als „Festschrift des Realgymnasiums zur 25jährigen Jubelfeier des Herzogs von Nassau" im Sommer 1864 erschien, sucht er eine Erweiterung der darstellenden Geometrie anzubahnen. Das ihm vorschwebende Ziel markirt er durch die Frage: „Ist es möglich, eine Projectionsmethode zu erfinden, welche Zeichnungen liefert, die eine mehrfache Bedeutung haben können, je nachdem man dieselben als Projectionen an Punkten oder an Ebenen auffasst?" Zur Lösung der so formulirten Aufgabe führt er die Methode des Dreipunkts ein, indem er jedes der Grundgebilde Punkt, Gerade und Ebene durch drei in einer Ebene — der einzigen Bildebene — liegende Punkte festlegt. „Liegt nun eine nach einem bestimmten Gesetze geordnete continuirliche Folge von geometrischen Elementen vor, so werden deren Bestimmungspunkte — deren Projectionen — auf der Bildebene im Allgemeinen drei Curven bilden. Umgekehrt können wir drei Curven der Bildebene als die Projectionen dreier Raumgebilde auffassen, wenn noch das Gesetz gegeben ist, wonach die Punkte der Curven zusammengehören, weil wir ja die drei Curven als Punkt-, als Geraden- und als Ebenenprojection betrachten können."

Einen ähnlichen Zweck verfolgt eine zweite, im Osterprogramm des Realgymnasiums von 1866 veröffentlichte Arbeit: „Ueber einige neue Projectionsmethoden." In derselben legt er zunächst den Raumpunkt durch zwei Punkte in der Bildebene fest und zeigt die Anwendbarkeit der so erhaltenen Zweipunktprojection an einer Reihe von Beispielen. Sodann bestimmt er die Gerade und die Ebene durch je zwei sich schneidende Gerade in der Bildebene und gelangt so zu einer Zweistrahlprojection. Schliesslich weist er nach, dass jedes der Elemente Punkt, Gerade und Ebene sowohl durch zwei Punkte, als auch durch zwei Strahlen projicirt werden kann. Hiermit ist die Möglichkeit gegeben, ein und dieselbe Projection auf dreifache Art zu interpretiren und dadurch ternär zusammenhängende Sätze über die Raumgebilde selbst zu erhalten.

Die beiden, wie man sieht, eng zusammenhängenden Untersuchungen sind reich an Andeutungen, die der weiteren Verfolgung werth erscheinen. Unverzagt selbst hat dieses Gebiet nicht weiter bearbeitet, wenigstens liegen von ihm weitere Abhandlungen in dieser Richtung nicht vor. Der Unterricht scheint seine wissenschaftliche Thätigkeit langsam auf ein anderes

Feld gelenkt zu haben. Um die damalige Zeit nämlich hatte er die Liniencoordinaten neben den cartesischen Coordinaten in den Unterricht der analytischen Geometrie eingeführt, um die Schüler daran zu gewöhnen, auch die Gerade als Element aufzufassen. Dabei hatte sich ihm die Ueberzeugung aufgedrängt, dass die üblichen Coordinatensysteme der Geraden den cartesischen Coordinaten an Einfachheit und damit an Brauchbarkeit für die Lehrthätigkeit nachstünden. Diesem Mangel suchte er durch Erfindung eines neuen Coordinatensystems abzuhelfen. So entstand seine im Osterprogramm des Realgymnasiums vom Jahre 1871 veröffentlichte Abhandlung: „Ueber ein einfaches Coordinatensystem der Geraden." Das neue System besteht aus zwei parallelen Geraden, den „Axen", die von einer dritten, der „Grundlinie", geschnitten werden. Eine Gerade ist bestimmt durch ihre Axenabschnitte, ihre „Coordinaten", die von der Grundlinie aus gemessen werden. In gründlicher Erörterung zeigt der Verfasser, dass dieses System „in Bezug auf Einfachheit, durchgehende Uebereinstimmung in seinem Rechnungsverfahren und seinen Resultaten mit den Untersuchungsweisen und Gleichungen bei cartesischen Punktcoordinaten, endlich aber auch durch die Leichtigkeit, mit der es den Uebergang zu eigenthümlichen, wie zu Plücker'schen homogenen Geradencoordinaten gestattet, sich vor anderen vortheilhaft auszeichnet." Den Schülern gegenüber erwies sich dasselbe dem entsprechend als ein äusserst geeignetes Mittel zur Einführung in die Geradencoordinaten und zur Uebung in der Lösung von Aufgaben.

Gereichte diese Arbeit zunächst der Schule zu besonderem Nutzen, so wurde sie doch auch bald für ihren Verfasser zum Ausgangspunkte neuer und wichtiger Forschungen. Um den aus seinem Coordinatensysteme fliessenden Gleichungen möglichst bequeme und einfache Form zu geben, hatte er eine neue Art Functionen erdacht — Quotienten zwischen den beiden Theilen einer Strecke —, denen er den Namen „longimetrische Functionen" gegeben hatte. In einer Anwendung derselben auf complexe Ausdrücke hatte er einen Factor zu ermitteln gesucht, welcher für die Geometrie der Geraden eine ähnliche Bedeutung habe, wie die Grösse i für die Geometrie des Punktes. Dabei war er auf einen Widerspruch zwischen den Resultaten einer rein geometrischen Betrachtung und denen einer entsprechenden arithmetischen Operation gestossen, den er zunächst nicht zu lösen vermochte. Von da an war seine ungetheilte Aufmerksamkeit diesem Gebiete zugewandt. Er suchte jenen Widerspruch nach dem Beispiele des berühmten französischen Mathematikers zu lösen *„en y pensant toujours"* — und er kam zu einer Lösung. Als Resultat einer mehrjährigen angestrengten Geistesarbeit erschien im Sommer 1876 sein Hauptwerk: „Theorie der goniometrischen und longimetrischen Quaternionen." Eine Skizze des Gedankenganges der umfangreichen Arbeit zu geben, die derselben einigermassen gerecht würde, ist hier nicht wohl thunlich. Auch ist sie wiederholt Gegenstand der wissenschaftlichen Discussion gewesen, die wir weiter unten in einem Falle

streifen werden. Bemerkt sei hier nur, dass die in dem Werke geführten Untersuchungen die Mathematik um die allgemeinen Winkelfunctionen und die longimetrischen Quaternionen bereicherten. Die wissenschaftliche Thätigkeit Unverzagt's war hiermit noch nicht abgeschlossen; wir werden ihr später nochmals begegnen. Nebenbei sei noch erwähnt, dass ihm bald nach der Veröffentlichung seines Hauptwerks durch Verfügung des preussischen Cultusministers der Titel „Professor" verliehen wurde; zum Oberlehrer war er 1872 befördert worden.

Naturgemäss war der Einfluss eines solchen Mannes auf die Schule, an welcher er arbeitete, ein sehr tiefgehender. Dieser Einfluss machte sich zunächst bei den Schülern geltend — wir haben ihn in dieser Hinsicht schon theilweise kennen gelernt —, wirkte aber auch wesentlich auf den Charakter der ganzen Anstalt und auf ihr Ansehen nach aussen ein.

Wir haben schon gesehen, in welcher Weise und in wie hohem Grade er in den Schülern den Sinn für Arbeit zu wecken und ihre selbständige Thätigkeit anzuregen vermochte. Aber wir würden sein Verhältniss zu den Schülern nur ungenügend kennzeichnen, wollten wir seine Lehrthätigkeit allein und auch diese nur nach ihrer wissenschaftlichen Seite beleuchten. Vielmehr müssen wir hier zunächst noch des persönlichen Verkehrs gedenken, in welchem er mit seinen Schülern stand. Mit einem cholerischen Temperamente verband er eine seltene Güte und Milde des Charakters, die in einem herzlichen und aufmunternden Entgegenkommen einen entsprechenden Ausdruck fanden. Daher wurde kaum je ein Lehrer häufiger im Hause von den Schülern — namentlich den voran strebenden — aufgesucht, als er; daher war auch seine halbe Bibliothek fast immer unterwegs. Solcher Verkehr gewann meistens an Tiefe, wenn die Zöglinge die Universität bezogen. Viele blieben in brieflichem Verkehre mit ihm und selten kehrte einer von ihnen in die Ferien zurück, der nicht Rath und Anregung bei ihm gesucht und gefunden hätte. Insbesondere konnten die, welche das Leben nicht auf einen grünen Zweig gesetzt hatte, jeder Zeit auf seinen energischen Beistand rechnen.

All das wirkte zusammen, um ihm die Liebe der Schüler zu gewinnen und um sein Ansehen bei ihnen zu einem unbegrenzten und unerschütterlichen zu gestalten. Und wiederum hieraus erklären sich der Ernst und die absolute Ruhe der Zöglinge während des Unterrichts; denn das Resultat einer rigorösen Disciplin waren dieser Ernst und diese Ruhe sicherlich nicht. Der Mann strafte ja nie. Wohl konnte er aufbrausen, wenn es bei den Repetitionen haperte, und dann schmetterte er zuweilen auch den tüchtigen Schüler, der seinen unglücklichen Tag hatte, mit wenigen sarkastischen Worten nieder; aber dem so niedergeschmetterten gab er bald Gelegenheit, durch bessere Leistungen die Scharte wieder auszuwetzen. Die üblichen Requisiten der praktischen Pädagogik dagegen, als da sind Einschreiben, Strafarbeit, Arrest, u. s. w. existirten für ihn nicht. Leid genug war es

ihm, wenn er als Classenlehrer für Andere davon Gebrauch machen musste. Nein, die musterhafte Ordnung, die freudige Aufmerksamkeit, die unter den Schülern während seines Unterrichts herrschten, waren das Resultat der freiwilligen Unterordnung des jugendlichen Geistes unter den Geist der ernsten, nach hohen Zielen ringenden Arbeit, der mit dem Manne einzog, und sie waren zugleich der Ausdruck der hohen Verehrung, die ihm Alle ohne Ausnahme von Herzen entgegenbrachten. Dieser Mann regierte eben in der Schule nicht durch die Gewalt seines Amtes, sondern durch die Kraft seines Geistes. Hiernach ist die Wärme, ja die Begeisterung wohl verständlich, mit welcher noch heute, nach zwanzig und mehr Jahren, Männer, die damals seine Schüler waren, von der Anstalt überhaupt und in Sonderheit von diesem Lehrer reden.

Und darum war die Mathematik, ohne eine Absicht von seiner Seite, ohne eine behördliche Anordnung und Vermehrung der Stundenzahl dieses Faches, viele Jahre hindurch der Mittelpunkt des gesammten Unterrichts der Anstalt; nur die Chemie machte ihr eine Zeit lang den Rang streitig. Und wenn die Anstallt allmälig einen Ruf errang, der über die Grenzen unseres Vaterlandes hinausreichte, so verdankte sie denselben zu einem nicht geringen Theile dem Einflusse dieses Mannes.

Das war, wie seinen ehemaligen Schülern und seinen Bekannten, so den gebildeten Kreisen der engeren Heimath sehr wohl bekannt. Ihnen Allen galt er als der geistige Träger der Anstalt, die ein weit vorgeschobener Vorposten des Realismus war. Darum sah man in ihm den Mann, der berufen sei, eine solche Anstalt dermaleinst auch nach aussen hin zu vertreten. In dieser Hoffnung aber wurde man bitter getäuscht.

Schon seit Frühjahr 1876 unterhandelte mit ihm die Wiesbadener Stadtbehörde, die über die Bedeutung Unverzagt's nicht im Zweifel sein konnte, um ihn für die freigewordene Rectorstelle der städtischen „höheren Bürgerschule“ zu gewinnen. Zögernd ging er anfangs auf die Verhandlungen ein; aber zu Beginn des Jahres 1877 kamen sie zum Abschluss und mit Ostern desselben Jahres trat er seine neue Stellung an. Er verliess das Realgymnasium, an dem er mit ganzem Herzen hing, an das ihn starke geistige Bande fesselten, in bitterem Schmerze und er ist dieses Schmerzes in seinem späteren Leben niemals ganz Herr geworden. Den Widerspruch, der in dieser Hinsicht zwischen seinen Gefühlen und seinen Handlungen zu bestehen scheint, werden wir hier nicht lösen.

Mit ungeschwächter Energie widmete er sich seinem neuen Amte. Das Beispiel der Pflichttreue und Arbeitsfreudigkeit, das er gab, das, bei entschiedener Betonung der Pflichterfüllung, echt humane Entgegenkommen den Collegen und Schülern gegenüber, konnten nicht ohne Wirkung bleiben. Unter seiner Leitung kräftigte sich die innere Tüchtigkeit der ihm unterstellten Anstalt und erhöhte sich ihr Ansehen nach aussen. Schon zu Ende des Jahres 1879 erhielt sie den Charakter als Realschule II. Ordnung ohne

Latein, deren Abgangszeugniss die Berechtigung zum Einjährig-Freiwilligen-Militärdienste in sich schloss, während diese Berechtigung bis dahin durch ein förmliches Abgangsexamen erworben werden musste. Zu Ostern 1884 endlich wurde die Schule auf sein Betreiben zur Oberrealschule erweitert. Doch diese Schöpfung ruhte auf zwei Augen und diesen Augen sollte es nicht beschieden sein, lange über das Gedeihen der jungen Schöpfung zu wachen — sie schlossen sich allzu frühe. Schon im Herbste des folgenden Jahres sank die Schule auf ihren früheren Rang zurück.

Die Stellung Unverzagt's als Director erschöpfte seine Thatkraft nicht. Zwar konnte ihn der Unterricht bei dem Charakter der ihm unterstellten Anstalt naturgemäss nicht mehr in dem Maasse wissenschaftlich anregen, wie seine frühere Lehrthätigkeit; aber für diese Anregung hatte er in seinem Hauptwerke bereits selbst gesorgt. In seiner Vorrede zu demselben hatte er sehr richtig gesagt: „Es giebt fast kein einziges Capitel der vorliegenden Arbeit, das nicht der Weiter- und Umbildung fähig wäre.“ Er nahm diese Weiterbildung selbst in die Hand. Zu Ostern 1878 veröffentlichte er eine Abhandlung unter dem Titel: „Der Winkel als Grundlage mathematischer Untersuchungen“. In derselben eröffnete er den Quaternionen ein neues Feld und gab zum Schluss einen beachtenswerthen Fingerzeig nach der Richtung, in welcher eine Fortentwickelung der ganzen Theorie angebahnt werden kann. Diese Arbeit und die Quaternionenlehre überhaupt erfuhren eine heftige Anfechtung in den „Polydimensionalen Grössen“ von Dr. H. Scheffler. Der genannte Autor suchte in der angeführten Arbeit den Nachweis zu führen, dass die Quaternionen überhaupt auf einem wissenschaftlichen Irrthume beruhen. Als Abwehr gegen diesen Angriff erschien im Osterprogramm der Realschule von 1881 Unverzagt's letzte wissenschaftliche Arbeit: „Ueber die Grundlage der Rechnung mit Quaternionen.“ Wie der Titel schon andeutet, stellte er darin die wissenschaftliche Grundlage der Quaternionen fest und lieferte damit eine werthvolle Ergänzung zu seinem Hauptwerke: „Theorie der goniometrischen und longimetrischen Functionen.“

Gerne hätte er sich diesen wissenschaftlichen Untersuchungen mit noch grösserem Nachdrucke hingegeben; aber was er ihnen an freier Zeit widmete, musste er mühsam den Anforderungen seines Amtes und des Wohles seiner Familie abgewinnen. In der oben angeführten Vorrede sagte er: „Wenn nicht alle Abschnitte des Werkes gleich ausführlich behandelt sind, so hat dies seinen Grund in dem Wunsche des Verfassers, Untersuchungen zu veröffentlichen und dadurch Forschungen zu veranlassen, deren Durchführung bei dem geringen Maasse an Zeit, das er dieser Seite seiner Thätigkeit widmen kann, nicht in seinen Kräften steht.“ Und dieses Wort von dem geringen Maasse der ihm für solche Arbeit verbleibenden Zeit war wahrlich keine Phrase. Ausser seiner dienstlichen Stellung und der Wissen-

schaft nahm auch noch ein Familienpensionat seine Kraft in Anspruch, das er gegen Ende der sechziger Jahre in seinem Hause für Knaben eröffnet hatte und das sich eines vortrefflichen Rufes erfreute. So ruhte auf seinen Schultern die dreifache Arbeitslast eines Mannes von normalen Kräften. Lange Zeit hindurch liess er sich von ihr nicht niederdrücken. Wenn Freunde über Widerwärtigkeiten bei ihm klagten, wusste er sie aufzumuntern, verstand er es wohl gar, vermöge des köstlichen Humors, der ihm zur Verfügung stand, die Sorgen von ihrer Stirn wegzuscherzen. Man schämte sich, muthlos zu sein, wenn man ihn gesprochen hatte. Die Thatkraft dieses Mannes schien unerschöpflich zu sein. Aber die jahrelange ununterbrochene Anstrengung aller seiner Kräfte musste endlich nachtheilig auf seine Gesundheit wirken. Schon seit Ende der siebziger Jahre hatte er mit einem Herzleiden zu kämpfen, zu dem sich bald Schlaflosigkeit gesellte. Trotzdem wollte er sich, gestützt auf die Erfahrungen früherer Jahre, zu einer wesentlichen Entlastung seiner selbst nicht entschliessen. Sie wurde ihm aber, wenigstens nach einer Richtung hin, von einer Seite zu Theil, gegen die er sich nicht wohl ablehnend verhalten konnte.

Unter den angeführten Verhältnissen nämlich war es ein ganz besonderes Glück für ihn, dass ihm eine Gemahlin zur Seite stand, die ihm geistig verwandt und ebenbürtig war. Sie leitete mit starker und kundiger Hand alle äusseren und inneren Angelegenheiten des grossen Haushaltes — sie hatte ihrem Manne fünf Kinder geschenkt — und, soweit es anging, auch des Pensionates. Dabei war ihr Humor noch unverwüstlicher, als der des Gatten; vor diesem Humor hielten die Falten auf der Stirne des Mannes nicht Stand. Eingeweiht in das Verständniss der tüchtigsten Vertreter unserer Kunst und Poesie, wusste sie ihrem Manne die wenigen Stunden der Muse zu Stunden wahrer Geisteserholung und Geisteserfrischung zu gestalten. Wer immer mit diesem glücklichen Familienleben in Berührung kam, fühlte sich von ihm erfrischt und wohlthuend angeregt, wie der Wanderer in der Sommerschwüle von der kräftigen, gesunden Bergesluft.

Aber gerade zu der Zeit, da eine solche Stütze dem Manne unentbehrlich geworden war, wurde sie ihm entrissen. Im Frühjahr 1884 starb diese seltene Frau plötzlich; kaum eine leise Warnung vor dem herannahenden Unheile war den Angehörigen vorher geworden. Wie grausam dieser Schicksalsschlag in das schöne Familienleben eingriff, wie tief und schmerzlich er den Mann verwundete, braucht nicht mehr gesagt zu werden. Seine Freunde fürchteten ernstlich für ihn. Anfangs noch schien er dem Schlage gewachsen zu sein; aber schon gegen Ende des Sommers traten seine körperlichen Leiden in verstärktem Maasse auf und zu ihnen gesellte sich jetzt eine tiefe Gemüthsverstimmung. Was jahrelange ungewöhnlich schwere Arbeit, Sorgen und Enttäuschungen nicht vermocht hatten, das hatte der Schmerz vermocht: er hatte das Gleichgewicht seiner Seele gestört. Zwar nahm er nach wenigen Wochen der Erholung im Spätherbste desselben

Jahres nochmals seinen Dienst auf, bald aber musste er auf jede anstrengende Thätigkeit verzichten. Er suchte in einer Heilanstalt in Bendorf Genesung, und es schien, als ob die Kraft seines Geistes den Sieg über sein Unglück davon tragen solle. Seine Wiederherstellung machte so rasche Fortschritte, dass seine Entlassung aus der Anstalt schon für Ende Februar 1885 und die Wiederaufnahme seiner dienstlichen Functionen für das Frühjahr in Aussicht genommen werden konnten. Freunde, die ihn während des Januar besuchten, kamen mit der frohen Nachricht zurück: „Er ist wieder der alte Unverzagt.“ Die Theil an ihm nahmen — und wie gross war ihre Zahl! — athmeten auf. Da legte das Schicksal zum letzten Male seine schwere Hand auf ihn. Ende Januar unternahm er von Bendorf aus einen Ausflug auf den gerade zugefrorenen Rhein, unterhielt sich dorten in der heitersten Stimmung mit Bekannten und trat dann einen Rheindamm entlang den Weg nach dem benachbarten Mühlhofen an, wo er verabredetermassen mit anderen Bekannten zusammentreffen wollte. Seitdem ist er lebend nicht mehr gesehen worden; er kam nicht nach Mühlhofen. Wahrscheinlich glitt er unterwegs aus, brach in das schon morsche Eis und besass nicht mehr Kraft genug, um sich aus dem kalten Wasser herauszuarbeiten. Erst im August wurde seine Leiche bei Porz unweit Deutz gelandet und zunächst unerkannt auf dem Kirchhofe bei Urbach begraben. Die Reste seiner Kleidung führten zur Erkennung der Leiche und am 3. October konnte er zur Seite seiner Gemahlin in Wiesbaden beigesetzt werden.

Viele ehemalige Schüler — meist schon Männer in der harten Schule des Lebens — und viele Freunde umstanden sein Grab, Schmerz und Trauer im Herzen um den treuen genialen Lehrer, um den gediegenen Vertreter der Wissenschaft, um den liebewerthen Freund. Aber ihr Schmerz verlor sich nicht in fruchtlose Resignation. Aus dem Grabe des Todten hallte ihnen die Losung des Lebenden nach:

„Auf zur Arbeit!“

Wiesbaden, im November 1885. August Schmidt.

Zur Erinnerung an Ludwig Scheeffer.

Inmitten regsten Schaffens, in schöner Jugendhoffnung ist Ludwig Scheeffer am 11. Juni 1885 zu München an den Folgen des Typhus und eines Lungenleidens verschieden. Er war geboren am 1. Juni 1859 zu Königsberg in Pr., wo er seine erste Jugend verlebte. Zwei in Heidelberg und Leipzig verbrachte Semester ausgenommen, hat er sich in Berlin

mathematisch-physikalischen und philosophischen Studien gewidmet und ebendort promovirt. Nachdem er hierauf ein Jahr als Candidatus probandus am Friedrich-Wilhelms-Gymnasium unter Schellbach's Leitung gelehrt und gelernt, habilitirte er sich zu München (Anfang 1884), wo er nur noch ein Jahr wirken sollte.

In der kurzen Frist, die seinem Schaffen vergönnt war, hat er der Wissenschaft durch eine Reihe origineller, klarer Untersuchungen wichtige Dienste geleistet. Die folgenden Zeilen wollen es versuchen, eine kurze Charakteristik dieser Arbeiten zu geben, dem Frühverstorbenen zum Gedächtniss.

Zum ersten Male trat Scheeffer an die Oeffentlichkeit mit der Promotionsschrift: „Ueber Bewegungen starrer Punktsysteme in einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit“ (Berlin 1880), in welcher die gleichförmigen Bewegungen solcher Punktsysteme studirt werden, d. h. diejenigen, für welche die Geschwindigkeitscomponenten nach n mit dem Körper verbundenen Axen unabhängig von der Zeit sind.*

Im Sommer 1882 war Scheeffer aus Gesundheitsrücksichten gezwungen, seine obenerwähnte pädagogische Thätigkeit zu unterbrechen und in den Alpen Erholung zu suchen. Hier entstand in ihm der Plan, sich der akademischen Laufbahn zu widmen und erst jetzt begann er auch, sich eingehender mit speciellen mathematischen Untersuchungen zu beschäftigen, zu denen er früher wenig Neigung gezeigt. Ein Jahr darauf habilitirte er sich in München mit der Abhandlung: „Ueber einige bestimmte Integrale, betrachtet als Functionen eines complexen Parameters“ (Berlin 1883). In ihr kommt der schon von Hankel (für die Euler'schen Integrale) angewandte Gedanke, eine charakteristische Functionalgleichung zur Bestimmung von Integralen mit complexem Parameter zu benützen, in einer vereinfachten und präcisirten Form — die gleichzeitig auch für weitere Fälle anwendbar ist — zur Geltung. Eine zweite, anschliessende Arbeit: „Zur Theorie der Functionen $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$“ (Journal f. Math., Bd. 97), zeigt die Möglichkeit, die genannten Functionen durch gewisse Functionalgleichungen zu definiren, welche direct sowohl zu den bekannten analytischen Ausdrücken, als auch zu deren Darstellung durch bestimmte Integrale führen.

Nun entstand in rascher Folge eine Reihe von Arbeiten, die einerseits in die moderne Functionentheorie, andererseits, und hier mit ganz besonderem Erfolge, in Fragen der Variationsrechnung eindringen.

Zu den ersteren, bei welchen ein häufiger Verkehr mit Georg Cantor von wesentlichem Einfluss gewesen, gehört zunächst ein nur auf elementare

* In neuester Zeit hat Killing die auf nichteuklidische Räume verallgemeinerte Frage behandelt (Crelle's Journal, Bd. 98).

Betrachtungen gestützter Beweis des Laurent'schen Satzes (Acta math., Bd. 4), wie ein solcher, unabhängig von den Cauchy'schen Integralbetrachtungen, zur Ergänzung der Weierstrass-Mittag-Leffler'schen Sätze wünschenswerth war.*

Eine nächste Arbeit behandelt die Frage der „Rectification" für eine durch eine eindeutige Function gegebene Curve, wenn weder über die Stetigkeit, noch Differentiirbarkeit derselben irgend eine Voraussetzung gemacht wird. Man wird sich hier erst über den Begriff „Länge" zu verständigen haben** und der Verfasser legt eine im Wesentlichen von Duhamel gegebene Definition der Länge mit Hilfe eines geradlinigen Polygonzuges von Secanten zu Grunde. Darnach kommt einer Curve eine Länge zu oder nicht, je nachdem für jeden Grenzübergang (bei successiver Einschaltung neuer Polygonseiten) der Grenzwerth der Länge aller solchen Polygonzüge derselbe bleibt oder sich ändert bez. unendlich wird. Auf Grund dieser Definition gelingt dem Verfasser, für gewisse Kategorien eindeutiger Functionen die Kriterien für die Existenz oder Nichtexistenz der „Curvenlänge" aufzustellen.

Die beiden folgenden Abhandlungen: „Zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen" (Acta, Bd. 5) behandeln die Erweiterung des bekannten Satzes: Wenn die Differentialquotienten zweier stetiger Functionen einer reellen Veränderlichen überall endlich und einander gleich sind, so unterscheiden sich die Functionen nur um eine Constante. Die allgemeine, hier anschliessende Frage ist die: In welchem Umfange muss in einem gegebenen Intervalle die Gleichheit der „Ableitungen"*** für zwei Functionen $F(x)$ und $f(x)$ bekannt sein, um daraus den Schluss $F(x) = f(x) + const.$ zu ziehen? Scheeffer zeigt: Der obige Schluss ist gestattet, wenn (in dem Intervall, für welches die Functionen betrachtet werden) die Stellen, an denen die Gleichheit der Ableitungen nicht nachgewiesen ist, eine abzählbare Menge bilden; aber er kann nicht gemacht werden, wenn die Menge jener „unbestimmten" Stellen eine „perfecte" Punktmenge (Cantor) bildet oder enthält. Unentschieden bleibt, ob es ausser diesen Kategorien einen Zwischenfall giebt, eine Frage, die mit der anderen nach der Existenz „nicht abzählbarer Punktmengen ohne perfecte Bestandtheile" gleichbedeutend ist. —

Die letzten Arbeiten Scheeffer's sind entstanden im Anschluss an eine Vorlesung über Variationsrechnung, mit der er seine Lehrthätigkeit

* Gleichzeitig ist ein Beweis von Mittag-Leffler selbst (Acta, Bd. 4) gegeben worden.

** Vergl. hier die Bemerkungen von Dubois-Reymond (Acta, Bd. 6).

*** Der Allgemeinheit und Präcision wegen ist die „obere oder untere Unbestimmtheitsgrenze" (Dubois-Reymond) des „vorderen oder hinteren Differentialquotienten" als Ableitung eingeführt.

in München eröffnete, und lebhaft angeregt durch einen engen, den gemeinsamen Interessen entsprungenen Verkehr mit Adolf Mayer.*

Die grosse Arbeit: „Die Maxima und Minima der einfachen Integrale zwischen festen Grenzen" (Math. Annalen, Bd. 25) giebt eine vollständige Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale. Um zu den Kriterien des Maximums und Minimums zu gelangen, muss die zweite Variation auf eine zur Discussion ihres Zeichens geeignete Form gebracht werden. Diese Transformation ist aber nur so lange giltig, als eine gewisse Determinante zwischen den Grenzen des Integrales nirgends verschwindet. Man war somit bisher gewissermassen gezwungen, das Nichtverschwinden dieser Determinante mit in die Kriterien aufzunehmen, ohne doch für die Nothwendigkeit dieser Bedingung zum Bestehen des Maximums oder Minimums selbst mehr als blosse Wahrscheinlichkeitsgründe anführen zu können. Diese wesentliche Lücke füllt Scheeffer aus, indem er direct zeigt, dass die zweite Variation stets zur Zeichenänderung gebracht werden kann, so oft jene Determinante zwischen den Grenzen ihr Zeichen wechselt. Zugleich aber gelingt es ihm, mit Zugrundelegung eines einfachen allgemeinen Princips, die gesammte Transformation der zweiten Variation selbst ihres künstlichen analytischen Apparates zu entkleiden und sie in vorwiegend geometrischer Weise auf einem neuen, naturgemässen Wege durchzuführen, wodurch erst der Zusammenhang und die innere Nothwendigkeit der seither benutzten Methoden klar zu Tage tritt. So giebt die Arbeit nicht blos eine wesentliche Ergänzung, sondern führt auch — insbesondere durch die anschauliche Darstellung — in die bisherige Theorie, über die sie ausführlich referirt, auf sicherem Wege ein. Eine hinzugefügte Note bezweckt hauptsächlich, den Giltigkeitsbereich der gewonnenen Kriterien streng abzugrenzen und hebt in dieser Hinsicht hervor, dass dieselben sich lediglich auf das rein analytische Maximum und Minimum beziehen, bei welchem die gegebene Curve nur mit solchen Curven verglichen wird, die nicht blos (wie bei den allgemeineren Untersuchungen von Weierstrass) innerhalb eines die gegebene Curve einschliessenden schmalen Flächenstreifens liegen, sondern überdies auch allenthalben nahezu parallel zu jener bleiben.

Eingehender noch wird für das einfachste Problem der Variationsrechnung, der letzte Punkt in dem Aufsatze: „Ueber die Bedeutung der Begriffe ‚Maximum' und ‚Minimum' in der Variationsrechnung" (Ber. d. sächs. Ges. d. W., März 1885, abgedr. Math. Ann., Bd. 26) besprochen. Dieser macht zunächst auf den Fehler aufmerksam, der in der üblichen Annahme liegt, dass jede beliebige Variation der unbekannten Function y sich durch eine willkürliche Function η und eine hinreichend kleine Zahl $\varkappa$ in der Form $\Delta y = \varkappa\eta$ wiedergeben lasse. Durch die Erkenntniss dieses

* Dessen Güte ich auch nachfolgende Mittheilungen, insbesondere bezüglich der nachgelassenen Arbeit Scheeffer's, verdanke.

Fehlers verliert aber der Schluss, dass ein Minimum sicher stattfindet, wenn die erste Variation des Integrales verschwindet und die zweite beständig positiv ist, seine frühere Evidenz und in der That zeigt ein einfaches Beispiel, dass der Satz nicht ausnahmslos richtig ist. Es macht sich daher weiter eine Revision der aus ihm gezogenen Kriterien des Minimums nöthig, die aber schliesslich zeigt, dass die letzteren trotzdem Geltung behalten, sobald man nur eine der früheren Bedingungen etwas enger fasst, als es für das Positivsein der zweiten Variation selbst erforderlich ist

In diesem Aufsatze weist Scheeffer bereits auf den Gegenstand hin, mit dem sich seine letzte fundamentale Arbeit beschäftigen sollte. In den Vorlesungen von Genocchi, Calcolo Differenziale (Turin 1884), hatte der Herausgeber, Giuseppe Peano, an einem höchst einfachen Beispiele dargethan, dass auch die bisherige Theorie des Maximums und Minimums der Functionen von mehreren Variabeln unhaltbar ist. Unabhängig davon war Scheeffer von der Variationsrechnung aus seinerseits zu demselben Resultate gelangt und stand eben im Begriffe, die betreffenden Untersuchungen druckfertig zu machen, als er von Peano's Bemerkungen erfuhr und hierdurch veranlasst wurde, die ganze Arbeit wieder vollständig von Neuem zu beginnen. Auf diese Weise entstand in der kurzen Zeit von Mitte Februar bis Mitte März 1885 die nachgelassene Abhandlung: „Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln“, die, von A. Mayer herausgegeben, in dem Journal für Mathematik erscheinen soll. Während Peano sich darauf beschränkt, die Fehler der alten Theorie aufzudecken und zu zeigen, wie man das, was von derselben noch richtig bleibt, auch wirklich streng beweisen kann, geht Scheeffer weit darüber hinaus und bringt auf vollkommen neuer Grundlage eine erschöpfende Theorie des Maximums und Minimums für Functionen von zwei Variabeln, die ein ganz anderes Aussehen hat, als die frühere. Sie zeigt nämlich, dass in der Entwickelung der Differenz $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)$ durchaus nicht immer die Summen der Glieder gleicher Ordnung in Δx und Δy den Ausschlag geben für das Zeichen der Differenz, sondern dass dieses auch von dem Ensemble mehrerer Glieder von verschiedenen Ordnungen abhängen kann. Wie man diese Glieder jedesmal findet, wird durch ein Verfahren entschieden, welches der Newton-Cramer'schen Regel zur Discussion der verschiedenen Zweige einer algebraischen Curve in der Nähe eines vielfachen Punktes entlehnt ist. Ueberhaupt bildet die Theorie der algebraischen Curven das Fundament der Untersuchung; für ihre ganze Anlage war der Gesichtspunkt massgebend, dass die Frage, ob die Function $f(x, y)$ im Punkte $x=a$, $y=b$ ein Minimum resp. Maximum erreicht oder nicht, identisch ist mit der, ob für die Curve $f(x,y)-f(a,b)=0$ der Punkt a, b ein isolirter Punkt ist oder nicht. Dass aber gerade nur die algebraischen Curven eine Rolle spielen, rührt von dem Fundamentalsatze der Arbeit her, der das Problem des Maximums und Minimums von

beliebigen Functionen (unter Ausschluss aller derjenigen besonderen Functionen, für welche überhaupt die Ableitung der Kriterien des Maximums und Minimums auf dem Wege der Potenzentwickelung von vornherein als unmöglich erkannt wird) auf ganze rationale Functionen zurückführt. Leider finden sich ausser diesem Satze nirgends Andeutungen darüber, wie man die Untersuchung auf Functionen von mehr als zwei Variabeln ausdehnen könnte.

Mit den klaren, ruhig exponirten, frisch geschriebenen Arbeiten, die wir im Vorstehenden zu charakterisiren versucht, ist auch Scheeffer's Persönlichkeit gezeichnet: Klar und bestimmt im Wollen und Thun, und dabei wohl über die Jahre gereift; anregend, lebhaft im Vortrag, wie im geselligen Verkehr; einfach, offenherzig, hingebend im vertrauten Umgange — so lebt er im Herzen Derer, die ihm im Leben näher getreten sind.

Hohen-Aschau, im September 1886. WALTHER DYCK.

Recensionen.

Erwiderung auf die Bemerkung des Herrn Dr. Haentzschel.

Auf die von Herrn Dr. Haentzschel im 1. Hefte des neuen Jahrganges dieser Zeitschrift S. 54 und 55 gemachte Bemerkung zu meinem im 5. und 6. Hefte des vorigen Jahrganges S. 257—273 und S. 305—324 abgedruckten Aufsatze: „Ueber die Vertheilung der inducirten Elektricität etc.“ gestatte ich mir zu erwidern:

Von der trefflichen Abhandlung des Herrn Dr. Baer: Die Function des parabolischen Cylinders, Programm des Gymnasiums in Cüstrin, 1883, erhielt ich leider zu spät Kenntniss, um sie noch in meinem Aufsatze erwähnen zu können. Der Inhalt jener Abhandlung hat aber, wie ich mich nachträglich, als mir dieselbe durch die Güte ihres Herrn Verfassers zugänglich gemacht worden war, überzeugt habe, keinen directen Einfluss auf den der meinigen. Insbesondere würde die Arbeit des Herrn Dr. Baer mich nicht veranlasst haben, wie Herr Dr. Haentzschel annimmt, dem auf S. 260 meiner Abhandlung befindlichen Satze die von Herrn Dr. Haentzschel vorgeschlagene allgemeinere Form zu geben. Denn einerseits beschäftigt sich jener Satz nur mit Cylinderflächen — er beantwortet die Frage: Für welche Cylinderflächen ist die Differentialgleichung $\Delta V = 0$ auf gewöhnliche Differentialgleichungen reducirbar? —, und andererseits dürfte die fragliche Ergänzung für Jeden, der mit der Theorie der Elektrostatik näher bekannt ist, wohl selbstverständlich sein.

Dies bewog mich, von einer Erwähnung jenes Zusatzes an der fraglichen Stelle abzusehen; doch habe ich am Schlusse meiner Arbeit, auf S. 324, seiner kurz gedacht. Auf einen Beweis des Zusatzes glaubte ich verzichten zu müssen, da sich derselbe in jedem neueren Werke über Potentialtheorie findet. (Vergl. z. B. Heine, Kugelfunctionen, II. Bd., S. 251 flg., Thomson, Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism., S. 144—177, Art. XIV: Electrical Images., namentlich S. 149 u. 173.)

Dresden, 4. Januar 1886. Dr. R. Besser.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie, von Dr. Christian Wiener, Geh. Hofrath und Professor an der grossherzogl. polytechn. Schule zu Karlsruhe. In 2 Bänden. 1. Band. 477 S. gr. 8°. Leipzig, B. G. Teubner. 1884.

Inhaltsverzeichniss:

Grundbegriffe.

1. Abschnitt. Geschichte der darstellenden Geometrie. Alterthum und Mittelalter. Die Perspective von der Renaissance bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts. Ausbildung des Grund- und Aufrissverfahrens und Entstehung der darstellenden Geometrie in Frankreich. Die neuere französische Perspective. Die darstellende Geometrie und Perspective in Deutschland. Die darstellende Geometrie in Italien. Die schiefe Projection und die Axonometrie. Die Reliefperspective. Die Photogrammetrie. Die Schatten- und Beleuchtungslehre. Ueberblick über die geschichtliche Entwickelung und die wissenschaftliche Aufgabe der darstellenden Geometrie.

2. Abschnitt. Punkt, Gerade und Ebene in senkrechter Projection auf zwei zu einander senkrechte Projectionsebenen.

3. Abschnitt. Benutzung einer einzigen Projectionsebene. Zwei parallele Spurebenen. Cotirte Projectionen.

4. Abschnitt. Ebenflächige Gebilde. Das Dreikant. Vielflache, insbesondere regelmässige Vielflache. Durchdringungen etc.

5. Abschnitt. Die Curven im Allgemeinen und die Kegelschnitte als Brennpunktcurven im Besonderen.

6. Abschnitt. Projective Geometrie. Projective Beziehung zwischen gerader Punktreihe, Strahlenbüschel und Ebenenbüschel. Harmonische Gebilde. Involution. Imaginäre Elemente. Collineation ebener Systeme. Erzeugnisse projectiver Strahlenbüschel und Punktreihen in einer Ebene. Pol und Polare zu einem Kegelschnitte. Construction eines Kegelschnittes aus imaginären Elementen. Reciprocität in der Ebene. Conjugirte Durchmesser der Kegelschnitte. Lösung von Aufgaben über die Kegelschnitte mittels Collineation. Sätze über perspective Lage, die Brennpunkte, die Aehnlichkeit und die Krümmungsmittelpunkte der Kegelschnitte. Allgemeines über die Büschel und Schaaren von Kegelschnitten. Conjugirte Kegelschnitte und Imaginärprojection. Verzeichniss von Curven einer Schaar oder eines Büschels von Kegelschnitten mittels Netzen. Die cyclisch projectiven Punktreihen und ihre Anwendung auf Kegelschnittschaaren und Büschel. Imaginäre Projection zweier Büschel oder zweier Schaaren von Kegelschnitten auf einander, wenn die Anzahlen ihrer reellen Grundelemente verschieden sind.

7. Abschnitt. Beleuchtungslehre mit ihrer Anwendung auf ebenflächige Körper. Physikalische Grundlagen der Beleuchtungslehre. Nachahmung der Helligkeit durch Tuschlagen. Bestimmung des Schattens und der Helligkeit von ebenflächigen Körpern bei Parallelbeleuchtung.

8. Abschnitt. **Axonometrische und schiefe Projection.**

9. Abschnitt. **Perspective und Reliefperspective.**

Mit der Herausgabe dieses Lehrbuches hat der Verfasser die Literatur über den vorliegenden Gegenstand um ein sehr werthvolles Werk bereichert. Trotz der grossen Anzahl verschiedener Bearbeitungen, welche die darstellende Geometrie in den letzten Jahren erfahren hat, besitzen die verschiedenen Capitel viel Eigenartiges, und ist selbst in den Elementen Manches neu und besser gestaltet. Bei anderen Dingen, wie namentlich der Schattenconstruction, zeigt sich eine sorgfältige Revision der Grundlagen geradezu als geboten.

Dem Vortrage der darstellenden Geometrie selbst geht eine Geschichte derselben voran, an welcher es bis jetzt, abgesehen von zerstreuten Abhandlungen und Poudra's Geschichte der Perspective, fehlte. Die Forschungen gehen einerseits bis auf die ersten Zeiten, in denen sich Spuren unserer Wissenschaft nachweisen lassen, zurück und dringen andererseits bis zu den neuesten Erscheinungen der Zeit vor. Ueberall findet man Belege von einem sorgfältigen Quellenstudium. Die einzelnen Methoden werden bezüglich ihres Werthes auch für die Zeit ihrer Entdeckung kritisch beleuchtet, über die besonders wichtigen Erscheinungen findet man Referate; hin und wieder eingeflochtene biographische Notizen beleben das Ganze und gestalten es zu einer angenehmen, fesselnden Lecture.

Den Ausgangspunkt des mathematischen Theils bildet die Orthogonalprojection. Schon bei der Lösung der Elementaraufgaben tritt uns an vielen Stellen eine eigenartige Auffassung entgegen. Heben wir etwa das Capitel VI im 2. Abschnitt: „Verschieben und Entbehren der Projectionsaxe“ als Beleg dafür hervor. In all' den Aufgaben, in welchen nur Projectionen, nicht Spuren gegeben sind oder benutzt werden, hat die Axe gar keine Bedeutung und kann demnach ganz weggelassen werden. Ein prägnantes Beispiel ist die Aufgabe, den Abstand eines Punktes von einer Geraden zu bestimmen. Zur Lösung denke man sich die anzuwendende Hilfsebene, welche den Punkt enthält und normal zur gegebenen Geraden steht, durch ihre Hauptlinien (das sind Geraden parallel zu den Projectionsebenen), welche den gegebenen Punkt enthalten, bestimmt. Der Fusspunkt des Perpendikels lässt sich dann bekanntlich ohne Hilfe der Axe ermitteln und damit auch die wahre Länge.

Von Projectionsmethoden mit einer Projectionsebene werden nur diejenige mit zwei parallelen Spurebenen und die cotirte Projection in Kürze auf vier Seiten erledigt, was schliesslich bei der grossen Evidenz der Construction und dem geringen Kreis von Aufgaben, in denen sich namentlich die letztere als zweckmässig erweist, auch ausreichend erscheint.

Die Curventheorie wird eingeleitet durch Entwickelung des Begriffs der Stetigkeit, erläutert an Beispielen, insbesondere einigen transcendenten Curven mit Ecken und freien Endungen. Durch Einführung der unter-

scheidenden Bezeichnungen „absolute Null“ und „Grenznull“ wird die Untersuchung über die Bestimmtheit der Tangente eine sehr präcise. Auch die Singularitäten der Curven werden in Kürze besprochen; bemerkenswerth sind namentlich die Untersuchungen über die Krümmungshalbmesser in den verschiedenen Arten der Spitzen. Durch Discussion der möglichen Formen der Evoluten von Curventheilen in der Nähe solcher Elemente wird gezeigt, dass der Krümmungshalbmesser im gewöhnlichen Rückkehrpunkt entweder Null oder Unendlich ist, während er bei der Schnabelspitze jeden beliebigen Werth haben kann.

Nachdem bereits durch Betrachtung von ebenen Figuren und ihren Umklappungen und Projectionen, sowie durch Pyramidenschnitte die Begriffe der Affinität und Collineation gewonnen waren, wendet sich der Verfasser nunmehr zur systematischen Behandlung der synthetischen Geometrie. Die Projectivität wird mit Hilfe von Doppelverhältnissen definirt. Die Vermittelung dieses Theils mit der darstellenden Geometrie geschieht durch den Nachweis, dass jede durch zwei projective Strahlenbüschel erzeugte Curve auf einen Rotationskegel gelegt werden kann, wie ihn der Verfasser vor langer Zeit gegeben hat. Daran knüpft sich naturgemäss die Bestimmung der Brennpunkte als Berührungspunkte von zwei den Kegel und die Curvenebene tangirenden Kugeln, wodurch der Zusammenhang dieser Entwickelungen mit Capitel V hergestellt ist. Einen Glanzpunkt des Werkes bildet eine, wie der Verfasser sagt, Imaginärprojection einer Curve II. Ordnung. Diese Projection führt zu einer Verallgemeinerung des Begriffs der schon von Poncelet eingeführten conjugirten C_2, welch' letztere sich als übereinstimmend mit den von Steiner als einander harmonisch zugeordneten bezeichneten C_2 erweisen. Während aber bei Steiner jeder dieser Kegelschnitte als seine eigene Polarfigur in Bezug auf die andere erscheint und hierdurch bestimmt wird, wählt der Verfasser folgenden Gedankengang: Sei in der Ebene eines Kegelschnittes m, P ein ausserhalb desselben liegender Punkt, r eine durch P gehende und m nicht schneidende Gerade, p die Polare von P, Q deren Schnittpunkt mit r, so sind in der auf r stattfindenden gleichlaufenden Involution der in Bezug auf m einander conjugirten Punkte P und Q einander zugeordnet und es werden nun diejenigen Punkte CC_1 dieser Involution die ideellen Doppelpunkte in Bezug auf P genannt, welche einander zugeordnet und durch P und Q harmonisch getrennt sind. Da nun im Falle einer m schneidenden Geraden die reellen Doppelpunkte der Involution die Schnittpunkte mit der Curve sind, so sollen auch die ideellen Doppelpunkte die ideellen Schnittpunkte, CC_1 eine ideelle Sehne genannt werden. Die Gesammtheit der Punkte CC_1 liegt auf einem Kegelschnitt, dem „conjugirten ideellen Kegelschnitt von m in Bezug auf P“. Man erkennt leicht, dass die Beziehung vertauschbar ist, ferner dass beide Kegelschnitte sich in zwei Punkten berühren und p als Polare beiden gemeinschaftlich ist. Zu den

wesentlichsten Vortheilen ist wohl der Umstand zu rechnen, dass die obige Projection auch vollkommen imaginäre Kegelschnitte der Construction zugänglich macht. Andere Vortheile entspringen aus der Möglichkeit der Uebertragung von Constructionsmethoden der Büschel mit reellen Grundpunkten auf solche mit ganz oder theilweise imaginären. In den der Ausführung dieser Gedanken beigefügten Figuren sind die Curven der einzelnen Büschel und Schaaren äusserst dicht aneinander gereiht, fast einer Schraffirung gleichkommend, und geben demgemäss eine sehr gute Vorstellung von der continuirlichen Aufeinanderfolge der Curven, was namentlich bei imaginären Grundpunkten, bez. Strahlen, wo die Vorstellung erschwert ist, sehr willkommen ist.

Im 7. Abschnitt verhilft der Verfasser der Beleuchtungslehre zu einer solideren Grundlage. Nach sorgfältigst angestellten Versuchen mit zweckmässig erleuchteten Gypskörpern werden die Resultate mit bekannten Gesetzen, dem Lambert'schen cos.-Gesetz und dem von Schülern Monge's aufgestellten und von Burmester benutzten cos.-cos.-Gesetz, verglichen. Hierbei ergiebt sich eine recht befriedigende Uebereinstimmung mit dem ersteren, so dass die Constructionen der Curven gleicher scheinbarer Helligkeit als unnöthig erscheinen, indem ein Unterschied zwischen diesen und den Curven gleicher wahrer Beleuchtung kaum existirt. Höchstens könnte man die Glanzpunkte noch durch helle Flecke auszeichnen. Auch die Wirkung des Reflexlichtes wird einer besonderen Untersuchung unterzogen; der Verfasser begnügt sich nicht mit der gebräuchlichen Annahme von dem directen Licht entgegengesetzt gerichteten, aber verhältnissmässig schwachen Reflexstrahlen.

Behufs Gewinnung einer Grundlage für die sichere Beurtheilung der Wirkung einer mehrfachen Ueberarbeitung von Flächen mit einem Tuschton wird zunächst ein ziemlich tiefer Ton hergestellt. Eine einmalige Ueberdeckung des Papiers der Helligkeit 1 ergebe die Helligkeit h_1. Nimmt man die Helligkeit der Kohlentheilchen der Tusche $= 0$, so ist h_1 ein positiver kleiner Bruch. Nun werden einmal durch Schraffiren Flächen hergestellt, deren Helligkeit aus der verhältnissmässigen Breite der hellen und dunklen Streifen abgeleitet wird, — ein zweites Mal wird durch 1, 2, 3 ... 50-maliges Anlegen mit sehr blassem Tuschton (50malige Verdünnung des Ursprünglichen) eine andere Skala gewonnen. Beide Skalen werden sodann verglichen. Trägt man nun entsprechende Werthe der Helligkeiten und der Anzahlen von Ueberarbeitungen bez. als Abscissen und Ordinaten einer Curve auf, so ist deren Aehnlichkeit mit der logarithmischen Linie unverkennbar. Diese Thatsache veranlasst denn auch den Verfasser, ein logarithmisches Gesetz der bezüglichen Wirkung aufzustellen, wie es schon früher von Schülern Monge's gethan war. Die minutiöse Genauigkeit, mit welcher hierbei verfahren wird, kann wohl am besten durch die Thatsache illustrirt werden, dass die Widersprüche in den berechneten Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen sind.

Im Schlusscapitel, der Centralprojection gewidmet, giebt der Verfasser nach Erledigung der nothwendigsten Fundamentalsätze zunächst einige Anwendungen. Viele Winke zur Vermeidung von Zeichenfehlern bei kleinen Details (vergl. namentlich die Perspective eines Hauses) werden dem Praktiker willkommen sein. Dann werden auch die wichtigsten stereometrischen Elementaraufgaben in freier Perspective gelöst. Es darf wohl als zweifellos angesehen werden, dass diese Projectionsart später noch weiter durchgebildet wird. Die letzten zehn Seiten sind der Reliefperspective gewidmet. Die Mängel, welche mit ihrer Anwendung in der Kunst verbunden sind, werden hervorgehoben und begründet. Es wird angedeutet, wie die strenge Theorie für derartige Zwecke zu modificiren sei. Aber, wie der Verfasser schliesst, nicht minder, wie zum Befolgen der Regeln, ist zum zielbewussten Abweichen ihre Kenntniss nothwendig.

Referent hofft, durch dieses Referat seine Eingangs ausgesprochene Ansicht über die Bedeutung des vorliegenden Werkes ausreichend motivirt zu haben.

Hannover. Dr. Carl Rodenberg.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie, von Dr. Walfried Marx, Professor an der königl. technischen Hochschule in München. Erster Abschnitt: Die Methode der rechtwinkligen Projectionen und ihre Anwendung zur graphischen Bestimmung von Punkten, Geraden, Ebenen und der von ihnen begrenzten Körper, sowie zur Lösung von Aufgaben über die gegenseitige Lage dieser Objecte. Dritte umgearbeitete und durch Aufgaben vermehrte Auflage des 1. Bandes von F. A. Klingenfeld's Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Mit 11 lithographirten Tafeln. 311 S. 8°. Nürnberg, Friedr. Korn. 1885.

Wir entnehmen dem Vorwort das Folgende:

„Ueber der Vorbereitung der 3. Auflage starb Klingenfeld 1880 als Professor der königl. technischen Hochschule in München, der er seit ihrer Gründung angehört hatte. Diese neue Auflage fertig zu stellen, fiel mir, seinem Amtsnachfolger und früheren Schüler, zu. Mit einigem Widerstreben unterzog ich mich der Arbeit. Einer Neuauflage durften die Bereicherungen nicht vorenthalten werden, welche die darstellende Geometrie in den letzten Decennien erfahren; sie sollte nicht mehr unter den vielen Abkürzungen leiden, die der blossen Lecture der früheren Auflagen so sehr hinderlich waren; schliesslich sollte sie, und das hatte Klingenfeld schon als wünschenswerth bezeichnet, durch Beigabe eines reichen Uebungsmaterials vermehrt werden. Die stete Rücksicht auf diese Punkte und die Ueberzeugung, die ich bald gewann, dass durch Abänderungen und Zusätze ein einheitliches Ganzes nie geschaffen werden könne, liess schliesslich ein

Buch entstehen, das, wie ich hoffe, der Vorzüge des alten nicht verlustig gegangen ist ... Die beiden ersten Capitel sind neu, die übrigen habe ich sachgemäss abzurunden und zu ergänzen mich bestrebt."

Die Absichten, welche der Verfasser in den vorstehenden Worten zu erkennen giebt, hat er in vollkommener Weise durchgeführt. Von den neu hinzugekommenen Abschnitten giebt der erste eine gedrängte Darstellung des Wesens der verschiedenen Projectionsmethoden. Der zweite beschäftigt sich mit der rechtwinkligen Projection auf eine Tafel; der Hauptzweck desselben ist wohl die Einführung der Affinität.

Das ganze Buch kann jedem Studirenden, insbesondere des reichen Uebungsmaterials wegen, empfohlen werden.

Hannover. Dr. Carl Rodenberg.

Darstellende und projective Geometrie, von Dr. Gust. Ad. V. Peschka. 4. Band. Mit einem Atlas von 30 Tafeln. Wien, Carl Gerold's Sohn. 1885.

Dieser vierte und letzte Band behandelt die windschiefen Flächen höherer Ordnung, Normalenflächen, Rotationsflächen, Umhüllungsflächen, Schraubenflächen, Schattenconstructionen.

Die Discussion der windschiefen Flächen, denen wir schon früher begegneten, wird vervollständigt; die Projectivität zwischen der Punktreihe auf einer Erzeugenden und dem Ebenenbüschel der zugehörigen Tangentialebenen wird dargelegt und daraus auf die Möglichkeit von Schmiegungsflächen II. Ordnung geschlossen. Dann folgt die Bestimmung einiger Charaktere, insbesondere der Anzahl von Torsallinien. Für solche Linien, behauptet der Verfasser S. 8, finde die obige Projectivität nicht statt, während in Wirklichkeit nur eine singuläre Projectivität auftritt.

Die Theorie der Regelflächen dritten Grades geht aus von den Merkmalen, welche eine solche Fläche nothwendig aufweisen müsse. Es wird gezeigt, dass eine Fläche III. Ordnung mit Doppelgerade nothwendig eine Regelfläche sei, und umgekehrt jede Regelfläche III. Ordnung eine Doppelgerade enthalte. Erst später werden dann die verschiedenen projectivischen Eigenschaften und die hierauf beruhenden Erzeugungsweisen abgeleitet. Schliesslich wird auch des Specialfalles der Cayley'schen Regelfläche gedacht. Recht erwünscht wäre nun, die Stellung dieser Fläche als Uebergangsfläche zwischen den beiden allgemeinen Species mit reellen und imaginären Torsallinien gekennzeichnet zu sehen. Ferner sei hier die Frage gestattet, warum auch nicht eine einzige dieser so interessanten und für die constructive Behandlung so überaus geeigneten Flächen zur Darstellung gelangte?

Im Gegensatze hierzu wird den Normalenflächen ein grosser Abschnitt gewidmet. Diese Flächen werden von den Normalen einer Fläche längs

einer ihr aufgeschriebenen Curve gebildet; man kann sich demnach auf die Untersuchung der Normalenflächen von Developpabeln beschränken. Ein grosser Theil des Vorgetragenen besteht aus eigenen Untersuchungen des Verfassers. Die ersten systematischen Untersuchungen rühren wohl von dem leider früh verstorbenen Coutny her. Der allgemeinen Behandlung dieser Flächen sind einige Constructionen für den Fall eingereiht, dass die Grundfläche ein Kegel ist. Von den des weitern bestimmten Charakteren sei hier hervorgehoben, dass im Allgemeinen die Ordnung der Fläche $m.m_1$ ist, wobei m die Ordnung der Fläche, m_1 die der Leitcurve bedeutet. Es wird hinzugefügt: „vorausgesetzt, dass die Fläche nicht transcendent wird"; aber wie soll sie das anfangen? Ein besonderes Capitel ist den Normalenflächen längs ebener Schnitte der Flächen zweiten Grades gewidmet, deren Behandlung durch den Umstand, dass nur Kegel als Grundflächen betrachtet zu werden brauchen, besondere Vereinfachungen erfährt.

Ausser diesen letzten werden von Regelflächen IV. Ordnung noch die Wölbfläche des schiefen Eingangs, das Kegelschnittconoid, das Kugelconoid und das Cylindroid in ansprechender Weise behandelt. Aus dem Beiseitelassen der allgemeinen Theorie der Regelflächen IV. Ordnung wird kaum Jemand dem Verfasser einen Vorwurf machen, aber es kann doch wohl nicht ganz ernsthaft gemeint sein, wenn im Vorwort dieses Fehlen damit motivirt wird, dass dem Leser, auf Grund des Studiums obiger Specialfälle, bei der Untersuchung des allgemeinen Falles irgendwelche Schwierigkeiten nicht erwachsen würden.

Von Umhüllungsflächen wird eingehend die Ringfläche behandelt (die Schraubenröhrenfläche vermissen wir ungern) und als Specialfall der Cyclide erkannt. Nachträglich sei hier bemerkt, dass im 3. Band die Cyclide nicht als F^4 mit dem ∞-fernen Kugelkreise als Doppelcurve aufgeführt ist, was nicht hätte unterbleiben dürfen. Diese Thatsache wurde jetzt auffällig bei der Lecture des durch Rechnung geführten Beweises für die Existenz zur Axe des Ringes geneigter Ebenen, welche nach zwei Kreisen schneiden. Berührt nämlich eine solche Ebene in zwei Punkten, so folgt die erwähnte Eigenschaft sofort aus dem Umstande, dass dann die Schnittcurve vier Doppelpunkte, unter denen zwei die imaginären Kreispunkte sind, hat; und der Beweis gilt auch gleich für die allgemeine Cyclide.

Die Flächentheorie schliesst mit der Betrachtung der geradlinigen Schraubenflächen.

An dieser Stelle sei es uns gestattet, die Aufmerksamkeit des Lesers auf S. VII der Vorrede zu richten, woselbst das Fehlen mehrerer von uns früher als unerlässlich hingestellter Partien motivirt wird, oder richtiger, zu motiviren versucht wird. Dieser Versuch ist unserer Ansicht nach entschieden verunglückt; denn die ausserordentliche Wichtigkeit der bezüglichen Gegenstände ist nicht in Frage zu ziehen, und wo soll man

sie schliesslich erwarten, wenn nicht in einem Werke von beiläufig 2500 Seiten!*

Als Anhang wird die Schattenlehre beigegeben. Nach der Anfangs gegebenen Aufzählung dessen, was bei der Schattenconstruction berücksichtigt werden muss, als: Beschaffenheit der Lichtquelle, Beschaffenheit des Mediums, durch welches ein Fortpflanzen der Lichtstrahlen statt hat, Entfernung und Lage des beleuchteten Objects und der Lichtquelle gegen einander, Beschaffenheit der Oberfläche, Lage und Entfernung des Auges vom beleuchteten Gegenstande und schliesslich gar die physiologischen Eigenthümlichkeiten unserer Sehorgane, erwartet sicher Jeder auch ein etwas tieferes Eingehen auf diese Dinge. Aber die Untersuchung verläuft sozusagen im Sande; die Entwickelung, S. 389—403 etwa, bleibt unklar, wofür der Grund in erster Linie wohl in dem anfänglichen Fehlen von prompten Definitionen der Begriffe Intensität, scheinbarer Helligkeit u. dergl. zu suchen ist. Erst später (z. B. § 334) findet man hin und wieder einige beiläufige Erläuterungen dieser Fundamentalbegriffe. Greifen wir jetzt zur Kennzeichnung der Arbeit etwa den Satz 232 auf S. 390 heraus: „Die Intensität, unter welcher ein Punkt einer leuchtenden Fläche erscheint, wird stets durch das Product aus der Normalintensität der Fläche in dem betreffenden Punkte und dem Sinus jenes Winkels ausgedrückt, welchen die ihm entsprechende Tangentenebene mit dem Sehstrahle einschliesst,“ — und stellen wir demselben den Ausspruch auf der folgenden Seite entgegen: „Dem unendlich fernen Auge wird somit die Lichtkugel als Lichtscheibe von derselben constanten Lichtstärke erscheinen“ — so haben wir zwei sich direct widersprechende Behauptungen. Ebenso unklar ist uns unter Anderem im § 338 die Bestimmung der Isophengen geblieben. Es scheint die Formel für die Abnahme der Intensität der Beleuchtung mit dem Quadrat der Entfernung vom leuchtenden Punkte, auf die beobachtete Intensität eines Punktes einer gleich stark leuchtenden Fläche übertragen zu sein; etwas Anderes heraus zu lesen, will uns nicht gelingen, so absurd die obige Annahme auch sein mag. Wer will es unternehmen, den § 331 zu entziffern? — Wendet man sich jedoch von diesen Dingen zu den in üblicher Weise ausgeführten Beleuchtungsconstructionen, so begegnet man einer grossen Reihe elegant durchgeführter Beispiele, wie sie bei der ungemeinen zeichnerischen Fertigkeit des Verfassers nicht anders erwartet werden konnten.

Schliesslich möge betont werden, dass das vorliegende Werk, trotz der vielen Ausstellungen, die zu machen wir uns genöthigt sahen, durch seine Fülle an Material aus den behandelten Gebieten für den verständnissvollen Leser ein vortreffliches Nachschlagebuch ist, es insbesondere dem

* Infolge des Fehlens der Kegelschnittbüschel entbehrt überdies die ganze Polarentheorie im 2. Bande des Fundaments.

Docenten eine grosse Menge von Beispielen für seine Vorlesungen bietet. Einem Lernenden es zu empfehlen, müssen wir so lange aufrichtiges Bedenken tragen, bis nicht die gekennzeichneten grossen Lücken ausgefüllt und die wesentlichsten Mängel der Darstellung beseitigt sind.

Hannover. Dr. CARL RODENBERG.

Analytische Geometrie des Raumes nebst den Principien der darstellenden Geometrie unter besonderer Berücksichtigung des Imaginären. Zum Gebrauche an technischen Hochschulen und höheren technischen Schulen, sowie zum Selbstunterricht. Mit zahlreichen Uebungsaufgaben nebst Auflösungen. Von WILHELM FRIEDRICH SCHUELER. 1. Band. Erste Hälfte. 223 S. 8°. Mit 4 Tafeln in Steindruck. Ansbach, C. Brügel und Sohn. 1884.

Der uns vorliegende Theil enthält die Elemente; nur einmal tritt bei der Betrachtung der Gesammtheit der Schnittgeraden von drei gegebenen eine Fläche II. Ordnung auf. Dem Buche liegt die Idee zu Grunde, die Constructionen der modernen darstellenden Geometrie durch Rechnung zu begründen. Das analytische Verfahren ist also wesentlich Mittel zum Zweck. Fast immer werden Gerade durch die Gleichungen ihrer projicirenden Ebenen dargestellt, wodurch dann sofort die Gleichungen der Projectionen ausgedrückt sind, andererseits aber die Symmetrie der Rechnung verloren geht.

Bis zum Erscheinen der weiteren Theile, die namentlich die dem Verfasser eigenthümliche Auffassung des Imaginären enthalten sollen, möchten wir uns auf diese kurze Anzeige beschränken.

Hannover. Dr. CARL RODENBERG.

Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und höhere Lehranstalten, von Dr. F. W. FISCHER, Oberlehrer am Gymnasium zu Kempen. I. Theil, Planimetrie. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. VIII und 184 S. Freiburg i. Br., Herder'sche Verlagsbuchhandlung. 1884.

In der Vorrede behauptet Herr Fischer, sein Buch sei in drei Curse getheilt, „welche die Lehrpensa für die Quarta, die Unter- und Obertertia und für die Unter- und Obersecunda enthalten.“ Glücklicherweise scheint er es aber bei dieser Drohung haben bewenden zu lassen. Wir haben die Ueberschriften Cursus I, II, III wenigstens nicht finden können, obschon wir darnach die 184 Seiten des Büchleins suchend durchblättert haben. Das ist ein entschiedener Vortheil des Buches. Denn ein Buch verfassen zu wollen, welches auf verschiedenen Seiten dem Quartaner und Obersecundaner dienen und dabei handlich bleiben soll, halten wir für eine Chimäre.

S. 2, § 8 finden wir die Definition: „Die Kreislinie ist eine krumme geschlossene Linie, deren Punkte alle in einer Ebene liegen und von einem Punkte innerhalb, dem Mittelpunkte, gleich weit abstehen.“ Diese Definition taugt weder für Quarta, noch für Obersecunda, sondern gar nicht.

S. 31 wird die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, als eine nicht gelöste Aufgabe bezeichnet.

Nicht besonders glücklich scheinen S. 42 die beiden parallelen Seiten eines Paralleltrapezes „Grundlinien“ und die Hypotenusenhöhe des rechtwinkligen Dreiecks „Höhe“ im engeren Sinne genannt zu sein.

Durchweg sagt Herr Fischer eine Parallele auch dann, wo nur eine einzige möglich ist, also die Parallele vorzuziehen sein würde. Ebenso wenig kann die Vermeidung der schönen Bezeichnung „Strecke“ gebilligt werden. Die Definition der Tangente S. 55 lässt ebenfalls zu wünschen übrig; und wenn S. 72 verlangt wird, von einem gegebenen Punkte aus zwei Tangenten an einen Kreis zu ziehen, so ist das wiederum nicht correct.

Die Parallelentheorie baut Herr Fischer S. 12 auf folgende Betrachtung. Werden zwei Parallelen von einer dritten geschnitten und schiebt man diese schneidende Gerade in sich selbst fort, während die eine Parallele mit ihr fest verbunden bleibt, so gelangt sie allmälig in die Lage der andern Parallelen und man sieht, dass die Wechselwinkel gleich werden u. s. w.

S. 26 flg. stellt Herr Fischer eine Reihe von Aufgaben zusammen, welche passend als Grundaufgaben bezeichnet werden können. Sie behandeln das gleichseitige Dreieck, die Halbirung der Strecke, des Winkels, die Errichtung eines Lothes u. s. w. Diese ausführliche Zusammenstellung haben die älteren Lehrbücher durchweg, während die neueren, nicht zu ihrem Vortheil, von dieser wichtigen didaktischen Anordnung vielfach abweichen.

Es folgt die Lehre von den Vierecken, insbesondere den Parallelogrammen, die Theilung und Verwandlung der Figuren, der pythagoräische Lehrsatz. Jetzt erst, auf S. 54, gelangt man zum Kreise. Will man diese Vertheilung des Stoffes gutheissen, so lässt sich gegen die Behandlung desselben, wie sie in unserm Buche vorliegt, wenig erinnern. Es folgen die merkwürdigen Punkte und 122 Aufgaben, die recht schön und passend sind.

S. 81 beginnt die Lehre von der Aehnlichkeit sehr zweckmässig mit einer Darstellung der Proportionenlehre. Dieselbe ist ebenso kurz, wie inhaltreich. Die Sätze von der Aehnlichkeit reichen bis S. 109, wo die Transversalentheorie beginnt.

S. 127 flg. werden Berechnungsaufgaben vorgeführt, denen der Herr Fischer die Construction nicht unmittelbar, sondern erst S. 157 anreiht. Den Schluss des Buches bilden die Sätze über harmonische Theilung u. s. w., die aber nicht unfruchtbare Theorie bleiben, sondern zur Lösung des Taktionsproblems führen.

Wir haben unsere in einigen Punkten abweichende Ansicht unumwunden ausgesprochen. Daher bleibt uns bei der Zusammenfassung des Urtheils die angenehme Pflicht, das Werkchen nach Inhalt und Form für ein gediegenes und praktisches Schulbuch zu erklären, dem wir den besten Erfolg wünschen.

Coesfeld, im Juni 1885. K. Schwering.

Zur Formation der quadratischen Gleichungen, von Dr. E. Bardey. 390 S. gr. 8°. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1884.

Der Name des Verfassers hat auf dem hier von ihm behandelten Gebiete einen guten, wir möchten sagen, den besten Klang. Das vorliegende Buch verfolgt den Zweck, die Leser mit der Methode bekannt zu machen, wie man zu quadratischen Gleichungen von vorgeschriebener „Form" Lösungen zierlicher Art zurechtmachen kann. Die Buchstaben A, B, C bedeuten Ausdrücke von der Form $\alpha a + \beta b + \gamma x$, wo α, β, γ specielle Zahlzeichen sind. Die erste von dem Verfasser behandelte Gleichungsform ist $AC = B^2$. Hier könnte man also den Ansatz machen

$$(\alpha a + \beta b + \gamma x)(\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 x) = (\mu a + \nu b + \varrho x)^2$$

und nun μ, ν, ϱ so bestimmen, dass

$$2\mu\varrho = \alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma,$$
$$2\nu\varrho = \beta\gamma_1 + \beta_1\gamma$$

wird. Direct jedoch gelangt man zu solchen Bildungen auf andere Weise. Man bildet die Form

$$mx^4 + nx^3y + px^2y^2 + nxy^3 + my^4.$$

dividirt dieselbe durch eine ähnliche Form mit anderen Coefficienten m_1, n_1, p_1, n_1, m_1 und setzt den Quotienten gleich $\frac{a}{b}$. Hierauf setzt man

$$t = \frac{x+y}{x-y}, \quad u = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

und bestimmt zunächst u und dann t. Die quadratische Gleichung in u führt auf eine Quadratwurzel, welche mit r bezeichnet ist. Indem man nun für t die Werthe aufsucht und r durch x ersetzt, gelingt es, quadratische Gleichungen der vorgeschriebenen Form mit eleganter Lösung in beliebiger Menge aufzustellen.

Ferner stellt sich der Verfasser die Aufgabe, die Gleichung $AC = B^2$ in andere Formen zu setzen, die aber die Hauptform: Product zweier linearer Ausdrücke gleich dem Quadrate eines andern linearen Ausdrucks,

behalten sollen. Analog sind nun die Ausdrücke $A^2+B^2=C^2+D^2$, $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}$ u. s. w., ferner cubische Gleichungen von der Form

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2=\frac{C}{D}$$

und endlich Gleichungen vierten und fünften Grades von eleganter Form und mit ebenso eleganter Lösung in reicher Fülle geboten. Natürlich sind die Gleichungen höheren Grades alle durch Lösung quadratischer Gleichungen zu erledigen.

Was die wissenschaftliche Ausbeute betrifft, die wir bei der Durchsicht des vorliegenden Buches entdeckt haben, so dürfte dieselbe nur gering veranschlagt werden können. Wir wollen damit weder ein Lob, noch einen Tadel ausdrücken, sondern nur eine Thatsache constatiren. Wer von diesem Gesichtspunkte aus das Buch für überflüssig erklären wollte, dürfte jedoch dem Verfasser Unrecht thun. Nichts belebt den Eifer des Schülers mehr, als wenn die Aufgabe, die ihm gestellt wird, ihn durch ihre Form reizt und am Schlusse die Lösung ihn durch Einfachheit und Eleganz erfreut und belohnt. Daher wird jeder Lehrer, der in seinem algebraischen Unterrichte sich mit der dankbaren Aufgabe beschäftigt, in seinen Schülern den Sinn für elegante Form zu wecken und zu pflegen, das vorliegende Buch als willkommene Beihilfe begrüssen.

Coesfeld, im Juni 1885. K. Schwering.

Lehrbuch der Arithmetik. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium, von B. E. Richard Schurig. In 3 Theilen. 2. Theil: Allgemeine Zahlenlehre (Buchstabenrechnung). Preis 6 Mk. Leipzig, Fr. Brandstetter. 1884.

Der vorliegende, 430 S. starke Octavband gliedert seinen Inhalt in 22 Paragraphen (§ 52—73). Obschon wir beim Verfasser diese Eintheilung nicht gefunden haben, lassen sich dabei füglich vier Abschnitte unterscheiden. Der erste (bis zum § 67 gehend) enthält die Lehre von den rationalen Rechnungsarten und schliesst mit dem Aufsuchen des grössten gemeinsamen Theilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier Polynome ab. Der zweite enthält die Grundzüge der Zahlentheorie und behandelt sogar Eigenschaften der quadratischen Reste. Der dritte Theil beschäftigt sich mit den Wurzeln, enthält die Theorie der imaginären Grössen und schliesst mit der wirklichen Ausziehung höherer Wurzeln. Hierdurch ist der vierte Theil trefflich eingeleitet, welcher die Logarithmen praktisch und theoretisch zum Gegenstande hat.

Der Vortrag behandelt den Gegenstand in der didaktisch trefflichen Weise, durch Beispiele und thatsächlich ausgeführte Rechnungen dem

Schüler die Sache darzulegen. Man erkennt fast an allen Stellen den erfahrenen Praktiker, der selbst zu rechnen versteht, und viele Andere kennen gelernt hat, welche es nicht verstehn. Allein auch für den Mathematiker von Fach findet sich in dem Buche einige Ausbeute. Für beide Behauptungen stellen wir einige Belegstellen zusammen.

S. 85, Anmerkung 4, wird der Ungeübte gewarnt, $(a+b)^2$ nicht mit $(ab)^2$ zu verwechseln. Eine sehr nützliche Warnung, welche in keinem Schulbuche fehlen sollte. S. 89, Beispiel 6, finden wir zur Einübung der Potenzirung von Polynomen den interessanten Satz von der Summe der 4 Quadrate, welche in ein Product von 2 Quadratsummen verwandelt werden. S. 99 findet sich eine interessante Tabelle von a^2+b^2 bis herauf zu a^8+b^8 ausgedrückt durch $a+b=s$ und $ab=p$. Ebenso eingehend ist die Behandlung des binomischen Lehrsatzes, wo über die Binomialcoefficienten weitläufig gehandelt wird. S. 157 wird der Beweis geführt, dass die Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ nicht convergirt. Der Beweis ist geistreich, aber Referent zieht doch das gewöhnliche Verfahren als kürzer vor. S. 263 begegnen wir wieder einer heilsamen Warnung, nämlich vor dem Fehler $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Gleiche didaktische Trefflichkeit zeichnet S. 343 die Ausziehung höherer Wurzeln und insbesondere S. 351 die Methode zur Berechnung der Logarithmen aus. S. 361 wird ebenso kurz wie klar der Beweis vorgetragen, dass die Tafellogarithmen der natürlichen Zahlen irrational sind. S. 375 führt der Verfasser den Anfänger in die theoretische Seite der Interpolation beim Aufsuchen der Logarithmen u. s. w. ein. Das Verfahren ist lediglich auf Beispiele gegründet und äusserst praktisch. Sogar der Begriff von „Function“ und ihrer „Ableitung“ könnte in dieser Weise dem Anfänger trefflich erläutert werden. Heis pflegte in seinen Vorlesungen ähnlich zu verfahren.

Referent glaubt durch das Vorstehende genugsam gezeigt zu haben, dass das Buch des Herrn Schurig viele Vorzüge aufweist. Leider macht es ihm die Wahrhaftigkeit zur Pflicht, nun auch andere Dinge nicht unerwähnt zu lassen.

Zunächst ist der „Beweis“ S. 31, dass $1^\infty=8$ sein kann, nicht streng; er genügt allenfalls als Schulexperiment; aber das hätte der Verfasser bemerken und sein Verfahren nicht mit dem stolzen Worte „Beweis“ einleiten sollen. Viel schlimmer ist auf derselben Seite der „Beweis“, dass $a^n.a^r=a^{n+r}$. Denn derselbe gilt nur für positive ganze n, r und schon auf der folgenden Seite wird mit negativen Exponenten gearbeitet, als ob sich das von selbst verstände. Es kann ein solches Verfahren nur als gänzlich unzulässig bezeichnet werden. Wenn der Verfasser den Beweis des binomischen Lehrsatzes durch vollständige Induction für neu hält, so ist das ziemlich unschädlich; aber S. 328 wird der binomische Lehrsatz für $n=\frac{1}{2}$ ohne die mindeste Bemerkung angewandt. Sollte Herr Schurig denn die berühmte Abhandlung Abel's nicht kennen? Fast

möchte man für diese Vermuthung eine Stütze in den über convergente und divergente Reihen S. 154 flg. gegebenen ziemlich minderwerthigen Bemerkungen finden, wenn der Verdacht nicht ein gar zu ungeheuerlicher wäre. S. 184 finden wir den „Satz von Schurig". Der Inhalt desselben beruht auf der Bemerkung, dass bei der Division von $a^2 + abx + b^2y$ durch $a + bz$ als Rest $b^2y + b^2z(z - x)$ sich ergiebt. S. 196 erscheint Gauss als Autor bei dem Satze, welcher die Anzahl der relativen Primzahlen zu n, welche kleiner als n sind, bestimmt. Bekanntlich hat Euler (Comm. nov. Ac. Petrop. VIII, p. 74) diese berühmte Aufgabe zuerst gelöst. Vergl. auch Gauss, Disq. arithm. art. 38, wo Euler citirt ist. S. 261 wird behauptet und „bewiesen", dass $\sqrt[n]{a^n}$ nur den einen Werth a habe, nicht n Werthe. S. 274 wird behauptet und „bewiesen", dass das Product aus zwei imaginären Quadratwurzeln negativ reell ist. Ebenso ist S. 285 $\sqrt{-2} : \sqrt{-3} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, nicht $= -\sqrt{\tfrac{2}{3}}$. S. 349, Zeile 10 von unten, steht ein sehr schlimmes „oder". Nämlich: Für Zahlen, die < 0 sind, kann es keine Logarithmen geben, **oder**: die Logarithmen negativer Zahlen sind imaginär.

Genug. Das Buch leidet an manchen Unebenheiten, wenn man die theoretische Seite ins Auge fasst. Praktisch, namentlich für Selbstübungen und in der Hand des Lehrers, ist es empfehlenswerth.

Coesfeld, im August 1885. K. Schwering.

Sammlung geometrischer Aufgaben, von H. Heilermann, Director des Realgymnasiums in Essen. 1. Theil: Aufgaben, welche ohne Anwendung der Lehre von der Proportionalität der Linien gelöst werden können. Fünfte vermehrte Auflage. Preis 0,80 Mk. 2. Theil: Aufgaben, zu deren Auflösung die Lehre von der Proportionalität der Linien und Flächen erforderlich ist. Dritte vermehrte und verbesserte Auflage. Preis 0,80 Mk. Essen, Bädeker.

Der erste Theil zählt 51, der zweite 54 Seiten. Da fast gar keine Andeutungen, wie die Auflösung zu bewerkstelligen sei, gegeben werden, so ist es dem Verfasser gelungen, einen sehr reichen Stoff in so engem Raume zusammenzudrängen. Dabei ist wohl der in der Vorrede ausdrücklich dargelegte Gedanke leitend gewesen, „dass die Einführung in das Verständniss der geometrischen Analysis und die ersten Anwendungen derselben der gemeinsamen Arbeit von Lehrern und Schülern während der Unterrichtsstunde zuzuweisen sind"; ferner meint der Verfasser, „dass die Winke und Andeutungen, welche die Auflösung einer Aufgabe erleichtern sollen, im Allgemeinen nicht das Schulbuch, sondern nur der Lehrer, welcher den Standpunkt der Schüler kennt und die Schwierigkeit einer gestellten Aufgabe vorher geprüft hat, in zweckmässiger Auswahl geben kann."

Man hat in einer, jetzt glücklicherweise überwundenen, philosophischen Schule behauptet, dass jeder Satz genau so wahr sei, wie das contradiktorische Gegentheil desselben Satzes. Vielleicht ist diese aberwitzige Schulmeinung dennoch, *cum grano salis*, in der Pädagogik wahr. Referent ist z. B. nicht der Meinung — Ueberzeugung — des Herrn Heilermann, sondern der ziemlich genau entgegengesetzten. Nach meiner „Meinung" sollte keine Aufgabe, deren Lösung nicht durch die unmittelbar vorhergehenden mit gegeben ist, ohne eine Andeutung der Sätze gelassen werden, welche zur Lösung führen. Freilich brauchen diese Andeutungen nicht den Umfang zu haben, den wir bei Herrn Heilermann, 1. Theil, S. 36 aufgewendet sehen. Im Gegentheil! Je kürzer, desto besser. Auch bin ich der Ansicht, dass eine solche Fluth von Aufgaben, selbst bei der übersichtlichen Anordnung des Herrn Heilermann, den Schüler verwirren und muthlos machen kann. Vielleicht empfindet sogar noch sonst Jemand — auf gewissen Versammlungen pädagogischer Männer sagt man euphemistisch der „jüngere Lehrer", „der noch nicht aus dem 'Vollen' schöpft ' — diesen erdrückenden Reichthum. Und diesem Uebelstande könnte doch leicht — etwa durch Besternung der die Methoden enthaltenden Hauptaufgaben — abgeholfen werden.

Doch genug der Bedenken. Referent hat nur in dem ehrenvollen Auftrage, in dieser Zeitschrift das Heilermann'sche Büchlein anzeigen zu sollen, den erforderlichen Muth finden können, einem so gewiegten Schulmann gegenüber eine abweichende Ansicht nicht nur zu haben, sondern auch zu äussern. Die Reichhaltigkeit, Kürze und Wohlgeordnetheit des Inhaltes nochmals hervorzuheben, ist dem Referenten eine angenehme Pflicht.

Coesfeld, 1885. K. Schwering.

Coordonnées parallèles et axiales, par Maurice d'Ocagne. Paris, Gauthier-Villars. 1885.

Auf der ersten Seite dieser 91 Seiten starken Schrift sagt uns der Verfasser, Herr d'Ocagne, dass er unter den zahlreichen Systemen von Liniencoordinaten zwei ausgewählt habe, welche ihm als die einfachsten erschienen seien. Das eine derselben entspreche den gewöhnlichen Parallelcoordinaten, das andere den Polarcoordinaten.

Das erstere System definirt Herr d'Ocagne folgendermaassen: Man nimmt zwei feste Punkte an, A und B, und nennt dieselben Coordinatenanfangspunkte, dann zieht man durch dieselben zwei Parallele Au und Bv, welche man Coordinatenaxen nennt. Dann trägt man auf den Axen zwei Segmente $AM = u$, $BN = v$ in gleichem Sinne ab. So sind die Punkte M und N bestimmt. Die Längen u und v zeichenrichtig genommen, heissen die Coordinaten der Geraden MN.

Man sieht, das System des Herrn d'Ocagne ist identisch mit dem von mir in der Schrift: Theorie und Anwendung der Liniencoordinaten in der analytischen Geometrie der Ebene, von K. Schwering, Leipzig bei B. G. Teubner, 1884, ausführlich behandelten Systeme. Ein Unterschied tritt nur insofern hervor, als ich Gründe hatte, in der obigen Definition AB stets senkrecht zu den Axen zu nehmen. Ich habe diese Gründe an geeigneter Stelle dargelegt, und auch Herr d'Ocagne hat sich denselben Gründen, wie wir sehen werden, nicht verschlossen. Allein nicht nur dieser Vergleich ist interessant. Wäre die Sache nicht von zu sehr persönlichem Charakter, so würde Referent sich gestatten, eine Zusammenstellung der beiden Bearbeitungen *in extenso* zu geben. Ich beschränke mich auf Weniges. Während ich die einfachsten Formen der drei Kegelschnittsgleichungen durch geometrische Betrachtungen direct finde und dann die allgemeine Gleichung zweiten Grades in eine dieser Formen setze, zieht Herr d'Ocagne die den Axen parallelen Tangenten und discutirt die so erhaltene transformirte Gleichung. Diese Discussion führt ihn dann zu den einfachsten Gleichungsformen. Diese Darstellung zeigt in allen Einzelheiten bedeutende Eleganz und — was mich persönlich begreiflicher Weise nicht wenig interessirte — die völlige Unabhängigkeit des französischen Mathematikers von meinen Arbeiten. Diese reichen bis in das Jahr 1873/74 zurück, wo ich meine Liniencoordinaten in einer Wintervorlesung über analytische Geometrie in Münster meinen Zuhörern mitgetheilt habe.* Erst zwei Jahre später erschienen dieselben im Druck und zwar im 21. Bande dieser Zeitschrift. In Frankreich scheinen also sowohl diese erste, als auch alle späteren Publicationen, welche sich auf diese Liniencoordinaten bezogen haben, gänzlich unbeachtet geblieben zu sein. Um so angenehmer war es mir daher, durch die originelle und geschickte Behandlung des Herrn d'Ocagne in der Ueberzeugung bestärkt zu werden, dass das von uns Beiden selbstständig gefundene und behandelte System nicht eine künstlich zurechtgemachte „Erfindung“, sondern ein durch die Natur der Liniencoordinaten selbst bedingtes ist. Leider konnte Referent es nicht umgehen, von sich selbst zu reden. Für den übrigen Theil des d'Ocagne'schen Buches ist Referent dieser Unannehmlichkeit enthoben.

S. 36 definirt Herr d'Ocagne seine *coordonnées axiales*. Man nimmt eine feste Gerade an, die Axe des Systems, und auf der Geraden einen festen Punkt O, den Pol des Systems. Eine willkürliche Gerade ist alsdann gegeben durch den Abstand $Ox = \lambda$ ihres Schnittpunkts mit der Axe vom Pol und dem Winkel ϑ, den sie mit der Axe bildet. Dieses System hat schon Plücker mit einigen Worten gestreift. Bei unserm Verfasser finden wir es genau discutirt. Seine Beziehungen zu den *coordonnées*

* Zu meinen damaligen Zuhörern zählten die Herren Busch in Arnsberg und Caspari in Oberlahnstein. Ich berufe mich hiermit öffentlich auf dieselben.

parallèles, die Gleichungen der Kegelschnitte werden erörtert. Dann wendet der Verfasser sich den höheren Curven zu. Durch Betrachtungen einfachster Art in rein geometrischer Methode findet er den Berührungspunkt einer Tangente, den Krümmungsradius, das Flächenelement, das Bogenelement, und fügt interessante Beispiele bei. Unter denselben findet sich die Cycloide und die Umhüllungscurve des freien Schenkels eines rechten Winkels, dessen anderer Schenkel von gegebener Grösse ist und auf zwei festen rechtwinkligen Axen gleitet.

S. 52 beginnt der Verfasser eine interessante Studie des Zusammenhanges zwischen den Cartesischen Punktcoordinaten und den *coordonnées parallèles*. Bezeichnet $y = mx + n$, wenn man m constant und n variabel nimmt, ein System paralleler Geraden, so nennt Herr d'Ocagne die Punkte $v = mu + n$ parallele Punkte. Dabei ist immer, wie bei mir, das Mittelloth senkrecht zu den Axen (s. o.). Allein es gelingt auch, und das scheint von besonderer Wichtigkeit, m in der Gleichung des Punktes als trigonometrische Tangente eines leicht auffindbaren Winkels zu definiren. Dieser Winkel, welcher für alle parallelen Punkte derselbe bleibt, heisst *module angulaire* des Punktes. So gelingt es denn alsbald, den Winkel zweier Punkte, ja *points perpendiculaires* zu behandeln. Die interessanten Folgerungen wollen wir nur erwähnen; man muss sie bei Herrn d'Ocagne selbst nachlesen.

S. 73 beginnt der Verfasser — er ist seiner Lebensstellung nach *ingénieur des ponts et chaussées* — die Behandlung einer praktischen Aufgabe des *calcul graphique*. Er löst mit Hilfe der *coordonnées parallèles* die Gleichung $z^n + pz + q = 0$. Er ersetzt p und q durch u und v. Dann ist $z^n + uz + v = 0$ die Gleichung eines Punktes und, indem z alle Werthe durchläuft, beschreibt der Punkt eine Curve, die solutive der Gleichung $z^n + pz + q = 0$. Es ist interessant, dass der Verfasser durch diese praktische Aufgabe zur Aufstellung des Systems veranlasst worden ist und dasselbe wirklich praktisch gute Dienste geleistet hat.

Dem Büchlein sind einige Beilagen angefügt. Wie mir der Verfasser brieflich mittheilt, hat sein System in Frankreich verdiente Anerkennung und didaktische Verwendung gefunden. *Ce procédé (de calcul graphique) a été introduit dans plusieurs Cours en France et en Italie. Il fait partie du traité de calcul graphique de M. Terrier qui va incessamment paraître à la librairie Gauthier-Villars.*

Referent giebt dem Büchlein gern das Zeugniss, dass es auch in Deutschland gekannt zu werden verdient.

Coesfeld, 1885. K. Schwering.

Lehrbuch der Geometrie für höhere Lehranstalten, von Dr. WILHELM VOLLHERING, Director der Realschule in Bautzen. 1. Theil: Geometrie der Alten. Bautzen, Eduard Rühl. 1884.

Das vorliegende Buch behandelt auf 75 Seiten in ziemlich grossem Format die Planimetrie und Stereometrie. Inhaltlich unterscheidet sich das Buch von anderen Schulbüchern wenig. Das Buch will vorwiegend Lehrbuch sein, daher treten Uebungsaufgaben in geringer Zahl und Vollständigkeit auf. Der Verfasser will laut Vorrede die Selbstständigkeit des Lernenden durch die „entwickelnde“ Methode seines Vortrags befördern.

Referent ist anderer Ansicht, die er häufig genug öffentlich ausgesprochen hat. Doch weiss er sehr wohl, dass in Didaktik und Pädagogik nicht bloss Gedanken zollfrei sind.

Sehen wir uns andere Eigenheiten des Buches an. Nach demselben ist *Raum der Ort, worin sich das Weltall befindet.* Die *Parallelentheorie* wird in § 2 vorgetragen. Derselbe enthält 6 „Hilfssätze“, 5 „Sätze“, ausserdem „Umkehrungen“ und „Zusätze“. Der eigentliche Grundsatz wird ohne Bezeichnung gelassen und heisst: „Da Parallelen gleiche Richtungen haben, so hat eine Schneidende gegen die eine von ihnen denselben Richtungsunterschied, wie gegen die andere.“ S. 12 wird der erste Congruenzsatz behandelt. Verfasser löst die betreffende Aufgabe, bei der aber auch der *Transporteur* als geometrisches Instrument auftritt, und zwar ohne weitere Bemerkung. Die ganze Darstellung ist von ermüdender Breite. S. 21 stellt Herr *Vollhering* dem *Rechteck* das „*Schiefeck*“ und S. 64 der *Polarecke* die „*Urecke*“ sprachlich gegenüber. Diese Neubildungen erscheinen dem Referenten ziemlich unschädlich. Aber störend findet er die sich durch das ganze Buch hinziehende Manier, mehrere Sätze durch den Druck in einen zu contrahiren. Schlagen wir einmal S. 24 auf, so finden wir Zusatz 2: Hat ein Parallelogramm oder Dreieck eine $\left\{\begin{matrix}\text{einhalb}\\ \text{ein Drittel}\\ \text{ein } n\text{tel}\end{matrix}\right\}$ so grosse Grundlinie, als ein anderes, aber eine $\left\{\begin{matrix}\text{doppelt}\\ \text{dreimal}\\ n\text{-mal}\end{matrix}\right\}$ so grosse Höhe, so sind beide einander gleich. Besonders abstossend wirkt diese Caprice S. 59, wo sogar Klammern in den Klammern stehen. Auch das $\times$ und : contrahirt Herr *Vollhering* in $\dot{\times}$. Die heronische Formel wird mit den Worten S. 30 eingeleitet, dass es in der Praxis zuweilen von Wichtigkeit sei, den Inhalt des Dreiecks aus seinen drei Seiten finden zu können. Ebendort wird $s = a + b + c$ statt $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ eingeführt. Dadurch erreicht der Herr *Vollhering*, dass das Resultat anders, aber nicht besser aussieht, als in der gewöhnlichen Form. Ohne „merklichen Fehler“ — diese Phrase wendet der Verfasser S. 59 statt der sonst üblichen Grenzbetrachtungen an. Eher könnte

man sie S. 50 dulden, da dort wenigstens eine Andeutung des richtigen Gedankenganges gegeben ist.

S. 54 wird die Stereometrie durch Folgendes **eingeleitet**. „Denkt man den Inhalt F einer Figur in ihren Schwerpunkt vereinigt, so ist **offenbar*** der Inhalt (das Volumen) des Drehkörpers (Rotationskörpers), den die Figur bei einer $\left\{\begin{matrix}\text{vollen}\\ \text{theilweisen}\end{matrix}\right\}$ Drehung um eine ausserhalb oder in einer ihrer Seiten in ihrer Ebene befindlichen Drehaxe erzeugt, von der der Schwerpunkt der Figur die Entfernung ϱ hat, das Product aus F und dem Wege des Schwerpunkts, also für den Drehwinkel $\left\{\begin{matrix}360^0\\ \alpha^0\end{matrix}\right\}$ folgt

Satz 1. $$Vol_{rot} = \left\{\begin{matrix} F \,.\, 2\varrho\pi \\ F \,.\, \frac{\varrho\pi\alpha}{180}\end{matrix}\right\}.\text{“}$$

Hieraus leitet nun Herr Vollhering die bekannten Volumgleichungen für Cylinder und Kegel ab. Offenbar! Wer wagt zu zweifeln, da erst S. 68, also 14 Seiten später, das Körpermaass, die Volumeneinheit **erklärt wird?**

Das Buch ist in den Händen eines tüchtigen Lehrers vielleicht doch unschädlich.

Coesfeld, 1885. K. Schwering.

Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie, von Dr. Friedrich Reidt, Professor in Hamm. 1. Theil: Trigonometrie. 3. Auflage. 250 S. gr. 8⁰. Preis 4 Mk. Leipzig, B. G. Teubner. 1884.

In der Vorrede äussert der Verfasser, dass seine Absicht gewesen sei, „den Lehrern ein Hilfsmittel von unmittelbarer Verwendbarkeit im Unterrichte zu bieten. Deshalb wurden die Aufgaben in der Art geordnet, dass sie diesen Unterricht von seinen ersten Anfängen an gleichsam von Stunde zu Stunde begleiten, der Lehrer also für jede einzelne Stelle desselben den dahin passenden Uebungsstoff zusammengestellt findet und nicht genöthigt ist, das zur Belebung, Anwendung und Einübung der einzelnen Sätze dienliche Material sich mühsam zusammen zu suchen.“ Indem wir andere bemerkenswerthe Gesichtspunkte der Vorrede einstweilen übergehen, mag hier gleich erwähnt werden, dass nach der Ueberzeugung des Referenten der Verfasser sein eben angedeutetes Ziel wirklich erreicht hat.

---

* Die Sperrung rührt von mir her. Der Referent.

Der erste Theil des Buches, die Goniometrie, enthält den hergehörigen Stoff in nicht gewöhnlicher Vollständigkeit. Obwohl die Definition der trigonometrischen Functionen der Winkel im zweiten u. s. w. Quadranten am Kreise bewirkt zu sein scheint, kann der Lehrer, welcher nach der allein wissenschaftlich zulässigen Definition durch das Additionstheorem arbeitet, das Buch seinem Unterrichte anpassen. Interessant sind die Anwendungen auf die Cardanische Formel S. 38, streng und doch dem Schülerverständniss angepasst die Ableitung von $\sin nx$, $\cos nx$ und des Moivre'schen Lehrsatzes. Vorgerücktere Schüler finden besonders S. 50 reichen Uebungsstoff, der ihnen bei einiger Anleitung durch den Lehrer einen nützlichen Ausblick in die Analysis eröffnet. Gleiches gilt von S. 60.

Die ebene Trigonometrie S. 61 flg. enthält eine ausserordentlich reichhaltige und gutgeordnete Sammlung von Aufgaben. Man erkennt auf Schritt und Tritt den tüchtigen Praktiker. Musterbeispiele sind in 7- und 5stelliger Rechnung ausführlich gegeben. (Bei der letzteren hätten wir die Winkel nicht in Secunden, sondern in Zehnteln von Minuten angegeben.) Mit Recht betont die Vorrede, dass neben den theoretisch wichtigen sich viele der Praxis entnommene Beispiele finden. Auch die Mechanik, Optik, Akustik und Astronomie liefern Uebungsmaterial. Damit der Lehrer jeden Augenblick zu irgend einer Aufgabe ein Zahlenbeispiel bilden könne, hat der Verfasser eine höchst zweckmässige Einrichtung getroffen. Er hat für 20 Dreicke einige 30—40 Stücke a, b, c, α, β, γ, r, ϱ, h, p, w_a u. s. w. ausgerechnet und tabellarisch zusammengestellt. Dabei sorgen sorgfältig aufgeschriebene Zusammenstellungen von Formeln dafür, dass die Aufgaben für den Durchschnittsschüler bei häuslicher Vorbereitung keine Räthsel, sondern Aufgaben sind. Die Aufgaben für das Viereck (Tetragonometrie) hätten wir in geringerer, die über Maxima und Minima vielleicht in grösserer Vollständigkeit gewünscht. Polygonometrie durch Coordinatenmethode ist kurz behandelt. Unter den S. 178 gegebenen Taktionsaufgaben vermisst Referent die wunderschöne Lösung des allgemeinen Problems, welche bei Gauss (Werke, IV., S. 399) zu finden ist. Auch die Malfatti'sche Aufgabe kann man nach der von Schellbach gegebenen Methode sehr wohl mit Primanern lösen.

Für die sphärische Trigonometrie sind dieselben praktischen Gesichtspunkte massgebend gewesen.

Das Buch ist seinem Inhalte nach reichhaltig. Der Stoff ist gründlich und von den Grundzügen bis an die äussersten Grenzen der elementaren Behandlung in übersichtlicher Fülle gegeben. Die verdiente Anerkennung hat ihm nicht gefehlt und wird ihm ferner nicht fehlen.

Coesfeld, im August 1885. K. Schwering.

Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, von J. A. Serret, membre de l'institut et du bureau des longitudes. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Axel Harnack, Professor am Polytechnikum zu Dresden. 2. Band erste Hälfte: Integralrechnung. VIII, 379 S. 2. Band zweite Hälfte: Differentialgleichungen. VI, 388 S. Leipzig, B. G. Teubner. 1885.

Wenn wir Bd. XXX, Histor.-liter. Abth. S. 28, aus dem 1. Bande des Serret-Harnack'schen Lehrbuches die Zuversicht schöpften, dasselbe werde bald zu den meistempfohlenen gehören, so hat diese Vorhersage sich nicht nur bewahrheitet, sondern seit der Vollendung des Werkes auch glänzend gerechtfertigt. Die beiden Hälften des 2. Bandes, eigentlich besser 2. und 3. Band genannt, da sie äusserlich vollständig getrennt, auch besonders paginirt sind, halten reichlich, was der 1. Band versprach, und mehr als das. Herrn Harnack's Zusätze, häufiger und umfangreicher, als sie es in jenem 1. Bande waren, ergänzen das vorher schon durch Serret'sche Reichhaltigkeit, Strenge und Eleganz sich auszeichnende Lehrbuch mit den Ergebnissen neuerer, namentlich deutscher Forschung. Wo giebt es, so mochte man noch vor Kurzem rathlos die Frage stellen, ein Lehrbuch des Infinitesimalcalculs, das, von den Elementen ausgehend und dem Anfänger verständlich, zugleich zu den Höhen der Wissenschaft führt und bei den verschiedenartigsten Vorlesungen als Beihilfe häuslichen Studiums dienen kann? Seit der Vollendung des Werkes, von dem hier die Rede ist, braucht man um eine Antwort auf diese Frage nicht verlegen zu sein. Es leistet vollständig das Verlangte. Wir haben die drei Bände gerade mit Rücksicht auf die Benutzung neben Vorlesungen genau angesehen, und wir behaupten, sowohl bei Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, als auch bei solchen über Curven und Oberflächen, über bestimmte Integrale, über Differentialgleichungen, über Variationsrechnung, über Einleitung in die Functionentheorie werde der Studirende sich mit Nutzen ihrer bedienen. Bei späteren Auflagen, welche gewiss nicht auf sich warten lassen werden, kann ja Herr Harnack, nach dem Tode von J. A. Serret vollständig unabhängig gemacht in seiner Bearbeitung, vielleicht noch etwas mehr in Citaten leisten, wir meinen, durch Noten mit genauem Hinweise auf Abhandlungen aufmerksam machen, welche über das im Buche Gelehrte hinausgehen, wie er es jetzt schon an nicht gerade wenigen Stellen gethan hat. Wir vermissen z. B. ungern den Dirichlet'schen Discontinuitätsfactor als solchen, die Erwähnung der Beltrami'schen Arbeiten über Oberflächen von überall constanter Krümmung, die Dubois-Reymond'schen Abhandlungen über Doppelintegrale und dergleichen mehr; aber wir heben rühmend hervor, dass der Abhandlungen von Mayer über singuläre Integrale, deren von demselben und von Lie über Differentialgleichungen, der ersten grossen Abhandlung von Fuchs über lineare Differentialgleichungen, geometrischer Untersuchungen von Brill und Nöther u. s. w. gedacht ist. Ganz neue

Dinge wird man in einem Lehrbuche, das überdies an ein schon vorhandenes Werk sich genau anschliesst, nicht suchen wollen, und eben darum darf der Berichterstatter sich der Mühe entheben, den Inhalt genauer zu schildern. Das kurz Erwähnte mag genügen und zwar um so mehr, als sicherlich eine grosse Anzahl der Leser dieser Besprechung das Werk schon kennen, vielleicht selbst besitzen wird.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. December 1885 bis 31. Januar 1886.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften, Jahrg. 1886, Nr. 1 und 2. Berlin, Dümmler. compl. 12 Mk.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 32. Bd., Jahrg. 1885. Göttingen, Dieterich. 48 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien, mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 50. Bd. Wien, Gerold. 50 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien, mathemat.-naturwissenschaftl. Classe, Abtheil. II. 92. Bd., 2. Heft. Ebendas. 8 Mk.

Mémoires de l'Acad. imp. des sc. de St. Pétersbourg. 7. série, tome 33, no. 3 und 4. Petersburg und Leipzig, Voss. 3 Mk. 80 Pf.

Annalen des physical. Centralobservatoriums in Petersburg, herausgegeben von H. Wild. Jahrg. 1884, 1. Thl. Ebendas. 10 Mk. 20 Pf.

Repertorium für Meteorologie. (Akad.) Redigirt von H. Wild. 9. Bd. Ebendas. 19 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Ohrtmann, herausgegeben von Henoch u. Lampe. 15. Bd., Jahrg. 1883, 1. Heft. Berlin, G. Reimer. compl. 10 Mk.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftl. Unterricht, herausgeg. von J. C. V. Hoffmann. 17. Jahrg. (1866, 6 Hefte). 1. Heft. Leipzig, Teubner. compl. 12 Mk.

Annalen der Physik und Chemie (begr. v. Poggendorff), herausgeg. von G. Wiedemann. Jahrg. 1886 (12 Hefte), 1. Heft. Leipzig, Barth. compl. 31 Mk.

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben v. G. u. E. Wiedemann. 10. Bd. (12 Hefte), 1. Heft. Ebendas. compl. 16 Mk

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, herausgeg. von R. v. Hanstein. 35. Jahrg., 1. Heft, Januar — Juni 1885. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 40 Pf.

Reine Mathematik.

Möbius, A., Gesammelte Werke. 2. Bd., herausgegeben von F. Klein. Leipzig, Hirzel. 16 Mk.

Weierstrass, K., Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen bearbeitet von H. Schwarz. 2. Heft. Berlin, Friedländer & S. 1 Mk. 20 Pf.

Pick, G., Ueber mehrdeutige doppelt-periodische Functionen. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Lipschitz, R., Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Bonn, Cohen. 5 Mk.

Gegenbauer, L., Ueber das Symbol $\left(\frac{m}{n}\right)$. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

——, Ueber ein Theorem von Hermite. Ebendas. 20 Pf.

Janisch, O., Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Herausgegeben von H. Funcke. Potsdam, Stein. 3 Mk.

Landmesser, F., Lehrgang der ebenen Trigonometrie. Bensheim a. B., Ehrhard & Comp. 1 Mk.

Müller, R., Planimetrische Constructionsaufgaben. Oldenburg, Stalling. 1 Mk. 20 Pf.

Greenhill, A., Differential and integral calculus. London, Macmillan. 7 sh. 6 d.

Eagles, H., Constructive geometry of plane curves. Ebendas. 12 sh.

Angewandte Mathematik.

Bohn, C., Die Landmessung. 2. Hälfte. (Schluss.) Berlin, Springer. 10 Mk.

Wagner, H., Tafeln der Dimensionen des Erdsphäroids. Auf Minuten-Decaden erweitert von A. Steinhauser. Wien, Hölzel. 2 Mk.

Veltmann, W., Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach dem Princip symmetrisch berechneter Mittelgrössen. Marburg, Elwert. 4 Mk. 20 Pf.

Boltzmann, L., Ueber einige Fälle, wo die lebendige Kraft nicht integrirender Nenner des Differentials der zugeführten Energie ist. (Akad.) Wien, Gerold. 45 Pf.

Zwerger, M., Die lebendige Kraft und ihr Maass. München, Lindauer. 7 Mk.

Uhlig, P., Die Festigkeitslehre und ihre Anwendung. Dresden, Knecht. 3 Mk. 50 Pf.

Herz, N., Bahnbestimmung des Planeten Ida (243). (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Mahler, E., Astronomische Untersuchungen über die in hebräischen Schriften erwähnten Finsternisse. 1. Thl.: Die biblischen Finsternisse. 2. Thl.: Die prophetischen Finsternisse. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Shdanow, A., Recherches sur l'orbite intermédiaire de la comète de Faye dans la proximité du Jupiter en 1841. (Akad.) Petersburg und Leipzig, Voss. 80 Pf.

Struve, O., Sammlung der Beobachtungen von Sternbedeckungen während der totalen Mondfinsterniss vom 4. October 1884. Ebendas. 70 Pf.

Physik und Meteorologie.

Verdet, E., Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichts. Deutsch von K. Exner. 2. Bd. 2. Abth. Braunschweig, Vieweg. 3 Mk. 50 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Euklid bei den Arabern.

Eine bibliographische Studie

von

Moritz Steinschneider.

Bei dem Interesse, welches die Geschichte der Mathematik unter den Arabern auch bei Nichtorientalisten gefunden, bedarf diese Studie wohl keiner Rechtfertigung. Die Dissertation von J. C. Gartz: De interpretibus etc. Euclidis arabicis, Halae 1823, welche noch von Orientalisten benutzt wird, ist veraltet und unvollständig. Ihre Hauptquellen sind die unvollständigen Auszüge aus dem biographischen Lexikon von al-Kifti (XIII. Jahrh.) in Casiri's Bibliotheca arab. (namentlich I, 341, Artikel Euklid)[1]), die Bibliothèque orient. von d'Herbelot (der fast nur aus dem bibliographischen, nunmehr arabisch mit Flügel's lateinischer Uebersetzung und in einer orientalischen Ausgabe zugänglichen, bibliographischen Wörterbuch des Hagi Khalfa incorrecte Auszüge giebt) und die anonyme [bekanntlich von Hammer[2]) herrührende] Encyklopädische Uebersicht der Wissenschaften des Orients (Leipzig 1804), wo S. 326 flgg. der Artikel Euklid aus Hagi Khalfa (I, 380 flgg. ed. Flügel, vergl. Index VII, 1067 Nr. 2634) wiedergegeben ist. Ausserdem hat Gartz einige ältere, seitdem vielfach berichtigte Kataloge benutzt. Für Paris ist leider der neue Katalog noch nicht bis zur Mathematik vorgeschritten.

Seitdem ist Manches in einzelnen Abhandlungen, die an ihrer Stelle citirt werden sollen, gefördert worden. Zusammenstellungen finden sich in der bekannten Preisschrift von Wenrich (De auctorum graecorum versionibus etc., Lipsiae 1842, p. 176 flgg. und 303), dem es nicht an Fleiss, aber manchmal an Kritik gebrach, und — wo man es am wenigsten erwarten sollte — in Leclerc's Histoire de la médecine arabe, Paris 1876, 2 Bde.

1) Vergl. den Katalog arab. Hs. der Bodleiana von Nicoll und Pusey (Bd. II, p. 528 n. 540).

2) Ich nenne ihn auch so, der Kürze halber, für von Hammer Purgstall, wenn ich seine Literaturgeschichte der Araber citire, deren Unzuverlässigkeit von Flügel längst proclamirt ist.

(I, 233 flgg. und II, 490 über occidentalische Uebersetzungen).[1]) Wenrich standen drei für unser Thema sehr wichtige Quellen nur in einzelnen Handschriften zu Gebote, nämlich ausser Hagi Khalfa das zu Ende des X. Jahrh. vollendete Buch Fihrist (Katalog) von al-Nadim, nach allen zugänglichen Handschr. redigirt von G. Flügel (Leipzig 1871), wozu aus seinem Nachlass der Commentar als 2. Band (1872), herausgeg. von Joh. Roediger und Aug. Müller erschien. Dieses für die Geschichte der profanen Wissenschaften unentbehrliche Werk ist bis heute noch nicht durch eine Uebersetzung Nichtarabisten zugänglich gemacht, konnte daher auch in Heiberg's Literaturgeschichtlichen Studien über Euklid (1882) nicht verwerthet werden. Es ist meistens die, nicht immer gebührlich benutzte Quelle der späteren Autoren. Das dritte Werk ist die, namentlich durch Wüstenfeld's auf einen Auszug basirte treffliche Geschichte der arabischen Aerzte (Göttingen 1840) bekannte Geschichte der Aerzte (aller Welt) von ibn abi Oseibia (XIII. Jahrh.). Diese ist von August Müller (Königsberg 1884, Selbstverlag) nach allen Recensionen trefflich bearbeitet, leider von dem Drucker in Kairo theilweise misshandelt.[2])

In dem nachfolgenden Versuche einer übersichtlichen Zusammenstellung ist zunächst der Artikel Euklid der Fihrist (S. 265, dazu II, 122) zu Grunde gelegt, und daran geknüpft, was der Fihrist an anderen Stellen, dazu, was Kifti, Oseibia, Hagi Khalfa an Entlehnung und Erweiterung darbieten; auch ist auf hebräische[3]) und lateinische Uebersetzungen Rücksicht genommen.

Sollte dieser Versuch beifällig aufgenommen werden, so würde ich mich zu ähnlichen Studien über andere griechische Mathematiker aufgemuntert sehen.

---

§ 1.

1. Die Elemente der Geometrie.

اصول الهندسة, „griechisch Στοιχεῖα“. Der Name des Euklid ist im Arabischen corrumpirt. Erst Kifti weiss, dass die griechischen Philosophen, oder Weisen, an die Pforten ihrer Schulen schrieben: „Niemand trete ein, der nicht Mathematiker ist“, das heisst, wer nicht die Bücher des Euklid studirt hat. Man hat also einem, dem Plato beigelegten Spruch eine besondere Anwen-

---

1) Vergl. meine Besprechung im Deutschen Archiv für Gesch. d. Medicin, herausgeg. v. Rohlfs, Bd. 1.

2) S. meine Anzeige im Literaturbl., herausgeg. v. Kuhn, 1885.

3) Ueber diese handle ich weitläufiger in der noch ungedruckten, von der Pariser Akadmie im Juni 1885 gekrönten Preisschrift über die hebraischen Uebersetzungen des Mittelalters.

dung auf das Buch Euklid's gegeben. Der Fihrist kennt diese Anwendung nicht.

Wir schicken die Bemerkung voraus, dass die Araber die dem Hypsikles beigelegten Bücher mit Euklid verbanden und sie den 14. und 15. Tractat nannten.

Nach dem Fihrist (S. 266) hatte Hypsikles die Tractate 4 und 5 verbessert (oder redigirt?); man muss aber nach Kifti (Casiri I, 346) 14 und 15 lesen.

Die Elemente wurden zweimal von Hadjdjadj b. Jusuf b. Matar übersetzt; die erste Uebersetzung wurde „Haruni“ (für Harun), die zweite „Ma'amuni“ (für Ma'amun) genannt; letztere ist die mehr anerkannte (وعليه يعول). Mit Recht vermuthet Wenrich, dass die zweite Uebersetzung nur eine Revision der ersten sei. Nach dem Vorworte des Leydener Manuscripts 965 (Klamroth S. 304) wurde die erste Uebersetzung für Ja'hja b. Barmek gemacht, die andere verbessert und abgekürzt.

Die Uebersetzung des Ishak b. Honein wurde von Thabit b. Korra verbessert. Kifti legt dem Letzteren ausser dieser Verbesserung eine unabhängige Uebersetzung bei und Chwolsohn (Die Ssabier I, 553) hebt dieses Zeugniss hervor. Wir glauben mit Klamroth (S. 305, wo dieses Zeugniss vernachlässigt ist), dass Thabit nur die Uebersetzung Ishak's verbessert habe. Wir kommen auf die Verbesserungen Thabit's (am Schlusse von § 5) zurück.

Abu Othman (Said) Dimischki übersetzte einige Traktate; den X. sah Nadim zu Mosul in der Bibliothek Ali's b. Ahmed Imrani (gest. 344 H.), welcher mit dem Astrologen identisch ist, der in der, mit Hilfe des Juden Savasorda oder Abraham bar Chijja angefertigten Uebersetzung des Plato von Tivoli „Embrañi“ genannt wird.[1]) Leclerc (I, 222) hat diese Notiz des Fihrist vernachlässigt, welche er (II, 511) anführt, nicht nach dem Texte des Kifti, sondern nach der falschen Uebersetzung Casiri's (I, 346), nach welcher Ali die Uebersetzung gesehen hätte. Das Jahr 370, welches sich nicht im Texte Kifti's findet, ist von Casiri hinzugefügt. Der Name „Omrani“ ist von Leclerc weggelassen, so dass ihm die Identität mit dem Autor, welcher bald darauf (II, 513) genannt wird, entgangen ist.

Wir werden noch Gelegenheit haben, auf den X. Tractat zurückzukommen.

Verweilen wir einen Augenblick bei den beiden vollständigen Uebersetzungen (abgesehen von der doppelten Revision des Hadjdjadj, deren erstere sich wahrscheinlich nicht erhalten hat). Zunächst fragen wir uns, was sich davon in den arabischen Manuscripten und in den Uebersetzungen erhalten

1) Zeitschr. f. Math. XII, 22; XVI, 370. Ztschr. D. M. G. XXV, 393. — Das von Plato aus dem Hebräischen übersetzte Buch gehört eigentlich nicht in Wüstenfeld's Latein. Uebersetzungen aus dem Arabischen (S. 43), wohl aber das Werk des Imrani, das er nicht aufführt.

hat. Ehe wir in die Einzelheiten eintreten, müssen wir einer kritischen und linguistischen Arbeit des Dr. Klamroth (Ueber den arabischen Euklid) erwähnen — in der Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft (Bd. 35 S. 270—325) —, welche die verschiedenen Uebersetzungen von verschiedenen griechischen Texten herrühren lässt.

Die Manuscripte der Elemente, welche den Namen Euklid's tragen, sind nicht selten; Wenrich (S. 179) nennt mehrere in der Bodleiana, im Escurial und im Paris, wozu sich andere hinzufügen liessen, z. B. im British. Museum Nr. 974, 1334, 1335, India Office Nr. 736—740, 768 1, 2, in Kopenhagen, in Upsala Nr. 321, in Oxford, St. John's College Nr. 145 (Coxe p. 48), und besonders die Manuscripte Nr. 279 und 280 der Bodleiana, beschrieben von Nicoll (S. 257, 258); das zweite Manuscript, geschrieben im Jahre 1260/61 in Meraga bei Lebzeiten Tusi's, enthält ein von Nicoll übersetztes Vorwort, in welchem Avicenna und abu'l-Wafa citirt sind; das hindert Heiberg nicht, den Uebersetzer Thabit für dieses Vorwort verantwortlich zu machen! Nicoll (S. 260 k) möchte beweisen, dass das Manuscript 279 die Uebersetzung Ishak's vor der Verbesserung enthalte, wenn wir ihn richtig verstehen. Hat auch er dem Thabit den Prolog beigelegt? oder will er das Gegentheil sagen, indem er den Prolog dem Ishak beilegt? Klamroth hat dieses Vorwort ganz unbeachtet gelassen.

Mehrere Manuscripte enthalten keine der alten Uebersetzungen, sondern die Redaction (تحرير) Tusi's (s. § 5), welche mit Unrecht, z. B. von Jourdain und noch von Nicoll (S. 258) und selbst von Heiberg (S. 5, 6), als eine Uebersetzung betrachtet worden ist. Andere Mss. haben Inschriften, welche den Bibliographen entlehnt sind, die direct oder indirect aus dem Fihrist schöpfen; einige Manuscripte sind aus verschiedenen Uebersetzungen zusammengesetzt, wie die drei Manuscripte, welche Klamroth analysirt hat. Endlich enthält eine Anzahl von Commentaren, die wir aufzählen werden, den ganzen Text oder einen grossen Theil desselben.

Man legt eine Uebersetzung des XIV. und XV. Tractates (Hypsikles) dem Costa b. Luca bei.[2])

Betreffs der lateinischen Uebersetzungen nennen wir einen Artikel von H. Weissenborn (Die Uebersetzung des Euklid aus dem Arabischen u. s. w. durch Adelhard von Bath), in der von Cantor veröffentlichten Sammlung (Abhandlungen zur Gesch. d. Mathematik Bd. II, 1880, S. 141—166), wonach Adelard (um 1120—1130) und Campanus von einander unabhängige Uebersetzungen gemacht hätten;[3]) aber M. Curtze (Sonderabdruck des „Jahresberichts über die Fortschritte der klassischen Alterthumswissenschaft“ vom

2) Ms. bei Uri 919, Wenrich p. 178.

3) Vergl. die älteren Ansichten bei Leclerc II, 294; Wüstenfeld, Lat. Uebers. S. 20; vergl. unten Anm. 5.

October 1879—1882, Berlin 1884, S. 19) behauptet, dass Beide eine Uebersetzung der Theoreme benutzten, welche bis zum X. oder XI. Jahrhundert hinaufreicht (Ms. in München); er beweist sogar, dass die Citate Weissenborn's im Namen Adelard's nicht aus den beiden Erfurter Manuscripten gezogen sind. Die Citate bei Curtze (S. 20) aus diesen Manuscripten bieten die arabischen Worte elmuaim oder elmuhim (المعيّن) und helmunharifa oder elmuarifa. Wir fügen hinzu, dass der „Prologus N. (Joannis) Ocreati[4]) in helceph ad Adelardum“ u. s. w. veröffentlicht wurde von Charles Henry nach dem Manuscript 6626 der Nationalbibliothek in der erwähnten Sammlung (Abhandl. u. s. w. S. 131 flgg.). Henry hat Ocreatus vergebens bei den englischen Biographen gesucht; er weiss nicht (wie Leclerc S. 297), dass der Catalog. Mss. Angliae (II, 247 Nr. 8639) Joann. Ocreatum zum Uebersetzer der Elemente macht. Leclerc erklärt das Wort helceph durch „el-hasseb“, das Rechnen. Rodet (bei Henry S. 132) erklärt es durch القَيْف, Prüfung, Forschung (des Rechnens). Die erste Erklärung ist gegen die gewöhnliche Umschreibung; man setzt nicht *c* für arabisches ح. Die zweite Erklärung bietet ein, Freitag und Dozy unbekanntes Wort, und es setzt einen Titel voraus, wo nur die Bezeichnung einer Rechnungsart vorliegt. Der Text selbst giebt „Helcep *(sic)* Saracenicum tractare de multiplicatione scilicet numerorum et divisione“. Ist es etwa ضعف verdoppeln (= multipliciren)? Uebrigens findet man in der Liste der Uebersetzungen Gerard's von Cremona (Nr. 4) „Liber Euclidis Tractatus XV“; aber man kennt kein Manuscript derselben.[5])

Es giebt mindestens zwei ältere hebräische Uebersetzungen der Elemente, deren eine wahrscheinlich aus dem Lateinischen zu einer unbekannten Zeit abgefasst worden;[6]) die andere, welche aus einer arabischen Uebersetzung Ishak's entstanden, von Thabit verbessert worden, ist in den verschiedenen nicht seltenen Manuscripten einem der beiden, fast gleichzeitig lebenden und zu derselben Familie gehörenden Gelehrten Moses Tibbon (etwa 1244—1274) oder Jakob b. Machir (dem berühmten Prophatius in Montpellier, kurz nach 1306 gestorben) beigelegt.[7]) Nach einer Randnote des Manuscripts

---

4) Ueber ihn vergl. Leclerc II, 397; Wüstenfeld l. c. S. 23.

5) Leclerc l. c. II, 409; Wüstenfeld l. c. S. 59 bemerkt: „Die Ausgaben und bis jetzt bekannten Handschriften dieses Werkes enthalten die Uebersetzung des Adelard.“ Eine Ausgabe des Letzteren existirt nicht, aber Wüst. nahm (S. 21) an, dass dem edirten Campanus nur der Commentar angehöre

6) Ueber die Hs. Mantua 2 verdanke ich meinem gelehrten Freunde und Verfasser des Catalogo dei Manuscr. ebr. della biblioteca della comunità israel. di Mantova compilato dal Rabb. maggiore Marco Mortara (Livorno 1878), ausführlichere Mittheilungen, welche anderswo verwerthet werden sollen. Ueber eine Bearbeitung des Jehuda b. Salomo Kohen (1247) s. Anhang II.

7) Dieser auffällige Umstand ist noch immer nicht genügend aufgeklärt, auch nicht in der Histoire lit. de la France, t. XXVII p 608. Die Hss., welche den

36 zu München hätte Hadjdjadj algebraische oder arithmetische Proportionen für die geometrischen substituirt. Thabit hat die griechischen Lesarten zu Rathe gezogen (s. unten § 5).

§ 2.

Die Commentare und Bearbeitungen.

Wir geben die Nachrichten des Fihrist über die Commentare, die sich mit den Elementen beschäftigt haben, indem wir seinem Texte folgen und einige Notizen über die Autoren einschalten. Wir schliessen eine Anzahl anderer, dort nicht genannter Autoren daran. Im Allgemeinen müssen wir bemerken, dass der Fihrist in diesem Capitel oft unter dem griechischen Autor auf den arabischen Erklärer verweist. Die Artikel dieses Capitels, welche die arabischen Autoren betreffen, werden theilweise von Kifti wiederholt; Casiri (I, 402—444) hat daraus eine Anzahl von Mathematikern mit einer sehr ungenauen lateinischen Uebersetzung gezogen. Dennoch hat E. A. Sedillot (Prolégomènes des tables astronomiques d'Oloug-Beg p. IX sqq.) die unvollständigen Texte (Lücken sind mitunter durch Punkte angedeutet) und die lateinische Uebersetzung Casiri's in einer, theilweise problematischen chronologischen Ordnung wiedergegeben.[8]) Der Fihrist unterscheidet hier nicht die Autoren der Commentare von denen der Compendien und auch wir vereinigen in unseren Ergänzungen die verschiedenen Arten der Erklärungen und der Bearbeitungen. Wo wir nichts Näheres angeben, handelt es sich nur um Commentare.

Unter den zu citirenden Manuscripten ist eines der interessantesten das Pariser Suppl. ar. 952, 2, geschrieben im Februar—März 968 von einem Mathematiker in Schiraz. Es enthält 50 Stücke, welche F. Woepcke aufzählt in seiner Abhandlung: Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius (Mémoire présentés t. XIV, p. 663 flgg.; Sonderabdruck 1856 p. 6—14).

Nach Heron (ايرن) erwähnt der Fihrist:

al-**Neirizi** (ein Name, der oft in Tabrizi entstellt worden ist). Sein Commentar über die Tractate I—VI findet sich in dem Leydner Ms. 965 (III, 38). In der Liste der Uebersetzungen Gerard's von Cremona (Nr. 15) liest man: „Liber anaritii super Euclidem tr. I", aber man kennt keine Handschrift davon. Giebt N. Citate aus Heron?

Namen des Moses ibn Tibbon führen und die Vorrede des Jakob b. M. nicht enthalten, sind nicht seltener (wie Mortara zu Cod. 1 angiebt).

8) Die chronlogische Tabelle, p. CL—CLV, darf nicht ohne Controle benutzt werden; sie enthält viele Anachronismen. Ich habe verschiedene Namen und Daten, welche theilweise in andere Schriften übergegangen sind, bei verschiedenen Gelegenheiten berichtigt.

Der Fihrist erwähnt in dem Artikel Neirizi (abu'l-Abbas **al-Fadhl** b. Hatim, S. 279) nicht den Commentar zu Euklid, während Kifti (Casiri I, 421) ihn angiebt; auch Maimonides citirt ihn (s. die Citate in Zeitschr. D. M. G. Bd. 24 S. 336 und Magazin für die Wissenschaft des Judenthums III, 199). Neirizi widmete ein Werk dem Khalifen al-Mustadhid, welcher im Jahre 892—902 herrschte. Hagi Khalfa (I, 382; VII, 610) las Jezidi.[9])

Al-**Kerabisi** (Ahmed b. Omar u. s. w. — S. 282; Kifti, bei Casiri S. 410 voll von Irrthümern, wie Hammer III, 266 N. 1173 = IV, 283), nicht Qarabisi, wie bei Woepcke, Mémoire sur la propagation des chiffres ind. p. 156. Bei Hagi Khalfa wird er mit Ahmed b. Muhammed vermengt; s. Zeitschr. d. Deutsch. Morgenländ. Gesellsch. Bd. 24 S. 370, nicht beachtet im Fihrist II, 133. Man kennt seine Zeit nicht genau, wahrscheinlich fällt sie in das IX. und X. Jahrhundert.

9) Hammer, Lib. IV, 311, übersieht das Wort ألة, übersetzt sprachwidrig: Buch der ungünstigen Ereignisse für den Chalifen, und corrigirt Casiri's Uebersetzung: „Liber imperatori (nicht imperatoris, wie H. citirt) M. inscripsit." — Wüstenfeld (latein. Uebers. S. 75) vermuthet, dass Neirizi der Verfasser der Geomantie sei, welche als „Liber alfadhol, i. e. arab. de bachi" im Register der Uebersetzungen Gerard's von Cremona (Nr. 69) erscheint und in latein. Hss. enthalten ist (s. auch die Wiener Tabulae Codd. II, 135 Nr. 2704[3]). Es findet sich auch die Angabe: „de Merēgi" (Merengi) qui fuit Saracenus filius Sedel, cujus pater fuit de Arabia mater vero de Chaldea"; die Pariser Hs. hat Sedbel. Wüstenfeld legt auf die Abstammung keinen Werth, liest richtig al-Fadhl, und Merengi soll aus Neirizi entstanden sein; Sedbel sei kein arabischer Namen. Allein Sedel ist besser und offenbar entstanden aus Sehel, und de bachi eine Corruption von Naubakht, Namen einer aus Persien stammenden bekannten Familie, über welche ich anderswo handeln werde, um hier nicht zu weit abzuschweifen. Abu Sahl al-Fadhl ben Naubakht war ein Astrologe zur Zeit Harun's, unter dessen Schriften im Fihrist (S. 274, vergl. Kifti bei Casiri I, 421, wo der Theologe Ismail confundirt ist) ein astrologisches Loosbuch und ein Buch, betitelt المنتحل, woraus vielleicht der undeutlich geschriebene Titel المنتخبات von „Fadhl ibn Sahl ibn Naubakht" (Katal. d. Brit. Mus. S. 426) geworden; der Namen Naubakht ist dort ebenfalls corrumpirt. Fadhl ben Sahl (aber nicht Naubakht, soviel ich sehe) hiess ein Wezir Maamuns, dessen Identität mit dem Astrologen abu Sahl mir sehr zweifelhaft erscheint. Das arabische Original der astrologischen Geomantie in 144 Abschnitten hat Ign. Guidi in der anonymen arab. Hs. 35 der Bibliothek Vittorio Emanuele in Rom erkannt (Catalogo dei codd. orientali di alcune biblioteche d'Italia, Firenze 1878, p. 21), zugleich die Identität mit der Hs. 1004 des Brit. Mus. (Catal. p. 466), welche einem, sonst unbekannten Abd Allah ben Obeid el-Munedjdjim (Astrolog) beigelegt wird, der das Werk für Harun al-Raschid verfasst habe. Ferner verweist Guidi auf die Geomantie des Abd Allah ben Ali ben Ma'hfuts el-Munedjdjim in der Bibliothek des Khedive (arab. Katalog p. 199). Ich kann letzteren augenblicklich nicht anders belegen, als durch H. Kh. V, 373 Nr. 11365 (nur diese Stelle im Index p. 1136 Nr. 5126); s. VII, 871, wo zwei Hss. in Constantinopel nachgewiesen sind, aber nur der variirende letzte Namen des Ahns oder Grossvaters gegeben ist. Ueber das Verhältniss dieser Geomantie zur obigen lässt sich aus blossen Titelangaben nichts ermitteln. Die angeblichen Autoren sind offenbar nicht identisch.

Al-Djauhari (al-Abbas ben Said) commentirte das ganze Buch. Der Fihrist (S. 266) verweist auf den betreffenden Artikel (S. 270, II, 128; Kifti bei Casiri p. 403; Wenrich p. 302; Hammer III, 259 N. 1145). Er fügte, wie es scheint, in einer besondern Schrift einige Figuren zu dem ersten Tractat hinzu. Er war einer der Beobachter unter Ma'amun (832).

Al-Mahani (abu 'Abd-Allah Muhammed b. Isa), commentirte den V. Tractat. Nach dem Specialartikel (S. 271, II, 128, s. die Citate in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. X, 474; Kifti bei Casiri p. 431; Wenrich p. 188 giebt keine Details) verfasste er ein Buch über 26 Axiome (?) in dem ersten Tractat. In dem Manuscr. suppl. ar. 952,[39] (Woepcke l. c. S. 12) findet sich ein Fragment seines Commentars über den X. Tractat. Er lebte um 854—866.

§ 3.
Fortsetzung.

Der Fihrist schiebt hier eine interessante Notiz ein, welche von Wenrich übersehen worden ist, der daher einen Uebersetzer weglässt:

Natsif (نظيف), der sich mit Medicin beschäftigte, erzählte Nadim, dass er den X. Tractat in griechischer Sprache, um 40 Figuren mehr als die gewöhnlichen Exemplare enthaltend (die 109 Figuren enthalten), gesehen, und dass er sich bemüht habe, diese (die 40 Figuren) arabisch zu übersetzen; s. weiter unten.

Natsif القس (der Presbyter, s. Oseibia I, 236; Leclerc I, 190, 376; Hammer V, 362 N. 4184 نظيف القس, und القيس N. 4185; Nadif bei Gartz S. 18) wird fälschlicherweise النفس genannt in dem unedirten Artikel Kifti's; bei Hagi Khalfa (I, 382) wird er mit Abdal-Latif (s. De Sacy, Relation p. 494) vermengt. Kifti und Oseibia nennen ihn als Uebersetzer aus dem Griechischen, ohne ein Werk genau anzugeben, vielleicht nur wegen der genannten Stelle? In dem Ms. suppl. ar. N. 952 wird er abu Ali ben Jaman (Benjamini?) genannt. Die Nrn. 18 und 34 jener Hs. enthalten seine Uebersetzung der Zusätze zu einigen Propositionen des X. Tractates, wahrscheinlich diejenigen, die der Fihrist erwähnt. Sein Beinamen steht in dem vom October 970 datirten Briefe von al-Sidjzi (ib. n. 27, Woepcke l. c. p. 10); dieses Datum dient zur Bestimmung seiner Zeit und beweist, dass Natsif selbst übersetzte, während man die Stelle im Fihrist so verstehen könnte, dass er übersetzen liess.

Juhanna (Johann), der Presbyter (القس), besass [in seinem Exemplar] in griechischer Sprache die Figur (das Theorem)[10]) in Tr. I, welche Thabit [ben Korra] sich angeeignet hatte, und zeigte sie dem Natsif. — Thabit dürfte sie in seinem Exemplar der Uebersetzung Ishak's nicht gefunden, und hinzugefügt haben, ohne dass er behauptet hätte, sie erfunden zu haben. Zu IX, 31 bemerkt Thabit, dass er die Figuren 30 und 31

---

10) شكل, Figur, bedeutet auch allmälig Lehrsatz (Klamroth S. 285), wie Diagram im Griechischen (Heiberg, Studien 16, der Gartz S. 12 citirt).

nicht in griechischer, sondern in arabischer Sprache gefunden habe; Klamroth (p. 279) schliesst daraus, dass die Araber zur damaligen Zeit sich für einen authentischen Text interessirten (s. § 5 unter Tusi).

Der Presbyter Johannes ist auch ausserdem als Uebersetzer bekannt; nach dem Artikel des Fihrist (S. 282, II, 133, Kifti bei Casiri S. 426) studirte man unter der Leitung desselben den Euklid. Eine seiner Abhandlungen ist copirt, die andere (welche im Fihrist erwähnt ist) widerlegt von al-Sidjzi, in dem Manuscript suppl. ar. 952 n. 49 und 10 (Woepcke, l. c. pp. 13 und 8). Demnach lebte er in der zweiten Hälfte des X. Jahrhunderts.

Al-**Khazin**, Abu Dja'afer, aus Khorasan, hatte einen persischen Namen, der in dem kurzen Artikel des Fihrist (S. 282, II, 133) nicht ausgefüllt ist. Das gab Kifti Veranlassung, seinen Artikel mit der Bemerkung (welche bei Casiri S. 408 weggelassen ist) zu schliessen, dass er unter seinem (arabischen) Beinamen bekannter war. Chwolsohn hatte ihn mit abu-Ru'h (oder Rau'h, s. Zeitschrift für Mathematik X, 479) identificirt. Sein Commentar über den صدر des X. Tractats findet sich in den Leydener Handschriften 1468, 1469 (geschrieben für Golius, Katalog III, p. 40, 41). Am Ende bemerkt Khazin, dass der Rest schon von Soleiman b. عطمة commentirt worden sei (s. § 4). — Seine Methode wird (von Tusi? Nicoll p. 262, s. unten § 3) charakterisirt und getadelt. In den Mss. L. 992 und 1014 finden sich zwei andere Werke Khazin's; in dem ersteren werden zwei Autoren genannt, welche der Katalog (III, 52) nicht zu entziffern wusste. In dem einen habe ich bereits in dieser Zeitschrift (X, 491) den Byzantiner Philon erkannt; dass der andere, dessen Namen zu برقلى verstümmelt ist, Diocles heisst, und dass die Quelle Eutocius ist, wird unten im ersten Anhange nachgewiesen. Die Zeit, in der Khazin lebte, wird dadurch festgestellt, dass er ein Zeitgenosse des abu Zeid al-Balkhi war (s. Monatsschrift für Geschichte und Wissenschaft des Judenthums, 1882, S. 329).

Als Commentator Euclid's hat Khazin einen Doppelgänger erhalten: abu '**Haf's** al-Harith.[11])

11) Dieser bisher unerkannte Umstand ist für die Entstehung von Doppelgängern in der arabischen Literatur charakteristisch. Für abu Dj. al-Khazin findet sich in Handschriften des Fihrist (II, 122 A. 4, nachzutragen im Index II, 219): ابو حفص الحرث; das Wort الحرث ist vielleicht eine angefangene Doublette des folgenden الخرسانى (al-Khorasani); denn nur abu 'Haf's (nicht al-'Harith) findet sich bei Kifti, im Artikel Euklid (bei Casiri I, 341, der p. 340 das Wort „Persa“ als Erklärung von Khoraseni hinzufügt; „ergo Persa“ bei Gartz § 66). Je nach der Quelle erscheinen daher zwei Commentatoren zu Euklid, resp. zum X. Buch, z. B. bei Hagi Khalfa unter Enklid (I, 382) abu 'Hafs al-'Hareth, neben Khazin, bei D'Herbelot, Art. Hareth; bei Hammer, Encykl. Uebersicht S. 327 Abu'l Chafs (*sic*) aus Chorassan und S. 328 über das X. Buch Abu Dschafer el Haress (!) Gartz S. 16 § 11 hat wohl die Identität des Letzteren mit al-Khazin, aber nicht die des Abu Hafs S. 18 § 6 errathen können. Aber auch Wenrich (p. 187), dem

Abu'l-Wafa al Buzdjani (Muhammed) hat seinen Commentar nicht beendigt. Wir werden uns bei diesem berühmten Schriftsteller (gestorben im Jahre 997, s. Fihrist II, 133, zu I 283 Note 2) nicht lange aufhalten. Der verstorbene E. A. Sedillot hat ihm die Kenntniss der Variation des Mondes in verschiedenen Schriften bis zu seinem Tode, namentlich gegen Biot, zu vindiciren gesucht. Nach dem Prolog bei Nicoll. (S. 261) ist „der Neisaburi“ oft zu weitschweifig, oft zu kurz.

§ 4.
Fortsetzung.

Ein Schriftsteller **Râhawijja** al-Ardjani commentirte den X. Tractat. Kifti hat diesen Autor übergangen, folglich existirt er nicht für Wenrich!

Abu'l-Kasim al-**Antaki** (lies الانطاكى) verfasste einen Commentar über das ganze Buch, der veröffentlicht worden ist. Es ist zu verwundern, dass Flügel nicht die Identität erkannte dieses Autors mit Abu' l-Kasim Ali b. Ahmed, auch Mudjtabi [Modjetabi und معلوى (?) in Woepcke's Mémoire sur la propagation des chiffres etc. S. 160] genannt, gestorben am 15. April 987; s. den Artikel des Fihrist (S. 284). Der Namen und Beinamen fehlt hier, steht aber in Kifti (bei Casiri I, 441, Woepcke l. c. und selbst bei Wenrich S. 187, siehe auch die Citate in meinen *Lettere,* S. 30, Baldi, S. 94). Der Commentar über den V. Tractat und die folgenden, welcher in dem Ms. der Bodleiana bei Nicoll S. 262 N. 281 den Titel führt: „Commentar über Euklid und Lösung seiner Schwierigkeiten“, wird ibn Heitham beigelegt, aber Nicoll (s. S. 541) legt ihn ohne genügenden Grund dem Khazin bei.

Sind b. Ali commentirte das Buch der Elemente; abu Ali sah neun Tractate und einen Theil des X. — Dieser jüdische Renegat, welcher abu't-Tajjib genannt wird, hatte früher eine Synagoge in Schemasijje errichtet, wo er später (gegen 830) den Sternenbeobachtern präsidirte; s. den Artikel des Fihrist, S. 275, II, 130, wiederholt von Kifti bei Casiri, S. 440, wo das Ende fehlt (s. Zeitschrift der Deutsch. Morgenländischen Gesellschaft, Bd. 24 S. 362, Bd. 25 S. 404 N. 11). Leclerc (II, 412) citirt die Notiz des Fihrist nicht genau, indem er Sind zum Autor des liber Judei super X Euclidis in der Liste der Uebersetzungen des Gerard v. Cremona (Nr. 12) macht. Wüstenfeld (Uebersetzer S. 61) ist noch weniger exact, indem er Sind zum Uebersetzer macht; ausserdem scheint er durch

---

alle Quellen zu Gebote standen, hat Abu Hafs Chorasenus für Euklid überhaupt, dann Abu Dschaafer Alchazen für das X. Buch. Hiernach ist im Index von H. Kh. VII, 1078 N. 2955 Abu Haf's mit Abu Jafer p. 1109 N. 4137 identisch. — Anderes betreffend al-Khazin s. in meinen Études sur Zarkali (in Boncompagni's Bullettino) § 18.

Leclerc (II, 512) irregeführt. Wir werden auf diesen Commentar anderswo zurückkommen (s. diese Zeitschr. X, 489).

Abu Jusuf a'r-**Razi** commentirte den X. Tractat für 'Amid. Sein eigentlicher Name war Ja'akub b. Muhammed (s. den Artikel des Fihrist S. 281, Kifti hat keinen Artikel über diesen Gelehrten, dessen Zeit man nicht kennt).

Es folgt nun im Fihrist eine Stelle der Abhandlung al-Kindi's über die Zwecke oder Tendenzen (اغراض, s. II, 132) des Buches Euklids, dessen wahrer Verfasser Apollonius u. s. w. sein soll. Diese Legende hat in der Uebersetzung Casiri's einen strengen Kritiker an Heiberg (S. 3 flg.) gefunden, welcher nicht die erste Quelle kennt und die Araber stets für das verantwortlich macht, was sie ohne Zweifel den Syrern entlehnt haben.

§ 5.

Fortsetzung.

Kifti (bei Casiri, S. 341) hat hier einige Nachrichten eingeschoben, deren erste, einen griechischen Commentator betreffend, wir anderswo besprechen werden. Die anderen sind eingeschaltet in der folgenden Aufzählung, die wir nach dem Alphabet geordnet haben, weil wir die Zeit einiger Autoren nicht genau kennen; wir erledigen durch eine Verweisung diejenigen Autoren, die in den letzten Paragraphen vorangegangen sind.

Abu'l Hasan al-Koscheiri, welcher im Jahre 595 H. lebte, hatte Kifti einige Namen von spanischen Commentatoren mitgeteilt; aber als dieser den Artikel Euklid schrieb, konnte er sich ihrer nicht mehr erinnern. Wir werden einen derselben zu nennen haben (s. Sam'h).

Abd Allah b. Muhammed, s. Schamsi.

Ahwazi oder Ehwazi (الاهوازى), nicht Emwazi, wie man in dem alten Catalogus Lugd. bei Gartz S. 2 (welcher احوازى vermuthet) und bei Wenrich liest. Sein Commentar über den X. Tractat findet sich in den Leydener Mss. 969, 970. Der Katalog (III, 41) citirt den Index zu Hagi Khalfa, in welchem er, ohne den geringsten Grund (s. Zeitschrift der Deutsch. Morgenländischen Gesellschaft, Bd. 17 S. 243, Bd. 24 S. 386) mit Abd Allah b. Hilal des VIII. Jahrhunderts identificirt wird.

Wenrich (S. 187) nennt ihn abu'l-Husein, ohne eine Quelle anzugeben. Abu'l Hasan (leichte Variante von Husein) al-Ahwazi hatte gegen die Tafeln des Khowarezmi[12]) geschrieben; al-Biruni verfasste ein Buch der Einsprache (الوساطة) zwischen beiden.[13])

12) Muhammed ben Musa; vgl. Zeitschr. der Deutschen Morgenl. Gesellsch. Bd. 24 S. 339, Bd. 25 S. 419.

13) Biruni's Verzeichniss seiner Schriften, bei Sachau, Chronologie orientalischer Völker von Albêrunî, Leipzig 1878, S. XL N. 3. — Ahwazi dürfte ein vielleicht älterer Zeitgenosse Biruni's gewesen sein. In Sedillot's Tabelle (Prolég. d'Olough Begh) ist er nicht zu finden.

Antarid (Otharid), s. § 4.

Avicenna; das Compendium des Euklid (von Wenrich S. 189 citirt), welches sich in dem Leidener Ms. Nr. 1445 (III, 319) findet, bildet einen Theil der Encyklopädie „Schefa" (Hebräische Bibliographie X, 54; vergl. Oseibia II, 3, 5, 6, 7, 19).

Costa b. Luca schrieb über die schwierigen Stellen (شكوك) des Buches (Fihrist S. 295, Kifti bei Casiri I, 420; Oseibia I, 245) und verfasste eine Risale über die Ausziehung der auf die Zahlen bezüglichen Fragen des III. Tractats (Fihrist).

Djabir b. Hajjan commentirte Euklid, nach einem fabelhaften Katalog (Fihrist S. 357).

Djauhari, s. § 2.

Djordjani, Ali b. Muhammed, ein berühmter Philosoph (gestorben im Jahre 1413) verfasste Glossen zur Redaction des Tusi (Hagi Khalfa I, 384).

Farabi erläuterte die مصادرات (Erklärungen, Axiome u. s. w.) einiger Tractate; in der wahrscheinlich von Moses Tibbon herrührenden Uebersetzung finden sich die Tractate I und V (s. mein Alfarabi S. 73).

Farisi, Taki ed-Din abu'l-Kheir Muhammed b. Muhammed, schaltete den Commentar Tusi's in seinem Werke über Mathematik ein (Hagi Khalfa I, 383, vergl. IV, 100). Er war ein Schüler des Ghijat u'd-Din Mans'ur (gestorben im Jahre 1542, Hagi Khalfa II, 201; Catal. Lugd. IV, 99).

Abu **'Haf's** (al-Harith), s. Khazin.

Hasan ibn Obeid Allah b. Suleiman b. Wahab, abu Muhammed genannt, im Fihrist unter Euklid vergessen.

In dem Specialartikel (S. 273, Kifti bei Casiri II, 413) muss man mit Hammer (V, 308 N. 4059) zwei Titel unterscheiden: „Commentar (Erklärung) dessen, was schwierig ist (المشكل, Kifti: شكل) in dem Buche Euklid", und „Ueber die Proportionen (oder die Proportion), in Einem Tractat". Casiri, Gartz, Flügel und Wenrich (S. 189) haben daraus einen Commentar zu einem Buch der Proportionen des Euklid gemacht, welches gar nicht existirt, so dass Gartz (S. 25) diesen Titel auf das V. Buch der Elemente bezieht (s. Zeitschr. für Mathem. X, 468, Heiberg S. 24). Hasan ist wahrscheinlich identisch mit ibn Wahab, an welchen Thabit eine Abhandlung über geometrische Probleme richtet, Ms. suppl. ar. 952 N. 43 (Woepcke, l. c. p. 12).

Heitham (ibn) verfasste verschiedene Werke über Euklid. Die Titel werden von Oseibia (S. 90, 91, 93, passim, 94, 97, 98) genannt. Wir geben sie kurz nach der Uebersetzung Woepcke's (L'Algèbre d'Omar Alhayyami, 1851 p. 73—76), indem wir bemerken, dass die Nummern zu verschiedenen von Oseibia angeführten Listen gehören:

1. Commentaire et abrégé des Eléments etc.;

2. Recueil des Éléments de géométrie, et d'arithmétique, tiré des traités d'Euclide et d'Apollonius, dont l'ordre est renversé;

4. Recueil des Éléments du calcul, déduit des principes posés par Euclide dans ses Eléments.

9. Traité de la mesure à la manière des Eléments d'Euclide.

24. Mémoires pour resoudre un doute sur Euclide, relativement au cinquième livre; s. folgende Nummer.

(II) 2. Commentaire sur les définitions de l'ouvrage d'Euclide.

[Anstatt mit „definitions", muss man das Wort مصادرات durch einen allgemeineren Ausdruck übersetzen. Die Bemerkung Klamroth's (S. 286) zu Gunsten Wenrich's beweist, dass er die citirte Stelle in meinem Alfarabi nur oberflächlich gelesen hat.]

Dieses Werk existirt in dem Manuscript der Bodleiana bei Uri 908 und ein Theil desselben in der hebräischen Uebersetzung des Mose Tibbon (Zeitschrift der Deutsch. Morgenländischen Gesellschaft Bd. 24, S. 352). Woepcke identificirt mit diesem Titel das Leydener Manuscript 1069 des alten Katalogs; aber dieses Ms. (Nr. 966 des neuen Katalogs, III, 38) enthält nach der Vorrede den Commentar über die schwierigen Stellen (فى شكوك oder حل شكوك) bis zum V. Tractat. Mehrere ältere und jüngere Autoren haben sich damit beschäftigt; das vorliegende Buch werde, zusammen mit dem Commentar über die Muśadirât, so hofft der Verfasser, eine Art vollständigen Commentars bilden. Kifti unter Euklid (Casiri p. 342) erwähnt beide Schriften. Wir wissen nicht, ob der Autor darin seine einzelnen Abhandlungen über einige Zweifel und schwierige Stellen im Euklid gesammelt habe, s. oben n. 24 und die folgenden Titel. Wir haben gesehen, dass das Manuscript der Bodleiana bei Nicoll Nr. 271 (p. 262) einen Commentar (welcher in dem Manuscript dem ibn Heitham beigelegt ist) enthält, welcher hauptsächlich eine Erklärung der schwierigen Stellen in Tractat V bis XV giebt, das wäre dann eine Fortsetzung des Leydener Manuscripts.

39. Mémoire sur la solution d'un doute sur la partie stéréométrique.

40. Mémoire sur la division des deux quantités etc., mentionnée dans la 1re proposition du Xe traité (le théorème d'exhaustion); Ms. de l'Institut des langues orient. à Petersbourg 192^5 (Rosen, Catal. p. 125).

55. Mémoire sur la solution d'un doute sur les XII. livre.

56. Mémoire sur la solution des difficultés dans le Ier livre.

Ishak ben Honein verfasste ein Compendium اختصار (Oseibia I, 201).

Jezidi, s. Neirizi.

Juhanna u. s. w., s. § 3.

Kadizadeh Rumi, Sala'h u'd-Din Musa b. Muhammed (gest. 1412/13), verfasste Glossen über die Redaction des Tusi (Hagi Khalfa I, 384, siehe weiter unten, Artikel Samarkandi). Ueber diesen bekannten Autor s. Nicoll S. 247 (704); in dem Index des Hagi Khalfa ist er in zwei Artikel getheilt: VII, S. 1207 N. 7780, S. 1118 N. 4446.

Karabisi, s. § 2.

Khajjami, abu'l-Fat'h Omar b. Ibrahim, verfasste im Jahre 470 H. (1077/78) eine Abhandlung über die Schwierigkeiten in den Musadirât, Ms. 1467 (III, 40) zu Leyden. Khajjami ist durch Woepcke's Ausgabe der Algebra hinlänglich bekannt. Gedichte von ihm sind im Journ. Asiat. mitgetheilt.

Khazin, s. § 3.

Kindi verfasste eine Abhandlung über die Verbesserung der Tractate XIV, XV (Hypsicles), s. Nr. 99 des Verzeichnisses seiner Schriften bei Flügel S. 26. Das oben in § 4 citirte Werk, in der Liste Nr. 86 (Flügel S. 52) über die Zwecke u. s. w., bildete nur einen Theil eines anderen Werkes?

Al-**Kauhi** oder **Kuhi** (Bewohner der Gebirgsgegenden von Taberistan, Barhebraeus übersetzt den Namen syrisch: Turojo), abu Sahl-Widjan (über diesen Namen s. Gutschmidt in der Zeitschrift der Deutsch. Morgenländischen Gesellschaft Bd. 15 S. 672) ben Rostom (nicht Wastam), dessen Namen verschiedene Umänderungen erlitten hat, die man in meinem 3. Brief an Boncompagni findet, welcher Nasawi und Kuhi gewidmet ist (p. 31 flg., s. den Nachtrag S. 93, welchen Flügel (Fihirst II, 134) nicht kennt, vergl. Zeitschrift der Deutsch. Morgenländischen Gesellschaft XIII, 633 und Zeitschrift für Mathematik Bd. X, 480, wo sich einige Ungenauigkeiten finden). Nach dem Artikel des Fihrist (S. 383), welcher wiederholt und erweitert wurde von Kifti, bei Casiri I, 441 — 444, und ausgezogen von Woepcke (l'Algébre d'Omar etc. p. 65), verfasste er nach Art des Werkes des Euklid ein Buch der Elemente. Kifti (welcher eine falsche Lesart hat) setzt hinzu, dass das Werk unvollendet geblieben ist, was der Fihrist von dem vorhergehenden Werke sagt; aber er führt die folgenden Titel mit den Worten ein: „was er veröffentlicht hat"; das Buch der Elemente wurde also nicht veröffentlicht. Wenrich (S. 187 und in dem Index) hat also irrthümlicherweise Kuhi als Uebersetzer betrachtet. Nach den von Kifti mitgetheilten Urkunden nahm Kuhi Theil an den astronomischen Beobachtungen im Jahre 988.

Lubudi (ibn al-) Nadjmu'd-Din abu Zakkarijja Ja'hja b. Muhammed, Arzt zu Damaskus, verfasste ein Compendium (des ganzen Buches) und ein Compendium مختصر der Ma'sadirât (Oseibia II, 198). — Sein Vater, Schems ud-Din abu Abd Allah b. Abdân, starb im Jahre 621 H. (1224); s. Wüstenfeld, Gesch. d. arab. Aerzte S. 120, N. 210 und 211; Leclerc II, 160 (I, 419); bei Hammer, VII, 533, fehlen Vater und Sohn; im Index zu Hagi Khalfa VII, 1187 N. 6979, sind sie miteinander vermengt; das Todesjahr des Vaters ist irrthümlich in 661 verändert worden, s. VII, 611 und 736. Auch Leclerc legt Schriften des Vaters dem Sohne bei.

Mahani, s. § 2.

Mudjtabi, s. § 4.

Muhammed (abu) ben Abdu'l-Bâki, Kadhi von Bagdad, hat einen ausgezeichneten Commentar zu dem X. Tractate verfasst, in welchem er die

Figuren durch Ziffern bezeichnete (مثل, was weder Casiri, p. 340, noch Flügel zu Hagi Khalfa I, 382 genau übersetzt). Kifti, der diesen Commentar besass, giebt nicht das Zeitalter des Autors an. H. Khalfa setzt hinzu, dass er „Kadhi Marestan" (Richter des Hospitals) genannt wurde; wir vermuthen hier irgend einen Irrthum.

Natsif, s. § 3.

Neirizi, s. § 2.

Otsma عطمة (ibn), auch Osma, عصمة Im Vowort zu Nasawi (Leydener Katal. III, 90): abu Daûd Suleiman, Verfasser einer Abhandlung über Binome u. s. w., in dem X. Tractat des Euklid, welcher sich in dem Manuscript N. 974 zu Leyden befindet; die Ueberschrift ist dort incorrect,[14]) die Verbesserung des Catalogs (III, 42) nicht besser; der Commentar enthält den Theil, welchen al-Khazin (s. unter diesem) nicht commentirt hat, indem er auf unseren Autor verweist, welcher also zu derselben Zeit (oder früher) lebte; s. Zeitschrift der Deutsch. Morgenländischen Gesellschaft Bd. 17 S. 243, Bd. 27 S. 386. Wenrich (S. 187) giebt den Namen Okba, ohne seine Quelle (nämlich Hagi Khalfa I, 382) anzugeben.

Rahawijja (ibn), s. § 4.

Razi, abu Jusuf Jakub b. Muhammed, s. § 4.

Razi [jun.], Fakhr u'd Din abu Abd Allah Muhammed, ibn al-Khatib[15]) genannt (1210 gest.), commentirte die Musádirât (Kifti bei Casiri I, 183, Oseibia II, 30).

Saïd b. Masud ibn al-Kassbillah (?), dessen Commentar über die Tractate I—VI in dem Leydener Ms. N. 965, geschrieben im Jahre 539 H. nach dem Katalog (III, 38), scheint ins IV. Jahrhundert der Hedjra zu gehören.

Samarkandi, Schams u'd-Din Muhammed, verfasste im Jahre 1196/97 (?) das Buch اشكال التاسيس, zur Erklärung der 35 Grundfiguren des Euklid. Man findet dieses Buch in vielen Manuscripten, besonders mit dem Commentar des Kadhizade (s. oben unter diesem Namen). Ueber das Buch s. den Artikel in meinen Lettere a Don B. Boncompagni (p. 86 und 92), welcher Pertsch (Katalog der Gothaer arab. Hss. II, 123 N. 1498) unbekannt ist. Anonym und ohne Titel findet es sich in den Leydener Mss. 1472 und 1473. Wenrich führt auf derselben Seite (188) die bezeichnenden Worte des alten Katalogs an, ohne den Titel des Buches von Samarkandi zu erkennen; das andere Ms. erwähnt er auf S. 187. Der neue Leydener Katalog (III, 41) ist nicht besser unterrichtet, und der Nachtrag (V, 246) legt das Buch dem Commentator bei.

---

14) Unrichtig لمقالات العشرة ا „in den X Tractaten".

15) So hiess auch der spanische Wezir Lisan u'd-Din; beide werden in hebräischen Quellen genannt; ein ganz verschiedener Namen ist der des jüdischen Astronomen Isak al-A'hdab, oder al-'Hadeb (der Bucklige), der 1396 in Syrakus lebte, s. meine Études sur Zarhali § 18.

Die Sterntabelle in dem Leydener Manuscript 1196,[3] (III, 157) kann von Samarkandi nicht 675 H. datirt sein.

Sam'h (ibn, oder Samma'h, nicht Samdj, abu'l Kasim Asbag b. Muhammed), Arzt aus Granada (gest. 1035, nicht 1029, wie bei Leclerc I, 543; s. Virchow's Archiv Bd. 86 S. 126, Zeitschrift der Deutsch-Morgenländischen Gesellschaft Bd. 24 S. 336, 337), verfasste eine Einleitung (مدخل) in die Geometrie, indem er das Buch des Euklid erklärte (Oseibia II, 39 في تفسير).

Schamsi, abu'l-Hasan Abd Allah b. Muhammed al-Harawi (wahrscheinliche Combination von Namen), widmete dem abu Abd Allah (al-Mahani?) eine Abhandlung (رسالة), enthaltend den Beweis, dass das Buch der Elemente sich auf die Logik gründe, Leydener Manuscript 994 (III, 53). Die arabische Inhaltsangabe ist nicht ganz klar.

Sidjzi, oder Sidjistani, abu Saîd Ahmed b. Muhammed b. Abd il-Djalil (969/70 in Schiraz, s. Zeitschrift für Mathematik X, 480; Lettere S. 93; Catal. Lugd. Batavorum III, 54—56: Ahmed b. Ibrahim, vgl. S. 96),[16]) erklärte die Beweise (ثبت البراهين); ein Fragment dieser Schrift findet sich in dem Manuscript 734, 14 des India Office (Catal. Loth S. 213).

Sinan b. Thabit hat den Euklid vielleicht erläutert, indem er Zusätze machte. Bei Kifti (bei Casiri I, 438) heisst der Name des griechischen Autors der Elemente der Geometrie اقاطن; Casiri vermuthet Conon! In Oseibia (I, 224, s. Lesarten S. 28) liest man denselben Namen, oder eine willkürliche Verbesserung, welche Plato bedeuten würde. In meinen Lettere (p. 62) schlug ich Euklid vor. Der Name Menelaus, unter dessen Namen die Araber ein Buch der Elemente der Geometrie nennen, ist dem problematischen Namen zu unähnlich, um ihn für letzteren zu substituiren.

Sind b. Ali, s. § 4.

Taki ud-Din, s. Farisi.

Thabit b. Korra, welcher die Uebersetzung Ishak's b. Honein verbesserte, verfasste mehrere Schriften über Euklid; Oseibia (I, 219) erwähnt drei derselben: 1. über die Propositionen (مقدمات), 2. über die Figuren, 3. eine ausgezeichnete Einleitung (vgl. Leydener Manuscript Nr. 1473, III, 42); Chwolsohn (I, 563) nennt nur das 3. Werk. Wahrscheinlich besteht eine Beziehung zwischen diesem Buche und einer Abhandlung im Leydener Manuscript 975 (III, 42) über die Anordnung u. s. w. des Euklid. Kifti (bei Casiri I, 391) nennt noch, nach einer Notiz des Sabiers Mu'hsin, einen Commentar zu Tract. XIV und XV (Hypsicles).

Tusi (oder Thusi), Na'sir ud-Din Muhammed b. Hasan, der berühmte persische Astronom (gest. 24. Juni 1274), redigirte die alten Uebersetzungen der griechischen Mathematiker; man findet sie gewöhnlich, be-

---

16) Vgl. Abdu'l-Djalil السكرى in Catal. Lugd. Bat. III, 157 Z. 1.

sonders die Elemente und die sogenannten mittleren Bücher,[17]) in seiner arabischen Redaction (تحرير); die persischen Uebersetzungen oder Ausgaben (Wenrich S. 68, 185) interessiren uns hier nicht.

Was die mittleren Bücher betrifft, so fände sich nach Wenrich (S. 212) die ganze Sammlung in der Redaction („ex recensione") mit dem Commentar Tusi's in 6 Büchern unter dem Titel تحرير الهندسيات (Ausgabe der geometrischen Bücher). Allein es waltet hier wahrscheinlich ein Irrthum ob. Hagi Khalfa (II, 213 N. 2496) giebt unter diesem Titel 15 Bücher an, wahrscheinlich dieselben, die sich in dem Manuscript 286 der Medic. Bibliothek finden (Zeitschrift für Mathematik X, 461, 467). Kehren wir zu den Elementen zurück.

Tusi verfasste zwei eigentliche Commentare, nämlich 1. التجريد (die Variante تحرير ist vielleicht durch Confusion mit der Redaction entstanden?). 2. البلاغ (Hagi Khalfa VII, 610 und 848 zu II, 205 N. 2457 und zu V, 59 N. 9958); Wenrich (S. 185) nennt sie nicht. Wir kennen kein Manuscript, welches einen dieser Titel führt. Die Beschreibung der Manuscripte der Medicea und der Bodleiana, bei Assemani und Uri, wiederholt von Wenrich, ist nicht genau. Wir wissen nichts über das Compendium der Geometrie مختصر الهندسة und über die Fundamente (قواعد) der Geometrie in Manuscr. 277 und 298 der Medicea („ex Euclide deprompta", bei Wenrich S. 185). Uri 949 übersetzt تحرير mit „explanatio", unter Nr. 1012 giebt er „Commentarius" an. — Im Index auctorum (T. II p. 679, unter Euklid) sind diese beiden Manuscripte als Texte mit dem Commentar des Tusi bezeichnet, aber S. 701 unter Mohammed u. s. w. als „Recensio"; Letzteres scheint das Richtige zu sein. Wenrich (S. 68, 178, 179, 180, 185) hat den Charakter der Schriften Tusi's nicht genau gekennzeichnet. Das Manuscript 272 der Medicea ist dieselbe Handschrift, welche gedient hat zur Ausgabe des I.—XIII. Buches, die 1594 in Rom mit arabischen und lateinischen Titeln, oder vielleicht nur lateinischen (Wenrich, S. 180) erschien. Eine andere Ausgabe wurde, nach Loth (S. 215, s. jedoch Hagi Kh. VII, 611) in Constantinopel (1801?) veröffentlicht. Das I. bis IV. Buch wurde im Jahre 1824 zu Calcutta (von der School book Society) gedruckt. Die Manuscripte Uri 989 und 1012 und ein Auszug in den Pariser Manuscripten 1129 und 1216 (Klamroth S. 273) enthalten die Bücher XIV und XV (Hypsicles).

Das Manuscript 736 des India Office, als Tusi bezeichnet, weicht nach Loth (S. 215) sehr von der Ausgabe ab. Ist es vielleicht eine alte Uebersetzung? De Sacy hat bereits bemerkt, dass das Werk Tusi's keine Uebersetzung ist (s. § 1); ebenso wenig ist es aber ein Text mit einem Com-

---

17) Ueber diese Schriften, meist entsprechend dem „kleinen Astronomen" (Cantor, Vorles. S. 880, der Artikel ist im Register S. 785 nachzutragen), s. Zeitschrift für Mathem. Bd. X.

mentar. Der wesentliche Inhalt des Vorwortes des Tusi ist von Wenrich (S. 180) wiedergegeben, welcher zweifelt, ob Tusi die Uebersetzungen des Ishak oder des Hadjdjadj benutzt hat. Klamroth (S. 274) hebt eine Stelle des Vorworts hervor, welche von Hagi Khalfa (I, 383) angeführt wird und wonach die Uebersetzung Hadjdjadj's 468 Figuren (oder Theoreme), die des Thabit 478 zählt; Tusi zählt aber gerade 468. Klamroth hat diese Stelle nicht in der Ausgabe gefunden, aber sie steht bei Uri N. 949 und nach dem Pariser Manuscript N. 1129 bei Leclerc (Hist. I, 222), der hinzufügt, dass er eine Ausgabe vor Augen habe, welche 491 zähle (ist es die Constantinopler?)[18]). Dieselbe Differenz wird auch hervorgehoben von Amuli (wahrscheinlich gest. im J. 1352) in seinem persischen Buche نفائس الفنون, welches von Hammer angeführt wird.[19]) Am Schlusse des Manuscriptes der Bodleiana (im Jahre 1238 geschrieben, bei Nicoll S. 260) f. 213 findet sich ein Register von 478 Figuren. Klamroth, der dieses Manuscript benutzte, hat das nicht hervorgehoben.

Das Manuscript 280 (bei Nicoll S. 260) scheint eine eigenthümliche Redaction der Uebersetzung Thabit's zu enthalten. Wir bemerkten bereits, das das Vorwort Avicenna und andere spätere Autoren erwähnt. Man hat am Rande Lesarten und Verbesserungen angebracht, nach der Redaction des Tusi, zu Meraga im Jahre 1260/61, woselbst das Manuscript geschrieben ist, nach Nicoll, der nicht hervorhebt, dass Tusi damals in Meraga lebte, vielleicht gar selbst der Verfasser des Prologs ist? Dieses Manuscript, welches تحرير überschrieben ist, verdient genaue Untersuchung.

Wafa (abu'l), s. § 3.

Unter den **anonymen** Erklärungen, denen wir begegnen, nennen wir z. B. die Manuscripte: Leyden 1473, Suppl. ar. in Paris 952,[7.9.34]; Leclerc (I, 223) giebt die Nummer 935 an.

Diese Gelehrten, die Spuren ihres Studiums der Elemente in ihren Werken hinterlassen haben, sind nicht die einzigen in der Geschichte der Literatur der Araber Genannten; man spricht von noch anderen, welche sich durch ihre Belesenheit und Kenntniss dieses Buches ausgezeichnet haben und welche als Lehrer desselben aufgesucht waren.[20]) Das Buch hat eine besondere Wichtigkeit. Es ist nicht nur eines der ersten, wenn nicht das erste (Klamroth S. 303, 304), sicher nach einem griechischen Texte übersetzte Buch,[21]) sondern

18) In einem Citat bei Klamroth, S. 279, findet Thabit die Stelle IX, 30, 31 nicht im Griechischen; Klamroth nimmt an, dass Thabit die Zahl der Sätze in der Uebersetzung Ishak's nicht geändert habe.

19) Ueber Amuli s. Flügel's Katalog der oriental. Handschr. der k. Bibliothek in Wien I, 38; vgl. Hammer's Encyclop. Uebers. S. 329. Vgl. auch Ant. van der Linde, Geschichte des Schachspiels I, 108.

20) Einige, auch sonst instructive Beispiele, meist von Aerzten, aus Oseibia, s. in Anhang II.

21) Ueber Hadjdjadj s. meine Lettere a Don B. Boncompagni p. 85; Deutsches Archiv f. Geschichte d. Medicin, her. von Rohlfs I, 449; Val. Rose, in Hermes VIII, 338.

die arabischen Uebersetzungen sind älter als die griechischen Texte, die wir besitzen. Heiberg (S. 7) hebt zwar diese Thatsache hervor, aber schliesslich (S. 21) behauptet er, dass die Abweichungen der arabischen Texte von einer „ungewissenhaften“ Methode herrühren; allerdings gesteht er in dem Vorworte, dass er viele Dinge in seinem Buche anders behandelt hätte, wenn er den sehr interessanten Artikel Klamroth's, auf welchen er zurückzukommen verspricht, gekannt hätte.

Fügen wir eine andere bis jetzt unbekannte Thatsache hinzu, welche beweist, dass man auch nicht die hebräischen Uebersetzungen, wie Klamroth (S. 271) glaubt, entbehren könne. Derselbe verzweifelt, jemals die Materialien zu finden, um zu entscheiden, ob Thabit die Uebersetzung nach einem griechischen Text verbessert habe (vgl. Klamroth S. 279, 305). Die hebräische Uebersetzung sagt das aber ausdrücklich (III, 9 und 10).

§ 6.

Andere Schriften.

Wir fahren in unserer Aufzählung fort nach der Ordnung der in dem Fihrist genannten Bücher, für welche der Commentar (II, 134) keine anderweitigen Nachweisungen darbietet.

2. Die Phänomena الظاهرات. Wir bemerken im Allgemeinen, dass dieses Buch (worüber s. Heiberg S. 12 und 46), wie fast alle Bücher, die zu den sogen. „mittleren“ gehören, sich wahrscheinlich nur in der Recension des Tusi erhalten hat, von welchem die Aufzählung jener Bücher abhängt, verschieden von der Honein's (Zeitschr. für Mathem. X, 464). Wir nennen die Manuscripte Berlin 559 Qu.[3] (s. Baldi p. 89); Bodleiana (Uri) 875, 895; India Office 743,[3] (p. 216), Med. Laur. 386 (Copie von N. 271; Assemani nennt die Optik anstatt der Phänomena), Leyden 1040 (III, 78). Letzteres ist eine Copie eines von Nadjm u'd-Din abu'l-Futu'h Ahmed b. Muhammed ben السرى (Sari oder Surri?, eines Autors des XII. Jahrhunderts) von dem Autograph copirten Manuscriptes (s. Catal. Lugd. V, 235 zu N. 1005, wo diese Stelle nicht benutzt ist; Nicoll, Index S. 668); dieselbe Copie wurde zuletzt collationirt mit einem Manuscripte, das von abu Bekr al-Azrak, dem Bibliothekar und Schreiber Honein's (Oseibia I, 187, 197) geschrieben worden. Es waren darin Glossen und Verbesserungen von 'Saïd (Richter von Toledo). Nach diesem Manuscript wäre abu'l Hasan Ali b. Ja'hja (b.) Isa b. Ja'hja, ein Schüler Honein's, der Uebersetzer. Der Katalog bezieht die Worte „Schüler u. s. w.“ auf Ali ben Jahja und identificirt ihn mit dem Mäcen abu'l-Hasan Ali ben Jahja (ibn abi Man'sur) ibn al Munedjdjim, gest. 888/9 (Oseibia I, 205; Wüstenfeld § 76; Steinschneider, Alfarabi S. 170; Polemische Literatur S. 76). Für Letzteren verfasste Honein eine Aufzählung der übersetzten und nicht übersetzten Werke Galen's (Oseibia I, 91—101); wahrscheinlich ist auch Ali

b. Ja'hja, welcher Honein zum Islam zu bekehren suchte (Oseibia I, 200), dieselbe Persönlichkeit. Auch abu'l-Hasan Ali b. Jahja, Klient des Emir u'l-Mumenim, welchem Costa b. Luca seine Einleitung zur Geometrie widmete (Oseibia I, 245), dürfte derselbe sein.[22]) Man könnte aber auch die Worte „discipulus“ etc. auf den Grossvater des Uebersetzers Isa b. Jahja beziehen; aber Honein war ein Schüler des Isa b. Jahja b. Ibrahim (Fihrist S. 297, II, 144, ein unvollständiger Artikel, s. Virchow's Archiv, Bd. 52 S. 372), der eine Anzahl der Werke Galen's und Hippokrates' übersetzte. Der Werth der ganzen Notiz ist sehr zweifelhaft, und man darf, ohne die Uebersetzung selbst geprüft zu haben, nicht zwei verschiedene Uebersetzungen vermuthen (wie Loth in seinem Katalog es that). Wenrich (S. 182) vermuthet, dass Ishak der Uebersetzer der Phänomena sei, ohne uns einen Grund dafür anzugeben, wahrscheinlich, weil Ishak in den folgenden Nummern 3 und 4 als Uebersetzer genannt wird. Die Bibliographen kennen den Uebersetzer des Buches nicht.

Der Commentator, welcher Wenrich (S. 189) unbekannt ist, wird in dem Vorworte des Tusi (H. Kh. V, 113 N. 10289; VII, 1241 N. 8874) Tabrizi genannt, richtiger Neirizi (s. § 3).

§ 7.

3. Die Optik اختلاف المناظر[23]) oder المناظر (Hagi Khalfa V, 159 N. 105 32). Dieses Mal haben Assemani und Casiri (I, 413) ganz unabhängig von einander die Optik in ein Buch der Proportionen (مناسبات), welches nicht existirt, verwandelt; dennoch hat Wenrich (S. 183) den Ursprung des Irrthums nicht entdeckt (Zeitschrift für Mathematik X, 408—410; Heiberg S. 20). Die arabischen Bibliographen kennen den Uebersetzer des Buches nicht. Das Manuscript Bodleiana, Uri 875, nennt als Uebersetzer Honein, dessen Uebersetzung von Thabit b. Korra verbessert wurde. Assemani (Med. 271, 286) nennt ebenfalls Honein; Wenrich setzt dafür Ishak b. Honein. Die Manuscripte Berlin 559 Qu. und Leyden 976 (III 43, betitelt اختلاف) sind anonym. Die Manuscripte India Office 743 und wahrscheinlich Leyden 977 (betitelt مناظر Wenrich S. 183) enthalten ohne Zweifel die Redaction des Tusi. Averroes (Colliget III, 38f, 54k ed. 1562) citirt das Buch Almendahat; dieses Wort ist wahrscheinlich aus Manateir entstanden![24])

22) Hiernach wären die drei Artikel Ali b. Jahja im Autorenregister zu Oseibia S. 86 zusammenzuziehen; vergl. unten S. 110.

23) Bedeutet auch Parallaxe; s. Caussin in Mémoires de l'Institut VI, 1822 p. 21, wo die Optiken von Ptolemäus, angebl. Euklid und Alhazen verglichen werden.

24) Nachträglich finde ich dieselbe, sehr leichte Conjectur bei D. Kaufmann, Die Sinne u. s. w. Budapest 1884 (aus dem Jahresbericht der Landesrabbiner-

Eine persische Uebersetzung (aus dem Arabischen?) enthält eine Hs. der Petersburger kaiserl. Bibliothek.[25])

Eine hebräische Uebersetzung (betitelt חילוק המבטים), wovon mir 3 Hss. bekannt sind, scheint nicht die einzige; die Hs. Mantua 3 ist abweichend und bietet Varianten aus einer anderen Uebersetzung. In einigen Hss. findet man den Namen Thabit's. Vergleicht man diese Uebersetzung mit der graeco-latina, Venedig 1557, so bietet sie bemerkenswerthe Verschiedenheiten, besonders einen Prolog, in dem Euklid sagt, dass er seine Elemente als Einleitung zum Almagest verfasst habe! Nach Curtze soll das Buch de Visu ms. identisch sein, welches schon im XIII. Jahrhundert unter dem Namen des Aristoteles angeführt wird. Man findet es auch unter dem Titel: liber de Aspectibus, wahrscheinlich aus dem Arabischen übersetzt, auch nach der Meinung Leclerc's (II, 490).

In einigen hebräischen Manuscripten findet man nach diesem Stück ein anderes, das ס׳המראים Buch der Aspecte (oder der Spiegel?). Der Katalog der Pariser Bibliothek N. 1021. giebt Katoptrik an. Dieses Stück ist verschieden von der griechischen Katoptrik, von der unter dem Namen des Aristoteles citirten Perspective und dem lateinischen Buche De Speculis, aber es scheint mit dem Buche De Speculis identisch, welches dem Euklid beigelegt ist in dem lateinischen Manuscript 9335 der Nationalbibliothek, wo eine jüngere Hand „imo Ptolemei" hinzugefügt hat. Die dieses Buch betreffenden Forschungen V. Rose's (Anecdota II, 291, 295) sind nicht zur Kenntniss Wüstenfeld's (Lat. Uebers. S. 79) gelangt.

Razi bestritt einige Figuren der Optik in einer Abhandlung über den Modus des Sehens (كيفية الابصار), wie wir aus Oseibia (I, 316 Zeile 1) erfahren; der Fihrist (S. 299 letzte Zeile) giebt nur den kurzen Titel; Hammer (IV, 367 N. 16, 17) theilt das eine Buch in zwei.

Ibn Heitham verfasste ein Compendium der Optik, welches er Euklid's und Ptolomäus' Werken entnahm, indem er den Inhalt des I. Buches, welches in Ptolomäus' Buche verloren gegangen war, wieder herstellte. Das sagt der gelehrte „Alhazen" selbst von seinem Werke (Oseibia II, 93; Woepcke, l'Algèbre d'Omar S. 74 N. 5). Bei Kifti (Casiri I, 416) scheint entsprechend تهذيب المجسطى und المناظر ا? Wir finden bei Oseibia (S. 98, Woepcke p. 75 N. 27) einen anderen Titel: „Abhandlung über die Optik nach der Methode des Ptolemäus"; im Artikel Heitham bei Kifti findet man am Ende seiner Liste den Titel اختلاف المناظر, das ist das aus sieben Tractaten bestehende, berühmte Buch, bei Oseibia (II,

Schule) S. 108, wo Almendahar (aus einer anderen Ausgabe?). Ich habe Dr. Neubauer gebeten, die hebräische Uebersetzung des Colliget in der Bodleiana zu vergleichen; er fand wirklich חכמת המראות, arab. אלמנטר *(sic!)* עלם.

25) In Dorn's Katalog der Sammlung Khanykov (oder Chanykov) S. 40.

97, Woepcke l. c. p. 74 [II] N. 3). Ueber den Commentar dazu in der Handschrift zu Leyden 1011 [III, 61] s. Wiedemann in Annalen der Physik, 1876 S. 657. Ausserdem erwähnt Oseibia ein Problem (مسئلة „Problemes“ bei Woepcke 41). Wenrich (p. 189) nennt einen Commentar von Ibn Heitham über die Optik (die Citate in der Note sind nicht geordnet), den man bei Kifti nicht findet.

§ 8.

4. Data المعطيات —, das Buch wurde später auch المفروضات genannt, ein Titel, den Thabit seinem eigenen Buche gegeben hatte (s. Hagi Khalfa V, 154 N. 10528, wo — wie bei Kifti, nach Fihrist, Wenrich S. 194 — ein solches Buch dem Archimedes beigelegt wird). Den ersteren Titel findet man ebenfalls bei Hagi Khalfa V, 154 N. 10511 (II, 213). Die Redaction des Buches Thabit's (von Tusi) findet sich in Manuscript Berlin 559 Qu. und Leyden N. 1029 (III, 72).

Vielleicht existirt das Buch Euklid's in der alten Uebersetzung und in der Redaction von Tusi (nicht mit einem Commentar des Tusi, wie Wenrich nach Assemani angiebt). Es findet sich in den Manuscripten: Berlin, India Office (Tusi?) und der Medicea (auch N. 273), welche oben unter N. 2 und 3 erwähnt sind (§§ 6 und 7). Das Leydener Manuscript 978 (III, 44) enthält nur Auszüge (مدّ عبات), nämlich die Propositionen ohne die Demonstrationen.

Das Bodleianische Ms. nennt Honein als Uebersetzer, das Mediceische Ishak b. Honein; die Uebersetzung wurde von Thabit verbessert. Honein wird in der hebräischen Uebersetzung (ס׳מתנות) des Jacob b. Machir (Prophatius) genannt. Gerard von Cremona hat es lateinisch übersetzt (Liste N. 16; Leclerc II, 413; Wüstenfeld, Lat. Uebersetz. S. 62, s. Zeitschrift für Mathematik X, 468, 485; Heiberg S. 29).

§ 9.

5. Die Harmonik النغم, vulgo „Musica“, ein untergeschobenes Buch. — Ibn Heitham verfasste einen Commentar zu الرمونيقى (*sic*, Oseibia II, 98) in Form von Scholien. Woepcke (L'algèbre etc. p. 76 n. 86) vermuthet, dass es die Harmonik des Euklid sei? Diese Notiz ist Heiberg (S. 99 und 55 flgg.) entgangen.

6. Buch der Section القسمة (*διαιρέσεις*), von Thabit verbessert. Der Fihrist erwähnt den Uebersetzer nicht. Diese Schrift über die Section der ebenen Figuren, welche sich in dem Pariser Manuscript suppl. ar. 952 findet, wurde von Woepcke in dem Journal Asiatique 1851, S. 233 flg. übersetzt. Heiberg, der strenge Kritiker, erkennt nicht allein (S. 14, 36 flg.) die Echtheit dieses Werkes, sondern auch seine Vollständigkeit an. Das

Buch de divisionibus superficierum Machometis Bagdadini (ein nach Dee unbekannter Autor des X. Jahrhunderts, der im Register Wenrich's fehlt, s. S. 183), von Dee (im Jahre 1570 u. s. w.) lateinisch veröffentlicht, deutsch von Ofterdingen, ist nach Heiberg (S. 13) eine unabhängige Schrift, welche dem Buche Euklid's Manches entlehnt.

7. Canon (musikalisch, sectio Canonis). Ibn Heitham verfasste einen Commentar zu dem „Canon" in der Form von Scholien, welcher nach einem Commentar zu der Arithmetik (von Nicomachus?) und nach dem Commentar über die Harmonik genannt wird. Wenrich (S. 189) führt diesen Commentar nach Kifti (bei Casiri I, 416) an; Woepcke (l'Algèbre etc. S. 76 n. 85, Oseibia S. 98) nennt Euklid als Conjectur.

8. Vom Schweren und Leichten الثقل والخفة, unter einem längeren Titel in dem Manuscript India Office 744,[6] (Loth p. 217) f. 98—101; danach hätte Thabit die Uebersetzung, deren Verfasser nicht genannt ist, verbessert. Diese Schrift ist das Original des „De levi et ponderoso" (ed. Basel 1537, 1546, 1558, Oxford 1703, französisch 1565); wenigstens stimmt der Anfang im Arabischen und im Lateinischen. Heiberg läugnet die Echtheit, ohne ein Manuscript zu kennen.

9. Wir reihen daran eine kleine, damit in Verbindung stehende Abhandlung.

Abhandlung über die Waage في الميزان, von Woepcke in dem Journal Asiatique, 1851 t. XVIII S. 252, veröffentlicht und übersetzt nach dem Manuscript suppl. arabe 952. Der Anfang stimmt überein mit dem liber de Ponderibus, welches in einigen Manuscripten Euklid beigelegt wird, und unter dem Namen des Jordanus Nemorarius gedruckt, mit de Canonio (Pariser Manuscript 8680 A) identisch ist. Die arabische Abhandlung wird anderweitig den Beni Musa b. Schakir (drei Brüdern) beigelegt; nach Curtze und Heiberg ist diese Beilegung vorzuziehen, und das Buch des Thabit über die Waage („Karastun" genannt) ist nur eine Erweiterung derselben Abhandlung. Uebrigens hat ibn Heitham ebenfalls über Karastun geschrieben, ein Wort, welches nicht von dem persischen Worte Farastun, sondern vielleicht vom griechischen χαριστίων abzuleiten ist (Hebräische Bibliographie XXI, 39).

10. Hagi Khalfa (II, 311 N. 1063) nennt Euklid als Verfasser einer Traumdeutekunst (تعبير); man findet ein solches Buch von Euklid weder im Fihrist (S. 312), noch bei Wenrich.

Man kann diese Notiz nicht als Beweis für das Vorhandensein eines dem Euklid untergeschobenen Buches gelten lassen; noch weniger darf man sie gegen die alten arabischen Quellen im Allgemeinen geltend machen, wie Heiberg (S. 9) es thut, in Verbindung mit der Thatsache, dass der Fihrist die Harmonik als untergeschoben bezeichnet, was im Gegentheil be-

weist, dass die Araber nicht durchaus falsch berichtet waren und dass man nicht alle Unterschiebungen in Bausch und Bogen auf ihr Conto setzen darf.

Anhang I.

Tideus.

Den Commentar des Eutocius über das Werk des Archimedes von der Sphäre und dem Cylinder beschränkt Fihrist (Artikel Eutocius p. 267, Kifti bei Casiri I, 383) auf das I. Buch. Darauf folgt der Titel einer Schrift von Eutocius: „Ueber die zwei Linien, welche (die Materie) behandelt nach den Reden der geometristischen Philosophen, übersetzt von Thabit“ [b. Korra]. Dieser unklare Titel erhält seinen vollen Sinn durch die Ueberschrift der in der Pariser Hs. suppl. ar. 952,[44] erhaltenen Abhandlung, nämlich „Ueber die zwei Linien zwischen zwei anderen, übersetzt von abu'l-Hasan Thabit“ etc. Diese Abhandlung ist aber nichts Anderes, als ein Fragment des Commentars von Eutocius über die dritte Proposition des zweiten Tractats von Archimedes. In der Zeitschrift für Mathematik (X, 491) habe ich schon die Identität dieses Fragmentes mit dem Manuscript 955 des Escurial erkannt, welches nach Casiri (I, 382) den Commentar des Eutocius über den ganzen zweiten Tractat enthalten soll. Wenrich (S. 197 unter Diokles und „Sumidas“) hat sich bemüht, die Verstümmelungen der Namen, welche Casiri giebt, zu verbessern, ohne einen Blick auf den gedruckten Text des Eutocius zu werfen. Woepcke (l'Algèbre d'Omar S. XII) führt die Namen der elf Geometer, deren Problemlösungen von Eutocius mitgetheilt werden, richtig an, nämlich: Heron, Philon, der Byzantiner, ابرنطی, den wir bei Khazin gefunden haben, bei ibn Awwam in Philémon verstümmelt,[26]) Apollonius, Diokles (دیوقلیس), Pappus, Sporus, Menechmes, Eratosthenes, Plato, Archytas, Nikomedes (سمیدرس, bei Casiri سومیدس).

Unter diesen Namen giebt es einen, der uns dazu dienen wird, eine räthselhafte Person (Leclerc II, 523, vergl. I, 226, II, 413; Wüstenfeld S. 62) zu erkennen.

Tydeus oder Thideus, oder „Tideus fil. Theodori“ a uegoiu (?) medicus, oder selbst Archimenides (= Archimedes, welcher daselbst angeführt wird), ist der Name des Verfassers einer kurzen Abhandlung, betitelt: de Speculis comburentibus; in einem Baseler Manuscript wird hinzugefügt „vel de sectione mukesi“, was man mukefi lesen muss (قطع المكافى), d. h. parabolische Section, z. B. in einer besondern Ab-

---

26) ابرنطی erscheint im Fihrist (II, 206 Index) als Namen eines Arabers. Ueber den Pneumatiker Philon (H. Kh. I, 401) s. V. Rose, Anecdota II.

handlung des Thabit (Pariser Ms. Suppl. arab. 952 n. 25, vergl. 24, unten S. 110). Das Buch des Tideus wird in der Liste der Uebersetzungen des Gerard von Cremona erwähnt. Wir haben in dem Werke des Khazin den Namen برقلي (anstatt ديوقليس) gefunden für den Verfasser eines Buches في المرايا المحرقة über die Brennspiegel. Eutocius führt in seinem Commentar den Diokles an als Verfasser des Buches περι πυρειων, ein Titel, den man nicht zu erklären weiss; Cantor (Vorlesungen, S. 306) übersetzt ihn durch Feuerzeug. Nun, dieses Mal werden die Philologen die Bedeutung eines griechischen Titels von den Arabern lernen. Das Buch des Tideus ist nur die Stelle des Eutocius, welche von Thabit arabisch und von Gerard lateinisch übersetzt worden ist. Vielleicht existirte die Stelle des Diokles in dem Manuscript 426,[16] des British Museum vor Apollonius; denn das Epigraph erwähnt das Buch der Brennspiegel; der Katalog (S. 208) hebt diese sonderbare Erwähnung nicht hervor.

Wir wissen nicht, wer Diokles als Arzt bezeichnet hat; er wird im Fihrist (S. 287 Z. 4) erwähnt (die Seitenzahl ist im Index verdruckt), auch im Continens des Razi, wo die lateinische Uebersetzung (Leclerc I, 262) Theophil nennt.

Wir kennen keine andere Quelle betreffs der Uebersetzung des ganzen zweiten Tractats von Eutocius, mit Ausnahme einer zweifelhaften Notiz in einer hebräischen Handschrift über das Vorhandensein der beiden Abhandlungen, ohne anzugeben, ob sie in arabischer oder hebräischer Sprache geschrieben sind. In dem Katalog der Bücher der Medic. Bibliothek, welche Jean Bapt. Raymond drucken wollte (edirt von Labbé und von Libri, Hist. des mathem. I, 227, vergl. IV, 73), heisst es: „Eutocius Comm. in libros Archimedis de sphaera“ u. s. w.

Anhang II.

Arabische Gelehrte, welche Euklid studirten.

1. Abu Abd u'l-Malik at-Thakafi, الثقفي (Ende des X. Jahrh., Oseibia II, 46; Sakafi bei Hammer VI, 477 N. 6005; Thaquifi bei Leclerc I, 425) studirte Euklid.

2. Abu'l-Fadhl Muwajjid u'd-Din Muhammed ben Abd i'l-Kerim etc. in Syrien wird selbst el-Muhendis (der Geometer) genannt; bei H. Kh. I, 227 (VII, 1069 N. 2604) ist ibn Mohendis wahrscheinlich durch Ueberspringung der anderen Namen zu erklären und die Combination ibn al-Mohendis bei d'Herbelot (s. unten) und Wüstenfeld (Aerzte S. 120 N. 209) unberechtigt. Letzterer lässt ihn „um 620 H. (1223)“ leben, nach Oseibia (II, 190; bei Hammer VII, 467 unter Geometern, Leclerc II, 162) starb er 599 H. (1202). Er war ursprünglich Zimmerer in Damaskus und studirte Euklid, um

sich zu vervollkommnen, unter den hier folgenden Gelehrten. Diesen, bei d'Herbelot (III, 492 der deutschen Ausg., nach H. Kh.) genannten Arzt identificirt Alb. Haller (Biblioth. botan. I, 205, Biblioth. med. p. 417) mit dem Verfasser der Pariser arab. Hs. 1032. Leclerc fragt, ob er der von Olaus Celsius genannte abu'l-Fadhl sei; diese Frage war vielleicht besser angebracht bei dem bekannteren jüdischen Arzte Abu'l-Fadhl Sedid u'd-Din Daud etc. (Leclerc II, 218), über welchen s. Oseibia II, 118 und Hebr. Bibliogr. XIII, 61 flgg.

3. Scheref u'd-Din Tusi, Mutsaffir ben Muhammed b. Mutsaffir, von welchem zwei Schriften in Leyden erhalten sind, die eine vom Jahre 606 H. (1209/10), figurirt höchst wahrscheinlich im Index zu H. Kh. unter den zwei Artikeln N. 6593 und 8279 (s. Hebr. Bibliogr. XVI, 11). Er war eine Art von Wanderlehrer in Mathematik, auch in Euklid's Elementen, und wird meist nur gelegentlich unter seinen Schülern genannt. Er lehrte in Mossul und Tus den Muhaddsib u'd-Din Ahmed ben el-ʿHadjib (Oseibia II, 182, Leclerc II, 46, fehlt bei Hammer), in Haleb den jüdischen Schröpfer [الشريطى, vergl. abu Zeid Ahmed esch-Schureiti, bei Hammer, Encykl. Uebers. S. 252, Shoruti im Index von H. Kh. VII, 1253 N. 9382, und אבו שורטי in der Erzählung in Cod. Fischl 15], dessen voller Namen abu'l-Fadhl Benjamin (s. Hebr. Bibliogr. XVI, 10, offenbar identisch ist der Astrolog abu'l-Fadhl el-Israïli bei Oseibia II, 144 Z. 3 unter ibn al-Dakhwer; die Stelle fehlt bei Hammer VII, 734 und Leclerc II, 179); in Damaskus lehrte er den, oben unter 2 genannten abu'l-Fadhl, unter welchem ibn Oseibia als vorzüglichen Mathematiker bezeichnet. Er verbesserte das Astrolab, und seine Abhandlung darüber wurde von seinem Schüler in Mosul, dem hier folgenden Autor, herausgegeben. Hammer VI, 434 unterschiebt dem ibn Khallikan, dass Tusi zuerst über das Astrolab überhaupt geschrieben habe. (So ist H. B. l. c. zu berichtigen.) Slane (Uebers. des ibn Khallikan III, 472) konnte keine Nachricht über diesen Tusi finden, was wohl unsere Ausführlichkeit rechtfertigt.

4. Kemal u'd-Din abu Imran, oder abu'l-Fatʿh Musa ben abu'l-Fadhl ibn Junis, in Mossul geb. 1156, gest. 1242, war Arzt, Philosoph und ausgezeichneter Mathematiker, Schüler des Tusi (N. 3); er soll Juden und Christen über das alte und neue Testament belehrt haben! (s. Hebr. Bibl. XVI, 21) soll „die Schwierigkeiten des Euklid und Ptolemäus, wie Keiner seit al-Farabi gelöst haben“ (Hammer VII, 463, nach Sobki). Ueber ihn s. Oseibia I, 306—308, II, 404; Wüstenfeld, Aerzte, § 229; Hammer VII, 455, 458, **462**, 466, vergl. VI, 432; Leclerc II, 144.

An diesen Gelehrten knüpfen sich Nachrichten, die meines Wissens noch unverwerthet sind. Leclerc citirt aus Kazwini, dass zur Zeit des Malik el-Kamil „*les Francs demandèrent en Syrie la solution de questions de médecine, de philosophie et de mathématiques*“. Es handelte sich darum, ein Quadrat vom Flächenraum eines Kreissegments herzustellen. Kemal ud-Din allein löste das Problem. Der vollständige Oseibia berichtet über denselben

Gegenstand nach der Erzählung eines Schülers des Musa. Die Fragen über Astronomie und Anderes kommen durch einen Gesandten des أنبرور (Enberur = Empereur), des Beherrschers der Franken (= Christen) zunächst an den Herrscher von Mossul. Der Kaiser ist ohne Zweifel Friedrich II., der philosophische Fragen an den Muselman ibn Sab'in schickte (s. Journ. Asiat. 1879, t. XIV p. 430 flgg., vergl. Hebr. Bibliogr. 1881, S. VII zu S. 35). Der „Philosoph" Friedrich's richtete mathematische Fragen an den 18jährigen Juden Jehuda ben Salomo Kohen in Toledo, und dieser an jenen, in arabischer Sprache. Jehuda übersetzte einen Theil seiner Correspondenz hebräisch, und ich besitze eine Copie dessen, was davon Jehuda seinem grösseren Werk einverleibte, worin auch eine Bearbeitung Euklid's enthalten ist. Der Philosoph verlangte die Construction der fünf Körper auf einer gegebenen Kugel und umgekehrt, Jehuda beginnt seine Antwort mit einer Hinweisung auf Euklid. Am Schluss bemerkt Jehuda, der Kaiser habe sich über seine Antworten sehr gefreut. Zehn Jahre später kam Jehuda nach Italien und sah den kaiserlichen Hof, dessen Gelehrte u. s. w. „Alles hängt vom Glücke ab!" ruft er aus. Jehuda arbeitete sein grosses encyklopädisches Werk 1247 in Toscana aus.

In jenem Philosophen habe ich entweder Joh. Palermitanus, der an Fibonacci Fragen stellt, oder den, anderweitig genannten, aber sonst wenig bekannten Theodorus vermuthet (Hebr. Bibliogr. VII, 63, VIII, 41; Il libro di Sidrach [Estratto dal Buonarroti, Roma 1872] p. 12;[27]) vergl. Carini's Artikel, Sulle scienze occulte ecc. in der Rivista Sicula VII, 1872 p. 152, 468, 472). Im Libro di Sidrach heisst er „Codre, der Philosoph aus Antiochien". Ungefähr um das Jahr 1184 („*fi 'hudud*" drückt nicht eine genaue Zahl aus) war ein christlicher Gelehrter nach Jerusalem gekommen, der „antiochische Philosoph" genannt,[28]) welcher in Antiochien einiges von den „Wissenschaften der Anfänge"[29]) und Anderes studirt hatte. Sein Haus machte er zu einer Art von Kirche und lehrte dort den Christen Jakob ben 'Saklan (oder 'Saklab) Philosophie und Medicin.

Später (p. 143, bei Leclerc II, 145) erzählt Abulfaragius von einem Jakobiten Theodorus, einem Schüler des (unter 4 genannten) Musa, der ihn

27) Zu der Bemerkung über Antiochien (welche Wüstenfeld, Lat. Uebers. S. 24 entging) vergl. auch Catal. Codd. or. Lugd. Bat. III, 210 N. 1275, wonach dort ein alchemistisches Werk verfasst sein soll.

28) Kifti unter Jakub (Ms. Berlin 493 Fol. f. 151) nennt den Namen Theodorus nicht, welchen Leclerc II, 169 (aus Abulfarag?) angiebt (Hist. Dynast. latein. von Pocock, p. 316, wo auf die nachfolgende Stelle [p. 341] verwiesen ist).

29) Ueber die Bedeutung dieses Ausdrucks (weiter unten: *veteris disciplinis*) s. R. Gosche, Die Kitab al-awaïl, in Festgabe zur XXV. Versammlung deutscher Philologen u. s. w., Halle 1867; dazu Saïd im Fihrist S. 171; Akhbar al-Awail bei H. Kh. I, 185 N. 188 ist jedoch wohl nicht *historia primordiorum rerum* zu übersetzen, sondern auf Menschen zu beziehen? Vergl. auch Lathaif u'l-Maarif von Thaalebi, ed. de Jong, Leyden 1867.

in Mosul u. A. in Euklid und Ptolemäus unterrichtete. Theodorus hatte in Antiochien syrisch und lateinisch, auch etwas „e veterum disciplinis“ gelernt, studirte Medicin in Bagdad u. s. w. Der Sultan Ala u'd-Din nahm hn nicht sehr günstig auf, auch des Fürsten Constantin von Armenien Behandlung stellte ihn nicht zufrieden.[30]) Das Zusammentreffen mit einem Gesandten des „Imperator“, Königs der Franken (Leclerc erkennt hier Friedrich II.) veranlasste ihn, sich zu diesem Fürsten zu begeben, der ihn mit Wohlthaten überhäufte und ihm die Stadt „Camahya“ (?) nebst Territorien überwies. Obwohl es ihm hier wohl ging, veranlasste ihn doch der Wunsch, die Seinigen wiederzusehen, ohne oder gegen den Willen seines Beschützers, sich auf den Weg nach Acco (St. Jean d'Acre)[31]) zu begeben; aber ein Zufall trieb das Schiff in einen Hafen, wo er dem Fürsten zu begegnen erwarten musste; Scham, nicht Furcht eines üblen Empfanges, meint Abulpharag, trieb ihn zur Selbstvergiftung.

Die Quelle Abu'lpharag's für die letzten Details ist noch aufzusuchen, vielleicht ist er hier weniger als sonst von al-Kifti abhängig. Ueber die Identität der Persönlichkeit des „Philosophen aus Antiochien“ kann wohl kein Zweifel obwalten; hingegen sind vielleicht die Einzelheiten und Daten nicht überall correct. Die Begegnung mit dem Gesandten böte sich am einfachsten während seines Studiums in Mosul unter Kemal ud-Din, was aber nicht zu den anderen Details bei Abulpharagius passt. Die letzte Katastrophe erklärt sehr gut, warum die occidentalischen Quellen nichts Näheres über ihn wissen. Vielleicht wurde die Nachricht von dem weiter segelnden Schiffe nach dem Osten gebracht — wenn hier überhaupt Facten und nicht Sagen vorliegen.

5. Emir ed-Daule (Din) abu'l Faradj ben Muwaffak e'd-Din Jacob b. Ishak[32]) ibn el-Koff, ein christlicher Arzt und Schüler Oseibia's, bildet den letzten Artikel der Geschichte der Aerzte, ergänzt nach dem Tode des Verfassers, nach welchem ibn el-Koff am 2. August 1233 geboren ist (Leclerc II, 203 hatte den Artikel nicht vor sich). Das Todesdatum (Djumada I, 685 = 1286), in Klammer zugesetzt bei H. Kh. (s. VII, 1206 N. 2441) und bei Wüstenfeld (Aerzte S. 146 N. 241) u. s. w., habe ich (Hebr. Bibliogr. XV, 85 und Ptolemische und apologet. Lit. S. 101) als verdächtig bezeichnet, weil es von dem bekannten Abulfaragius herübergenommen sein könnte, welcher in neuerer Zeit mit ibn el-Koff verwechselt worden, und der im Djumada II. desselben J. gestorben ist. Der Verdacht ist allerdings geringer nach dem Zusatz zu Oseibia, aber nicht ganz beseitigt.

---

30) Von einer Anstellung bei diesem Fürsten (Leclerc) steht nichts im Abulfarag.

31) Leclerc übergeht diesen Ort.

32) Der unvollständige Namen bei d'Herbelot hat Wolf (Bibl. hebr. III, 578 N. 1209) verleitet, in ihm einen Juden zu vermuthen.

Von ibn el-Koff erzählt Oseibia (II, 273), dass er Euklid beim Scheikh Muwajjid ed-Din العرضى gelesen habe. Letzterer ist ohne Zweifel der Astronom aus Damaskus, welcher zu den bekannten Beobachtungen in Meraga (um 1260) zugezogen wurde, und selbst astronomische Tafeln verfasst haben soll; den Namen liest Flügel (H. Kh. III, 561, 562, 567 N. 6956, VII, 1178 N. 6648) al-Ordhi, Sedillot zu Oloug Beg (p. XIC und CLIV N. 99) Oredhi. Greaves hat die Variante Faradi (الفرضى, d. h. einer, der sich mit der Wissenschaft der Erbrechung beschäftigt), welche bei diesem Namen nicht selten ist (s. z. B. H. Kh. VII, 822 zu IV, 408, IV, 272 N. 8392, VII, 804, VII, 1080 N. 3330, III, 217 s. VII, 1246 N. 9091).

Ob in dem Namen Ali ben Saîd الاقليدسى im Fihrist S. 285, welchen Hammer (IV, 319 N. 20) al-Oklidesi liest, etwa eine Beziehung zu Euklid liege, lasse ich dahingestellt; es dürfte ein Ortsnamen sein.

Nachträge.

Während das Manuscript dieses Artikels sich in Händen der Redaction befand, ergaben sich mir noch einige hierher gehörende Thatsachen, die ich hier, während der Correctur, kurz angebe, indem ich die Begründung theilweise einem andern Orte vorbehalte.

S. 91 § 5. Erklärungen von ibn **Afla'h** (Djabir, aus Sevilla, bekannt als „Geber") enthält die hebr. Hs. 747 Qu. (neuer Erwerb) der k. Bibliothek in Berlin.

S. 95, 96. Ueber das Zeitalter des Samarkandi, und ob es zwei Mathematiker dieses Namens gebe, kann hier nicht mehr gesprochen werden. Einen Commentar zu seiner Schrift enthält auch die Bibliothek Mulla Firuz (Katalog von Rehatsek S. 3).

S. 96. Ibn abi 'l-**Schukr**, Mu'hji u'd-Din Ja'hja b. Muhammed (X. Jahrh.), redigirte die Elemente; s. meine Note zu Baldi p. 90 und Sammlung Landberg in Leyden N. 459 (Katalog p. 134). Ueber ihn vergl. Usener, Ad historiam astronomiae Symbola, p. 16. Mehr anderswo.

S. 97. Assemani zu Med. 277 (p. 386) lässt sogar Tusi, nach einer Angabe des Abschreibers, sein „Compendium" im J. 698 H. (1298!) vollenden.

S. 98. Ein anonymes Compendium, mit hebr. Lettern geschrieben, in Paris N. 1099, ist noch nicht näher untersucht.

S. 99 § 6. Nadjm u'd-Din etc. ist der nach 1145 gestorbene Arzt, genannt ibn 'Sala'h, s. Oseibia II, 164 flgg., wo im Lobgedicht S. 166 Z. 5 eine Anspielung auf Euklid. Mehr über ihn als Mathematiker anderswo.

S. 100 A. 22. Auch in den Autorenregistern zum Fihrist und zu Hagi Khalfa ist Ali übel weggekommen, was hier zu weit führen würde.

S. 104, 105. Ibn Heitham verfasste eine Abhandlung über den Rauminhalt (Mesa'ha) des parabolischen Körpers (al-Mudjassam al-mukafi), worin er erwähnt, dass Thabit b. Korra und abu Sahl al-Kauhi (s. oben S. 94) darüber geschrieben haben, die Schrift des Ersteren weitläufig und schwierig (schwer verständlich) sei, die des Letzteren nur die leichteren zwei Arten behdndle; s. Loth's Catal. India Off. p. 213 N. 734, XI. Ich habe dieses Ms. kurze Zeit für meine Abhandlung über das astronom. Werk des ibn Heitham (in Boncompagni's Bullettino, 1884) benutzt.

S. 107. In der Ars venandi, Ms. Digby 152 in der Bodleiana liest Macray (Katal. 1883 p. 152) „*Theodoti philosophi imperatoris*“ für Theodori.

Recensionen.

Leitfaden der ebenen Geometrie mit über 700 Uebungssätzen und -Aufgaben. Bearbeitet von Dr. Julius Kober, Director der Realschule in Grossenhain. Mit in den Text gedruckten Figuren. 2. Auflage. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1884.

Das Büchlein ist 86 Seiten stark und enthält auf diesem engen Raume ein reiches Material. Insbesondere ist der Aufgabensammlung vom Verfasser Aufmerksamkeit geschenkt. Das Buch zeichnet sich gerade in dieser Richtung vor vielen ein ähnliches Ziel verfolgenden Lehrbüchern durch Reichhaltigkeit und zweckmässige Anleitungen aus.

Der Inhalt ist der gewöhnliche, durch die Anforderungen des Lehrplanes im Allgemeinen feststehende Lehrstoff. Bezüglich der Anordnung weicht der Verfasser vom Herkommen dadurch ab, dass er die Lehre vom Kreise hinter die Lehre von der Ausmessung der Figuren und die Aehnlichkeitslehre zurückschiebt. Vielleicht namens der „Logik". Doch scheint Herr K., laut Vorrede, beim Gebrauch des Buches auch auf eine anders geordnete Durchnahme des Buches hinreichende Rücksicht genommen zu haben.

Im Einzelnen seien mir die nachstehenden Bemerkungen gestattet.

In der Parallelentheorie spielt die „Richtung" und der „Richtungsunterschied" eine nach meiner Meinung nicht berechtigte Rolle. Ich habe meine abweichende Ansicht in dieser Zeitschrift an früherer Stelle bereits zu begründen versucht. S. 16 ist vom Anlegen des Winkels an eine Gerade die Rede, obschon die betreffende Construction erst S. 31 gelehrt wird. Ebenda wird als zweiter Congruenzsatz die Bestimmtheit des Dreiecks durch zwei Seiten und einen Winkel aufgestellt. Dieser Satz hat nach Herrn K. zwei Fälle: Das Dreieck kann bestimmt sein durch b, c, α oder durch a, b, α (!). Diese Auffassung kann Referent durchaus nicht theilen und hält die Tendenz, zwei grundverschiedene Dinge durch äussere Uebereinstimmung in Eins zusammenschweissen zu wollen, für eine namens der „Logik" an der Geometrie verübte Gewaltthat. S. 24 ist die Definition des Parallelogramms anscheinend nicht ganz glücklich; S. 29 ist die Erklärung der Mittellinie des Paralleltrapezes etwas auffallend und vom Herkommen abweichend, aber durch die Analogie am Dreieck vollkommen

geschützt. Die Aehnlichkeit wird auf nur zwei Seiten, 45 und 46, erledigt. Das erscheint, selbst unter Erwägung der früheren Vorbereitungssätze, doch wohl etwas kurz und dürftig. S. 54 ist die durch den Berührungspunkt begrenzte Tangente einfach als Tangente bezeichnet. Sollte da nicht namens der „Logik" eine Erklärung auf S. 50 wünschenswerth sein? Auch hat Referent der Fassung des Satzes von der Potenz am Kreise S. 57 keinen rechten Geschmack abgewinnen können. Es scheint mir anschaulicher, die Figur durch den Ausspruch entstehen zu lassen, etwa: „Zieht man durch einen Punkt Gerade, welche einen Kreis schneiden u. s. w." Wünschenswerth erscheint mir ferner dringend, dass der Wortlaut der Sätze 10 und 11 S. 81 geändert werde. Auch weiss ich nicht, ob man beim Vortrag des Apollonischen Tactionsproblems sagen soll: „Der Punkt P wird von dem Kreise berührt." Freilich, Kreise und Gerade werden „berührt", warum nicht auch Punkte? Die Majorität mindestens ist gesichert. S. 76 mangelt die Discussion der negativen Wurzel der Gleichung $x^2 \pm ax = bc$.

Wollte Referent dem Leser die Möglichkeit verschaffen, sich über die reichhaltige, wohlgeordnete und zweckmässig vertheilte Aufgabensammlung ein eigenes Urtheil zu bilden, so bliebe kaum etwas Anderes übrig, als Abschrift einzelner Partien. Ich hebe hier nur Weniges hervor. Sehr ansprechend sind die Winkelberechnungen S. 11 und 13. Kurz und klar behandelt Herr K. S. 31 die „Fundamentalaufgaben". Die Fruchtbarkeit des Pythagoräischen Satzes erscheint sehr angemessen durch die Ableitung der Heronischen Formel S. 42 sofort nachgewiesen. Inhaltsreich sind die Aufgaben S. 59 — 63. Die Behandlung der geometrischen Aufgaben durch algebraische Methoden S. 75 flgg. ist klar und lehrreich. Gleiches Lob kann dem in den „Anhängen" über Pol, Polare, harmonische Theilung, Maxima Enthaltenen zuerkannt werden. Das Buch schliesst mit dem Apollonischen Tactionsproblem.

Das Buch kann bestens empfohlen werden.

Coesfeld, im Juli 1885. K. Schwering.

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit Uebungsstücken für höhere Lehranstalten. Von Dr. Th. Spieker, Professor am Realgymnasium zu Potsdam. Potsdam 1885, Verlag von Aug. Stein. 8⁰. 134 S.

Das vorliegende Buch zerfällt in zwei Curse, von denen der erste die ebene, der zweite die sphärische Trigonometrie behandelt. Der erste Cursus enthält sechs Abschnitte, welche der Reihe nach die Winkelfunctionen, die Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks, die geometrischen Grundformeln, die trigonometrische Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks aus einfachen Stücken, die trigonometrische Analysis und endlich die Berechnung der Vier-

ecke und Polygone behandeln. Jeden Abschnitt begleiten zahlreiche und gut gewählte Uebungsaufgaben.

Das Buch ist in leserlichem Deutsch geschrieben und bietet die Fülle seines Stoffes in anmuthiger Ausführlichkeit dar, ohne irgend durch Breite zu ermüden. Das sind zwar nur formelle, aber darum keineswegs unwichtige Vorzüge. Es will dem Referenten sogar scheinen, als lege man denselben in Deutschland noch immer nicht die Wichtigkeit bei, welche sie in Wahrheit verdienen. Französische Elementar-Lehrbücher, welche mir kürzlich vorgelegen haben, zeigen, dass man jenseits der Vogesen weniger anspruchslos ist als bei uns.

Die Einleitung liefert eine kurze, aber vollkommen zweckmässige Geschichte der Trigonometrie.

Der Verfasser richtet sich in der Ableitung der Functionen stumpfer u. s. w. Winkel nach dem Herkommen. Das bedauert Referent aufrichtig. Es ist wirklich nicht abzusehen, warum man den Gedanken, der bei der Herleitung der arithmetischen Sätze unabweisbar geworden ist, nicht auch in der Trigonometrie verwenden will. Durch dies zunächst rein formelle Verfahren wird das Axenkreuz und die Projectionslehre nicht überflüssig. Kein vernünftiger Lehrer wird auf die Anschauung verzichten, wenn er auch froh sein wird, den Ballast zu entbehren, den die Additionstheoreme sonst, s. S. 32 flgg., zu schleppen haben. S. 15 und wieder S. 35 erscheinen Doppelvorzeichen, z. B. $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, während doch Aufschluss gegeben werden kann, wann jedes derselben zu ertheilen ist. Dieser Hinweis, wenn auch nur an einer Stelle und so kurz wie möglich, darf nicht fehlen. S. 13 ist sehr schön die Aufgabe: Gegeben a, α, h_a, behandelt. Die erste Lösung schliesst sich an die geometrische Construction an, während die zweite rein analytisch vom Cosinussatz und $ah = bc\sin\alpha$ ausgeht. In der ersten konnte der Herr Verfasser sogar noch einen Schritt weiter gehen, da man leicht den Hilfswinkel φ in der Figur nachweisen und so ohne irgendwelche Rechnung zur Lösung $\cos(\gamma-\beta).\sin\varphi = \sin(\alpha-\varphi)$ gelangen kann. Man hat zu diesem Zwecke durch B und C den Kreis zu legen, welcher den Winkel φ fasst, durch B den Diameter BE und die Sehne BAF zu ziehen. Dann ist

$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{AF}{AC} = \frac{AF}{AE} = \cos(\gamma-\beta).$$

Trefflich sind auch die vier den Congruenzsätzen entsprechenden Aufgaben behandelt. Die Reihenfolge richtet sich glücklicherweise nicht nach der „Logik“, sondern nach trigonometrischen Thatsachen. Bei der vierten Grundaufgabe a, b, β kann man auch den Cosinussatz $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \times \cos\beta$ zur Lösung verwerthen und das Resultat geometrisch aufsuchen und discutiren.

Der zweite Cursus behandelt in drei Abschnitten das sphärische Dreieck (geometrisch), die trigonometrischen Grundrelationen (Gauss,

Napier) und die um- und eingeschriebenen Kreise, nebst dem Inhalt des Dreiecks.

Das Buch ist sehr zu empfehlen.

Coesfeld, im Juli 1885. K. Schwering.

L. Sonnenburg, **Analytische Untersuchungen über ein Problem der Dynamik.** (Inaugural-Dissertation.) Bonn, 1884.

Auf einer Geraden soll sich unter der Einwirkung einer Centralkraft eine Strecke bewegen, welche an einzelnen Punkten mit Masse behaftet ist. Der Punkt, in welchem die Kraft wirkend gedacht wird, gehört als einziger, fester Punkt der Geraden an. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Kraft nach einer Function der Entfernung auf jeden der Massenpunkte wirkt; durch specielle Annahmen dieser Function werden die Bahnen der Bewegungen abgeleitet, deren das System der Massenpunkte fähig ist.

B. Nebel.

F. Uppenborn, **Das internationale elektrische Maasssystem.** 2. Auflage. München, Verlag von R. Oldenbourg. 1884.

Dass die Ableitung und Zusammenstellung der elektrischen Maasse für den Techniker ein Bedürfniss war, lässt die innerhalb kurzer Zeit nothwendig gewordene 2. Auflage erkennen. Verfasser erläutert die vom Pariser Congress aufgestellten Beschlüsse und leitet nach Herstellung der absoluten mechanischen Einheiten noch das elektrostatische und das elektromagnetische Maasssystem ab. Den Schluss bilden die in der Praxis üblichen Einheiten und deren Zusammenhang unter einander. Leider haben sich wieder einige störende Druckfehler eingeschlichen. B. Nebel.

W. Valentiner, **Die Kometen und Meteore.** 27. Band von „Das Wissen der Gegenwart". Leipzig und Prag, 1884.

In der Einleitung macht uns der Verfasser mit den Bahnen und Bahnelementen der Kometen bekannt und geht sodann zur eingehenden Besprechung der hervorragendsten Kometen über. Daran schliessen sich die Meteore mit ihren verschiedenen Abstufungen an. Den Schluss bildet der durch einzelne Beispiele geführte Beweis von dem Zusammenhang der Kometen und Sternschnuppen. Als Anhang ist sowohl eine Tabelle der Sternschnuppenradiationen, als auch eine solche der Kometenbahnen beigefügt.

Wer sich für die von unserem Auge nur kurze Zeit wahrnehmbaren Gestirne interessirt, findet in diesem Bändchen vollständigen Aufschluss.

B. Nebel.

Day-Schlenk, **Arithmetik der elektrischen Beleuchtung.** Wien, C. Gräser. 1884.

Vorliegende Sammlung von 150 Aufgaben ist dem Englischen entnommen. Die Aufgaben, welche sämmtlich nur mit Arithmetik zu lösen sind, behandeln den Leitungswiderstand in Drähten und Lampen; die Stromstärke, Wärmewirkung, Nutzarbeit und Energievertheilung im combinirten Stromkreis. Daran reihen sich Tabellen über Quadrate, Quadratwurzeln etc., ferner über die Birmingham-Draht-Lehre und schliesslich über die specifischen Widerstände von Metallen und Legirungen. Ein kurzer Anhang enthält das absolute Maasssystem. — Da die Aufgaben keinerlei Schwierigkeiten bieten und zugleich die elektrischen Gesetze wieder ins Gedächtniss zurückrufen, so kann dieses Buch als eine sehr nützliche Beschäftigung in Musestunden empfohlen werden.

B. Nebel.

Dr. W. Abendroth, **Leitfaden der Physik.** II. Band. Cursus der Unter- und Oberprima. Leipzig, 1884. Verlag von Hirzel.

Der zweite Band trägt durchaus den wissenschaftlichen Charakter, der schon rühmend bei der Recension des ersten Bandes hervorgehoben wurde. — Mechanik und Optik nehmen je ein Drittel, Wellenlehre, Akustik und mathematische Geographie zusammen ein Drittel des ganzen Buches ein. Da überall das neue Maasssystem durchgeführt ist, sollte auch S. 140 das ℔ durch kg ersetzt werden.

S. 232 Zeile 14 v. o. „in jeder anderen Richtung schneller und senkrecht zur Axe am schnellsten fortgehen etc.“ dürfte nicht richtig sein, wenn man einen positiven Krystall betrachet.

B. Nebel.

Die Fixsterne, von Dr. Peters. Leipzig und Prag, 1883. 163 S.

Das Buch gehört zu dem Sammelwerke: „Das Wissen der Gegenwart“, ist also für jeden Gebildeten verständlich geschrieben. Es beginnt mit dem äusseren Ansehen der Fixsterne, ihrem funkelnden Lichte, ihrer Farbe und ihrer Anordnung in Sternbilder, und geht dann zur Helligkeit der Sterne und zu ihrer Vertheilung, insbesondere in der Milchstrasse, über. Dann folgen die Entfernung und Eigenbewegung, die Doppelsterne und ihre Bahnen, die veränderlichen Sterne und eine Beschreibung der Sternhaufen und Nebelflecke. Den Schluss bildet eine Betrachtung der physischen Beschaffenheit der Fixsterne, soweit die Spectralanalyse Anhaltspunkte giebt, und ihrer Wärmestrahlung, wie sie die Thermosäule giebt. Daran schliesst sich eine kurze Auseinandersetzung über die Entstehung des Weltsystems nebst Bedenken gegen die Theorie von Kant. So ist Alles, was wir über die Fixsterne wissen, kurz und präcis nach dem neuesten Stande unserer Kenntnisse zusammengestellt.

P. Zech.

Der Irrthum der Schwerkraftshypothese, von Dr. Rethwisch. Freiburg i. B., 1884. 119 S.

„Im Ganzen brauchte Newton zu seinen Berechnungen nur ein Princip der Annäherung, das den Eindruck einer Fallbewegung macht und im Quadrat der Entfernung abnimmt; und eine Tangentialkraft, die immer von Neuem ablenkt und den einen Weltkörper am andern gleichsam sicher vorüberführt," schreibt der Verfasser am Ende seiner Polemik gegen die Hypothese der allgemeinen Anziehung, setzt also an die Stelle der Anziehung „ein Princip der Annäherung". Der zweite Satz von der Tangentialkraft zeigt, dass der Verfasser mit der heutigen Mechanik auch auf dem Kriegsfusse steht, da diese die Tangentialkraft nur als eine Componente der Anziehung betrachtet. Wie wenig vertraut der Verfasser mit den Sätzen über das Pendel ist, zeigen die Seiten 16 und 22 des Buches und der Versuch, die elliptische Bewegung durch eine Kegelkugel zu erklären (S. 45). Wer die heutige Mechanik umstossen will, muss anders zu Werke gehen. Die neue Theorie ist in dem Capitel: „Die Individualisirung des Urkörpers" enthalten: Ein Körper dreht sich unbegrenzt schnell, jedes Theilchen beschreibt eine zum Mittelpunkt strebende Spirale und ertheilt den vorliegenden einen Stoss, am stärksten am Aequator, wo Stücke losgelöst werden, in gerader Linie, „weil die Kraft des Stosses momentan stärker war, als die Axenkraft". „Die durchjagten Räume verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten." „Die Stosskraft ist unbegrenzt gross und wirkt bei dem Rückweg ausweitend auf die Bahn des Weltkörpers." „Die Masse jagt durch den Raum und schnellt wieder zurück." „In den flüssigen Massen, die durch einen Ruck in ungeheure Bewegung gesetzt wurden, zitterte der Ruck noch lange nach, daher Fluth und Ebbe und Erdbeben" u. s. w. Wer in diesem Capitel igendwelchen Verstand findet, kann vielleicht auch die Reformthesen und siderischen Grundgesetze am Schlusse verstehen, beispielsweise wie sich die Rotationsbewegung zu Axenkraft und Stosskraft differentiirt. Bodenloses Geschwätz, wie zur Zeit der blühenden Naturphilosophie, hat in der heutigen Naturforschung keine Geltung mehr.

P. Zech.

Vorlesungen über theoretische Optik, von Dr. F. Neumann. Herausgegeben von Dorn. Leipzig, 1885. 310 S.

Das vierte Heft der Gesammtausgabe der Vorlesungen über mathematische Physik von Dr. F. Neumann, welche seine Schüler besorgen. Neumann hat an der Entwickelung, welche die theoretische Optik genommen hat, grossen Antheil; er ist der Vertreter der Ansicht, dass das durch Zurückwerfung polarisirte Licht in der Einfallsebene schwinge, im Gegensatz zu Fresnel, der es senkrecht zur Einfallsebene schwingen lässt. Er behauptet die gleiche Dichte des Aethers und die Verschiedenheit der Elas-

ticität in verschiedenen Mitteln, Fresnel umgekehrt die Verschiedenheit der Dichte und Gleichheit der Elasticität. Die Anwendung auf Krystalle spricht unbedingt für Neumann.

Die vorliegenden Vorlesungen behandeln die Interferenz und Beugung, die Polarisation des Lichts und die Doppelbrechung in Krystallen. Zum Schlusse folgen einige Nachträge vom Herausgeber. Ueber den hohen Werth des ganzen Werkes haben wir uns schon früher ausgesprochen. Je rascher es zum Ziele gelangt, desto besser für das Studium der mathematischen Physik.

P. Zech.

Bibliographie

vom 1. Februar bis 31. Mai 1886.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayr. Akademie der Wissenschaften. 1885, 4. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathem.-physikal. Classe. 1885, III. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Sitzungsanzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathemat.-naturwissenschaftl. Classe, Jahrg. 1886, Nr. 1—4. Wien, Gerold. compl. 3 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Abth. II d. mathem.-naturwissenschaftl. Cl. 92. Bd., 3. Heft. Ebendas. 8 Mk.

Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften, mathem.-naturwissenschaftl. Cl. Jahrg. 1885. Leipzig, Freytag. 12 Mk.

Mémoires de l'Academie imp. des sciences de St. Petersbourg. 7. série tome 33 No. 5—8, tome 34 No. 1. Petersburg und Leipzig, Voss. 31 Mk. 30 Pf.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, herausgegeben von C. Vogel. Nr. 20. Leipzig, Engelmann. 12 Mk.

Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1888, herausgeg. von der Berliner Sternwarte unter Leitung von F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Gezeitentafeln für das Jahr 1887. Hydrographisches Amt der kaiserl. Admiralität in Berlin. 1 Mk. 50 Pf.

Annalen des kaiserl. russ. Centralobservatoriums, herausgeg. von H. Wild. Jahrg. 1884, Thl. II. (Meteorol. Beob. an Stationen 2. u. 3. Ordnung.) Leipzig, Voss. 15 Mk. 40 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von Henoch u. Lampe. 15. Bd., Jahrg. 1883, 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Fortschritte der Physik. 1885, Nr. 9. Leipzig, Mayer. 1 Mk. 80 Pf.

Meteorologische Zeitschrift, redigirt v. J. Hann u. W. Köppen. 3. Jahrg. 1886. (12 Hefte.) 1. Heft. Berlin, Ascher & Comp. compl. 16 Mk.

Journal de l'école polytechnique. 55. cahier. Paris, Gauthier-Villars. 14 Frs.

Reine Mathematik.

Möbius, A. F., Gesammelte Werke. 3. Bd., herausgegeben von F. Klein. Leipzig, Hirzel. 14 Mk.

Weierstrass, K., Abhandlungen aus der Functionenlehre. Berlin, Springer. 12 Mk.

Legendre, A., Zahlentheorie, übersetzt von H. Maser. 1. Bd. Leipzig, Teubner. 11 Mk. 60 Pf.

Gegenbauer, L., Einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

——, Ueber die mittlere Anzahl der Classen quadratischer Formen von negativer Determinante. Ebendas. 25 Pf.

——, Arithmetische Sätze. Ebendas. 50 Pf.

Killing, W., Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen. Braunsberg, Huye. 1 Mk. 60 Pf.

Escherich, G. v., Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Biermann, O., Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen. Ebendas. 30 Pf.

Lie, S., Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen. Christiania, Dybwad. 35 Pf.

Gegenbauer, L., Ueber das Additionstheorem der Functionen $Y^m(x)$. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Neumann, C., Ueber die Kugelfunctionen P_n, Q_n, insbesondere über die Entwickelung von

$$P_n\left(zz_1+\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\varphi\right) \text{ und } Q_n\left(zz_1+\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\varphi\right)$$

nach den Cosinus der Vielfachen von φ. Leipzig, Hirzel. 2 Mk. 40 Pf.

Weltzien, C., Zur Theorie der homogenen linearen Substitutionen. Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Hahn, J., Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Jacobi'sche oder Hermite'sche Form verschwindet. Leipzig, Fock. 80 Pf.

Bobek, K., Ueber das Maximalgeschlecht von algebraischen Raumcurven gegebener Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Zeuthen, G., Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum. Deutsch von R. v. Fischer-Benzon. 1. Halbbd. Kopenhagen, Höst & S. compl. 15 Mk.

Burckhardt, W., Lehrbuch der Stereometrie. Leipzig, Kressner & Schramm. 7 Mk. 50 Pf.

MÜLLER, R., Lehr- und Uebungsbuch der Elementargeometrie. 1. Thl. f. Quinta. Oldenburg, Stalling. 40 Pf.

KÜHL, H., Grundriss der Geometrie. I. Planimetrie. Hamburg, Meissner. 1 Mk. 20 Pf.

HERMES, O., Das Sechsflach. Ein Beitrag zur analytischen Geometrie des Raumes. Berlin, Gärtner. 1 Mk.

GUSSEROW, C., Ueber anschauliche Quadratur und Cubatur. Berlin, Gärtner-Heyfelder. 60 Pf.

SEIPP, H., Beiträge zur Kenntniss der Eigenschaften des ebenen Dreiecks. Halle, Schmidt. 4 Mk.

RASCHKE, W., Mathematische Tabellen. Hildburghausen, Gadow. 1 Mk.

JOURJON, C., La divisibilité des fonctions entières, démontrée sans les imaginaires. Paris, Gauthier-Villars. 2 Frs.

Angewandte Mathematik.

KRIES, J., Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Freiburg i. B., Mohr. 6 Mk.

VELTMANN und O. KOLL, Formeln der niederen und höheren Mathematik, sowie der Theorie und Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bonn, Strauss. 3 Mk.

GÜNTHER, S., Grundlinien der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie. 2. Aufl. München, Ackermann. 2 Mk.

BETTI, E., Lehrbuch der Potentialtheorie und ihrer Anwendung auf Elektrostatik und Magnetismus. Deutsch von F. MEYER. Stuttgart, Kohlhammer. 12 Mk.

HAUBNER, J., Ueber die Linien gleicher Stromdichte auf flächenförmigen Leitern. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

THUREIN, H., Elementare Darstellung der Planetenbahnen durch Construction und Rechnung. Berlin, Gärtner-Heyfelder. 1 Mk.

WITTRAM, TH., Zur Berechnung der speciellen Störungen der kleinen Planeten. Dorpat, Karow. 1 Mk.

BIDSCHOF, E., Bestimmung der Bahn des Planeten Honoria (236). (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

SCHRAM, R., Beitrag zur Hansen'schen Theorie der Sonnenfinsternisse. Ebendas. 35 Pf.

WEISS, E., Ueber die Bestimmung von M bei Olbers' Methode zur Berechnung der Kometenbahnen. Ebendas. 45 Pf.

WISLICENUS, W., Beitrag zur Bestimmung der Rotationszeit des Planeten Mars. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

KAM, M., Katalog von Sternen etc. Aus Bd. 1—66 der Astron. Nachr., reducirt auf 1855. Amsterdam, Joh. Müller. 15 Mk.

BUSZCZYNSKI, B., Ueber die Bahnen der am 11. Dec. 1852 und am 13. Dec. 1861 in Deutschland beobachteten hellen Meteore. Halle, Schmidt. 60 Pf.

Physik und Meteorologie.

WEINSTEIN, H., Handbuch der physikalischen Maassbestimmungen. 1. Bd. Berlin, Springer. 14 Mk.

HULLMANN, K., Die Gay-Lussac'sche Formel. Oldenburg, Hintzen. 1 Mk.

NALD, O., Licht und Schwere; Zurückführung der Licht- und Wärmeerscheinungen auf die Schwere. Berlin, Seydel. 1 Mk. 50 Pf.

GROSS, TH., Ueber eine neue Entstehungsweise galvanischer Ströme durch Magnetismus. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

SCHILLING, A., Ueber die Herstellung eines homogenen magnetischen Feldes an der Tangentenbussole zur Messung intensiverer Ströme. Ebendas. 45 Pf.

ADLER, G., Ueber die Energie magnetisch polarisirter Körper. Ebendas. 40 Pf.

SCHREYER, O., Erdmagnetische Beobachtungen im Königreich Sachsen. Freiberg, Engelhardt. 1 Mk. 60 Pf.

Bericht über die von der wissenschaftl. Commission an Dynamomaschinen u. elektrischen Lampen ausgeführten Messungen. Wien, Hölder. 9 Mk.

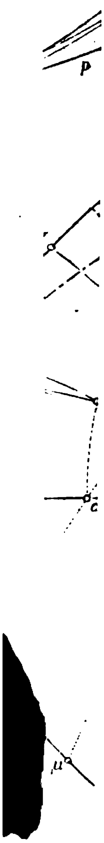
SUCHSLAND, E., Die gemeinschaftliche Ursache der elektrischen Meteore und des Hagels. Halle, Schmidt. 1 Mk. 20 Pf.

ZENGER, W., Die Meteorologie der Sonne und ihres Systems. Wien, Hartleben. 5 Mk.

FAVARGER, A., L'électricité et ses applications à la chronométrie. Genf, Stapelmohr. 5 Mk.

Fig.

A



INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Historisch-literarische Abtheilung.

Zur talmudischen Mathematik.

Von
Dr. Eduard Mahler
in Wien.

Seitdem ich — angeregt durch die von Cantor über das Oppert-sche Werk: „L'étalon des mésures assyriennes" veröffentlichte Recension (Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. XIX, hist-lit. Abth.) — die Mathematik der alten Hebräer studire und inbesondere die mathematischen Stellen der Mischnah und der Gamarah zu sichten bestrebt bin, um etwaige mathematische Erörterungen, die dort vorkommen und für den mathematischen Historiker von Interesse sein können, der Oeffentlichkeit zu übergeben*, war meine Aufmerksamkeit dahin gerichtet, die Methoden kennen zu lernen, nach denen die alten Hebräer die Quadratwurzeln berechneten. Ich will nun die Resultate meiner bisher auf diesem Gebiete gemachten Forschungen hier mittheilen.

Im Tractat Erubin 23ª, so auch Erubin-Mischnah Abschnitt II Mischnah 5 ist ein Streit zwischen Rabbi Jehudah ben Baba** und Rabbi Akiba einerseits, und zwischen Rabbi Elieser und Rabbi Josi andrerseits, der im genannten Tractate von Raschi***, in der Mischnah von Rabbi Obadjah von Bartenurah† näher erörtert wird. Dabei

* Diese Aufgabe ist wesentlich verschieden von der, die sich Zuckermann stellte und löste. Zuckermann bezweckte keineswegs eine Auslieferung der talmudischen Mathematik an den Historiker, um Letzterem ein Denkmal zu zeigen, das für seine Studien von irgend welcher Bedeutung sein könnte; Zuckermann wollte vielmehr die mathematischen Stellen des Talmuds, die vielen Talmudgelehrten Schwierigkeiten bereiten, mit Hilfe der modernen Anschauungen der Wissenschaft erläutern, um so den Talmudlesern ein Mittel in die Hand zu geben, mit dem sie nun auch die für sie sonst schwierigen mathematischen Stellen sollen lesen können. Meine Aufgabe ist eine rein historische.

** Lebte in der zweiten Hälfte des 1. Jahrh. nach Chr. Geb.

*** Raschi lebte 4890—4965 jüd. Zeitr., d i. 1130—1205 n. gew. Zeitr.

† Starb 1509 n. Chr. Geb

suchen sie zu ergründen, warum ein Quadrat, das an Flächeninhalt gleich sei einem Rechtecke mit 100 Ellen Länge und 50 E. Breite, eine Seitenlänge von 70 E. und einigen Bruchtheilen haben muss.

Raschi sagt:

„Hat man von der Länge, die 100 E. beträgt, einen Streifen von der Länge = 50 E. abgeschnitten (wodurch noch ein Quadrat mit 50 E. Seitenlänge bleibt), so mache man aus diesem fünf Streifen, von denen jeder 10 E. breit und 50 E. lang ist. Nun gebe man an jede Seite des Quadrates (mit 50 E. Seitenlänge) je einen solchen Streifen, so hat die erhaltene Fläche eine Breite von 70 E. und eine Länge von 70 E., nur bleiben noch in jeder Ecke quadratförmige Winkelflächen (von der Seitenlänge = 10 E.) auszufüllen. Nun nehme man den fünften Streifen, der 50 E. lang und 10 E. breit ist, und theile ihn der Breite nach in fünf Theile, so hat jeder dieser Theile eine Länge von 10 E. und eine Breite von 10 E. Je einen dieser Theile gebe man in die erwähnten vier Winkelflächen, so sind dieselben vollkommen ausgefüllt, und man hat sonach eine vollständige Quadratfläche mit der Seitenlänge = 70 E. Nun nehme man den fünften Querstreifen, der 10 E. = 60 Spannen lang und 10 E. = 60 Sp. breit ist, und theile ihn in 30 Theile, jeder 2 Sp. breit und 60 Sp. = 10 E. lang, so haben diese 30 Streifen zusammen eine Länge von 30 mal 10 E. = 300 E. Von diesen 300 E. gebe man an jede Seite des Quadrates mit nun 70 E. Seitenlänge 70 E., so hat die entstehende Fläche eine Breite und eine Länge von 70 E. mehr 4 Sp. Es bleiben nun vier quadratförmige Winkelflächen mit der Seitenlänge = 2 Sp., die aber dadurch ausgefüllt werden können, dass man von den übrig gebliebenen 300 — (viermal 70) = 20 E. = 120 Sp. viermal zwei Spannen nimmt und mit denselben die vier Winkelstreifen belegt. Es bleibt nun noch ein Streifen übrig, der 2 Sp. breit und 112 Sp. = 18 E. mehr 4 Sp. lang ist. Diese Theilung könnte fortgesetzt werden, indem man den restirenden Streifen zunächst in Theile zerlegt, denen nun schon der Finger (1 Sp. = 4 Finger) als Maasseinheit dient. Und wollte man dies weiter verfolgen, so kommt man schliesslich zu Flächenstreifen, deren Breiten unmessbar klein sind. Und wenn man diese Theilung noch so weit verfolgt, immer wieder wird ein Streifen übrig bleiben, weshalb wir uns mit der bisherigen Theilung begnügen und als Seitenlänge des Quadrates mit 5000 Qu.-E. Flächeninhalt den genäherten Werth von 70 E. und 4 Sp. annehmen."

Ziehen wir diese Stellen genau in Erwägung, so sehen wir, dass die eigentliche Aufgabe, die sich Raschi stellte, darin bestand, nachzuweisen, dass ein Quadrat, dessen Flächeninhalt 5000 Qu.-Einheiten beträgt, eine Seitenlänge von 70 mehr einigen nicht ganz genau bestimmbaren Bruchtheilen der Längeneinheit hat, d. i. die Quadratwurzel aus 5000 ist gleich 70 mehr einigen nicht genau bestimmbaren Bruchtheilen. Durch den hier gegebenen Beweis Raschi's ist also ein geome-

trischer Nachweis für die Irrationalität der $\sqrt{2}$ gegeben. Denn der Vorgang Raschi's besteht darin, dass er die Fläche von 5000 Qu.-Einh. vor Allem in zwei Flächen, jede zu 2500 Qu.-Einh. zerlegt, also gleichsetzt 2.2500. Nun ist aber eine Fläche von 2500 Qu.-Einh. gleich einem Quadrat mit der Seitenlänge = 50 Längeneinheiten, also besteht der Nachweis Raschi's einerseits darin, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Andererseits ist uns durch die hier gegebenen Auseinandersetzungen Raschi's ein Einblick in die Methoden gewährt, deren sich die alten Rabbinen beim Wurzelziehen bedienten. Der angenommene Näherungswerth für $\sqrt{5000}$ ist, da 6 E. = 1 Sp., $70\frac{2}{3}$. Es ist also:

$$(\sqrt{5000} = 50\sqrt{2}) \sim 70\tfrac{2}{3}.$$

Nun ist

$$70\tfrac{2}{3} = \tfrac{212}{3} = 50 \cdot \tfrac{212}{3 \cdot 50} = 50 \cdot \tfrac{212}{30 \cdot 5} = 50 \cdot \tfrac{106}{75},$$

also:

$$\sqrt{2} \sim \{\tfrac{106}{75} = 1\tfrac{31}{75}\}.$$

Es ist dies einer der archimedischen Näherungswerthe für $\sqrt{2}$, die Heilermann (Ztschr. f. Math. u. Phys., Jahrg. 1884) anführt, und sind $1\frac{31}{75}$ und $1\frac{2}{5}$ die alleinigen talmudischen Näherungswerthe für $\sqrt{2}$, die bisher historisch nachgewiesen wurden. Es ist mir aber gelungen, auch die gleichfalls von Heilermann als archimedischer Näherungswerth hervorgehobene Zahl $\frac{99}{70}$ als einen talmudisch gebrauchten Näherungswerth für $\sqrt{2}$ nachzuweisen. Es geht dies aus der an der betreffenden Stelle von Maimonides gegebenen Erklärung hervor, die also lautet:

„Wir haben bereits erklärt, dass Chazar hamischkan ein Beth-Sothajim ist und wissen auch, dass das Flächenmaass des Chazar hamischkan, d. i. eines Beth-Sothajim, 5000 E. ist, nachdem die Länge 100 E. und die Breite 50 E. beträgt. Und überall, wo ein Flächenmaass von 5000 E. gegeben ist, so ist es ein Beth-Sothajim, welche Figur es auch sein mag, ob Kreis, ob Dreieck, ob Viereck oder sonst eine Figur. Ist aber ein Quadrat gegeben, dessen Fläche 5000 E. beträgt, so kann dessen Seitenlänge nur annähernd angegeben werden,

„לפי שחמשת אלפים חשבון בלי גדור"

da 5000 eine Rechnung ohne Wurzel ist. Der Wurzelwerth ist in der Annäherung $70\frac{5}{7}$. Die Sache hier bei dieser Rechnung ist ähnlich der bei der Berechnung des Verhältnisses zwischen Umfang eines Kreises zu seinem Durchmesser.

„כי לא יגיע לעולם לידיעת גדר החשבון."

Man gelangt nie zu einer Grenze der Rechnung, sondern nur zu einem Näherungswerthe.

„ואין זה לחסרון דעתנו
אלא מפני טבע זה החשבון."

Und es liegt dies nicht in einem Wissensmangel unsererseits, sondern in der Art und Eigenschaft dieser Rechnung. Darum auch sagen sie (die Gamarahisten) 70 E. und einige Bruchtheile; denn setzest du diese Bruchtheile $= \frac{5}{7}$ und quadrirst $70\frac{5}{7}$, so ist das Resultat der Rechnung gleich 5000 und nahezu $\frac{1}{2}$. Setzest du aber diese Bruchtheile gleich $\frac{2}{3}$, wie dies der Jeruschalmi (Jerusalemische Talmud) thut, so erhältst du $4993\frac{1}{9}$. Dies ist nun der Streit zwischen Rabbi Jehudah ben Baba und Rabbi Akiba*. Rabbi Jehudah nimmt die Rechnung sehr genau und setzt, um ein möglichst vollständiges Quadrat vom Flächeninhalte eines Beth-Sothajim zu haben, die Bruchtheile gleich $\frac{5}{7}$, während Rabbi Akiba sich mit einer kleineren Annäherung begnügt und die Bruchtheile gleich $\frac{2}{3}$ setzt, wodurch das Flächenmaass des Quadrates (das nun eine Seitenlänge von $70\frac{2}{3}$ E. hat) nicht genau ein Beth-Sothajim ist. (Darum auch sind die von Rabbi Jehudah gestellten Bedingungen nicht nöthig.) So ist dies auch seinen Worten an einer anderen Stelle ersichtlich ....."

„Was nun den Streit zwischen Rabbi Elieser und Rabbi Jossi betrifft, so meint Rabbi Jossi, dass in einem Orte, der ein Beth-Sothajim ist, dessen Flächenmaas also 5000 Qu.-E. beträgt, selbst dann noch das Tragen erlaubt ist, wenn die Länge zweimal so gross ist, als die Breite, so dass die Länge = 100 E., die Breite 50 E., die Diagonale nahezu 112 E., also mehr als das Doppelte der Breite hat, während Rabbi Elieser der Meinung ist, dass die Länge nur um so viel grösser sein darf als die Breite, dass die Diagonale das Doppelte der Breite habe. Es hat also die Länge der Fläche $93\frac{3}{8}$ E., die Breite $53\frac{1}{3}$ E. und die Diagonale $107\frac{1}{2}$ E. Alle diese Rechnungen sind natürlich nur annähernd

„ואי אפשר להוציאם בדיוק
לפי שהם כולם חשבונות בלי גדורים"

und ist es nicht möglich, sie **genau** auszuführen, nachdem sie alle Rechnungen ohne Wurzelwerthe sind. Und alles das, was wir erwähnten von der Wurzel, der Berechnung der Diagonale eines Rechtecks, und von einem Bruche, ist sehr einleuchtend

* Es heisst in der Mischnah:

„Und noch sagt Rabbi Jehudah ben Baba: Ist ein Garten, der 70 E. und einige Bruchtheile auf 70 E. und einige Bruchtheile hat, von einem Zaune umgeben, der 10 Sp. hoch ist, so kann man in ihm (am Sabbat) tragen, nur muss in ihm sein ein Wächterhaus oder ein Wohnhaus, oder er muss nahe sein zur Stadt. Rabbi Jehudah sagt: selbst wenn nur eine Grube oder eine Höhle darin ist, darf man schon in ihm tragen. Rabbi Akiba sagt, auch wenn keines dieser Dinge darin ist, darf darin getragen werden, nur muss er 70 E. und einige Bruchtheile auf 70 E. und einige Bruchtheile haben. Rabbi Elieser sagt: ist die Länge mehr als die Breite, wenn auch nur um 1 E., so ist das Tragen darin erlaubt. Rabbi Jossi sagt: ist die Länge 2 mal so gross als die Breite, ist das Tragen erlaubt."

Jenen, die mit der Wissenschaft der Rechnungen vertraut sind, ist aber sehr schwierig Jenen, die in diesem Capitel nichts gelernt haben."

Soweit die maimonidische Auseinandersetzung. Nun folgt die Erklärung des Tosfeth-Jom Tow (Rabbi Lipmann Heller)*, die von Interesse sein mag, weil über die Mathematik der Hebräer nur wenig bekannt ist und sonach diese Erklärung über die hier gebrachte maimonidische Stelle einen Beitrag zur Geschichte der Mathemalik der Hebräer liefern kann.

Bevor wir jedoch zu dieser schreiten, wird es gestattet sein, an die maimonidischen Auseinandersetzungen einige Bemerkungen zu knüpfen. Vor Allem erkennt man deutlich die bezüglich der Irrationalitäten der Rabbinen (Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. XXIX, Heft 2, hist.-lit. Abth.) gemachte Bemerkung. Wichtiger als dies erscheint aber die Thatsache, dass sich hier zwei archimedische Näherungswerthe für $\sqrt{2}$ vorfinden. Es sind dies:

$$\sqrt{2} \sim \tfrac{99}{70}$$

und

$$\sqrt{2} \sim \left(1\tfrac{31}{75} = \tfrac{106}{75}\right),$$

von denen der letztere wohl schon von Günther als im Talmud vorkommend erwähnt wurde, während der erstere hier zum ersten Male (als im Talmud vorkommend) historisch nachgewiesen wird.

Nach den Auseinandersetzungen des Maimonides ist nämlich:

$$\sqrt{5000} \sim 70\tfrac{5}{7}.$$

Nun ist:

$$70\tfrac{5}{7} = \tfrac{495}{7} = 50 \cdot \tfrac{495}{50 \cdot 7} = 50 \cdot \tfrac{495}{5 \cdot 70} = 50 \cdot \tfrac{99}{70},$$

d. i.

$$\left(\sqrt{5000} = 50\sqrt{2}\right) \sim 50 \cdot \tfrac{99}{70},$$

woraus folgt:

$$\sqrt{2} \sim \tfrac{99}{70}.$$

Der zweite Näherungswerth $\sqrt{2} \sim 70\tfrac{2}{3}$ wurde bereits oben näher erörtert.

Und nun übergehen wir zu den von Tosfeth-Jom Tow gegebenen Erklärungen. Vor Allem wird erörtert, warum die Fläche eines Quadrates, dessen Seitenlänge $70\tfrac{5}{7}$ E. ist, annähernd $5000\tfrac{1}{2}$ Qu.-E. beträgt.

„Wir müssen" — sagt Tosfeth — „auch die Ellen zu Siebenteln machen, damit Alles gleichbenannt sei; es werden sein die 70 E. gleich (7 mal 70 = 490) Siebentel E. Wir haben sonach 495 Siebentel. Nun quadriren wir 495, indem wir sagen: 5 mal 5 sind 25, 5 mal 90 sind 450, 5 mal 400 sind 2000. Nun sage: 90 mal 5 sind 450, 90 mal 90 sind 8100 (denn 90 mal 10 = 900 und 9 mal 900 = 8100), 90 mal 400 sind 36000

* Lipmann Heller lebte in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts n. Chr. Geb.

(denn 10 mal 400 = 4000 und 9 mal 4000 = 36000); sage noch: 400 mal 5 sind 2000, 400 mal 90 sind 36000, 400 mal 400 sind 160000 (denn 100 mal 100 = 10000, also 100 mal 400 = 40000, also 4 mal 40000 = 160000). Addire nun 25, 450, 2000, 450, 8100, 36000, 2000, 36000 und 160000, so ist es zusammen 245025. Nun müssen wir wissen, wie viele ganze Quadratellen in dieser Zahl enthalten sind. Zu diesem Behufe müssen wir die Siebentel mit sich selbst multipliciren, denn je 7 Siebentel der einen Gruppe geben eine Elle der anderen Gruppe. So oft nun 7 mal 7 gleich 49 in der gefundenen Zahl 245025 enthalten ist, so viele Quadratellen haben wir. Es kommt also darauf an, zu finden, wie oft mal 49 in 245025 enthalten ist. Nun finden wir, dass in 245000 die Zahl 49 5000 mal enthalten ist, denn in 200 ist 49 viermal enthalten und bleiben 4, die zu den 45 gegeben 49 sind, also ist 49 in 245 5 mal, und sonach in 245000 5000 mal enthalten. Jede 49 geben aber eine Elle, also sind in 245025 5000 E. enthalten und bleiben $\frac{25}{49}$ übrig, die fast $\frac{1}{2}$ E. ausmachen.“

Eine ähnliche Erklärung folgt nun für den Fall, wenn die Seite des Quadrates $70\frac{2}{3}$ E. ist. Es wird auf ganz analogem Wege gezeigt, dass Fläche = $4993\frac{7}{9}$. Interessanter mag die Berechnung der Diagonale eines Rechteckes sein, dessen Länge 100 E. und dessen Breite 50 E. beträgt.

Sie lautet:

„Die Länge der Diagonale eines Rechteckes ist die Wurzel zu einem Quadrate, das so gross ist, wie die zwei Quadrate, deren Wurzeln die Länge und Breite sind.

Nun ist die Länge des gegebenen Rechteckes Wurzel eines Quadrates, dessen Fläche = 10000 Qu.-E. sind, denn 100 mal 100 sind 10000. Die Breite ist Wurzel eines Quadrates, dessen Flächenmaass 2500 Qu.-E. beträgt, denn 50 mal 50 sind 2500 (denn 10 mal 50 sind 500, also hast du 5 mal 500); also beträgt die Summe beider Quadrate 12500. Wird nun die Länge der Diagonale 112 genommen und 112 nach der oben gegebenen Regel quadrirt, so bekommen wir 12544, welches nur um 44 grösser ist als 12500, also beträgt die Diagonale in der That nahezu 112.“

Und nun wird auf ähnliche Weise auseinandergesetzt, dass, wenn die Länge des Rechteckes $93\frac{1}{3}$ E., die Breite $53\frac{1}{3}$ E. beträgt, die Diagonale $107\frac{1}{2}$ E. hat.

Zum Schlusse bemerkt noch Tosfeth-Jom Tow:

„Ich glaube, es wäre besser, wenn man statt $107\frac{1}{2}$ (welchen Werth Maimonides für die Länge der Diagonale nimmt) $107\frac{1}{4}$ setzen würde, da sich dann das Quadrat der Diagonale der Summe der beiden aus Länge und Breite gebildeten Quadraten mehr nähert. Denn die Summe der beiden Quadrate beträgt 11500 und noch nahezu $\frac{1}{3}$. Nimmt man für die Diagonale $107\frac{1}{2}$ an, so beträgt dessen Quadrat $11556\frac{1}{4}$, während wir für $107\frac{1}{4}$ als Länge der Diagonale $11502\frac{9}{16}$ erhalten, was von der Wahrheit (11500)

nur um $2\frac{9}{16}$ abweicht, also ein genügend feiner Näherungswerth ist. Die Rechnung ist so: $107\frac{1}{4}$ sind 429 Viertel; quadriren wir 429 nach der Regel des Quadrirens und ziehen Alles zusammen, so haben wir 184041; quadriren wir 4, so haben wir 16. Nun sind $160000 = 10000$ mal 16; in den übrig bleibenden 24000 sind 16 1000 mal enthalten und bleiben noch $8000 = 500$ mal 16; wir haben sonach 11500 und bleiben nur mehr $\frac{41}{16} = 2\frac{9}{16}$ übrig. Nimmt man daher als Maasszahl der Diagonale $107\frac{1}{4}$ an, so nähert sich die Quadratzahl der Diagonale der Summe der beiden anderen Quadratzahlen bis auf $2\frac{9}{16}$. Darum dünkt es mir, dass es bei Maimonides ein Schreibfehler sei und nicht $107\frac{1}{2}$, sondern $107\frac{1}{4}$ heissen soll."

Und nun wir diese Talmudstelle genügend gesichtet haben, werfen wir unser Augenmerk auf andere nicht minder interessante Theile. Wenn dieselben mit dem bisher Behandelten auch nichts gemein haben, als die Anwendung des Pythagoräischen Satzes, so dürfte es dennoch am Platze sein, dieselben hier anzuführen.

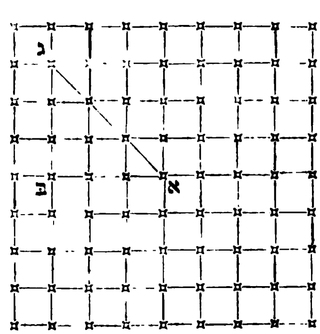
In Kilajim Abschn. V, Mischnah 5 ist zu lesen:

„Wenn in einem Weingarten ein Gewächs gepflanzt wird, so werden dadurch 45 Weinstöcke durch Kilajim (gemischte Pflanzung) heilig."

Hierauf sagt Maimonides:

„Ein Weingarten, der aus neun Reihen Weinstöcken besteht, so zwar, dass der Abstand zwischen je zwei der Reihen 4 E. beträgt und in jeder Reihe neun Weinstöcke sind, die auch 4 E. von einander abstehen, wird, wenn man im Mittelpunkte des so entstehenden Quadrates, dessen Seitenlänge $= 32$ E. ist, ein Gewächs pflanzt, 16 E. rings um den Mittelpunkt durch Kilajim heilig. Denkt man sich nun dem Weingarten einen Kreis eingeschrieben, so schliesst dieser 45 Weinstöcke ein (s. die Figur), welche nun durch Kilajim heilig werden."

Diesen letzten Punkt erklärt Tosfeth-Jom Tow folgendermassen:



„Betrachten wir diese Figur, so ist einleuchtend, dass die Linie אב 12 E. hat; ebenso beträgt die Entfernung von ב nach ג 12 E. Ziehen wir um die Gerade אג, so hat das über diese Gerade errichtete Quadrat 288 Qu.-E. Wird aus 288 Wurzel gezogen, so erhält man beinahe 17 E. für die Entfernung von א bis ג. Da aber durch das im Punkte א gepflanzte Gewächs nur 16 E. durch Kilajim heilig werden, so ist der in der Ecke ג stehende Weinstock nicht heilig. Da dasselbe von den übrigen drei nächst der Kreisperipherie liegenden Ecken gilt, so bleiben nur 45 Weinstöcke als durch Kilajim heilig."

Erwähnenswerth ist auch die Stelle in Erubin 78[a]. Daselbst sagt Rabbi Jehudah*:

„Wenn eine Mauer, die 10 Sp. hoch ist, zwei Höfe von einander trennt, so kann man dadurch, dass man an die Mauer eine Leiter von 14 Sp. Länge stellt, beide Höfe mit einander verbinden und als einen Hof betrachten, und es genügt also für beide Höfe ein Erub.“

Hierzu bemerkt Tosfeth**:

„Hat die Leiter 14 Sp. und ist die Mauer 10 Sp. hoch, so können die Füsse der Leiter fast 10 Sp. von der Mauer entfernt sein und dennoch wird die Spitze der Leiter den oberen Theil der Mauer erreichen.“

Eine andere nennenswerthe Stelle findet sich in Oholoth vor. Daselbst sagt die Mischnah:

„Wenn eine runde Säule im Hofe liegt, so bildet, wenn deren Umfang 24 Sp. hat, der zwischen der Mantelfläche der Säule und dem Erdboden befindliche Raum ein Ohel (Zelt), und wird demnach, wenn sich in jenem Raume etwas Unreines befindet, alles daselbst Befindliche unrein.“

Hierzu machen der Rabbenu Schimschon und der Rabbenu Ascher folgende Bemerkung:

„Hat jene Säule 24 Sp. im Umfange, so hat sie 8 Sp. in der Breite, denn es ist bekannt, Alles (bez. auf runde Körper), was in der Breite 1 Sp. hat, hat im Umfange 3 Sp.“

Und nun gehen sie zu folgender Betrachtung über:

„Haben wir einen Kreis mit dem Durchmesser = 8 Sp. und umschreiben ihm ein Quadrat, so ist jede Ecke dieses Quadrates vom Umfange des Kreises $\frac{8}{5}$ Sp. entfernt. Denn nach der Regel, wonach jeder Elle in der Seite des Quadrates $1\frac{2}{5}$ E. in der Diagonale entsprechen, beträgt die Diagonale unseres Quadrates, das eine Seitenlänge von 8 Sp. hat, 8 Sp. mehr $\frac{16}{5}$ Sp. Nachdem aber der Durchmesser des Kreises 8 Sp. hat, so bleiben für die Entfernungen der einander gegenüber liegenden Ecken des Quadrates von dem Umfange des Kreises $\frac{16}{5}$, was für eine Ecke $\frac{8}{5}$ Sp. giebt.

Interessant sind ihre weiteren Auseinandersetzungen:

„Construiren wir“ — sagen die beiden genannten Commentatoren — „in jeder Ecke des Quadrates ausserhalb des Kreises ein Viereck von *tefach al tefach*, d. i. ein Quadrat mit der Seitenlänge = 1 Sp., so ist das zwischen der Quadratecke und dem Umfange des Kreises liegende Stück der Diagonale eine Diagonale in dem neu construirten Quadrate und hat sonach $1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$ Sp. Wohl müsste es nach den oben gemachten Betrachtungen $\frac{8}{5}$ Sp. haben, doch thut's Nichts, wenn es auch mit $\frac{1}{5}$ nicht stimmt.“

---

* Lebte im 1. Jahrhundert n. Chr. Geb.

** Darunter ist grösstentheils Rabbi Jitzchak Baal-Tosfeth gemeint, er lebte 4890 bis 4980 n. E. d. W., d. i. 1130 bis 1220 n. Chr. Geb. Nach Anderen wäre er schon 1103 n. Chr. im Alter von 90 Jahren gestorben.

Dasselbe sagt auch Owadja von Bartenurah und fügt hinzu, dass der Satz, nach welchem die Diagonale eines Quadrates, dessen Seitenlänge = 1 Sp. ist, $1\frac{2}{5}$ Sp. hat, nicht vollkommen richtig sei; sie hat etwas weniger. Hierauf sagt der Tosfeth-Jom Tow, dass dem nicht so sei, da die Diagonale noch etwas grösser als $1\frac{2}{5}$ Sp. ist, und begründet dies auf ähnliche Weise, wie dies die Baleh-Tosfeth in Succha 8* thun.

Hervorzuheben ist auch der Widerspruch, auf den Rabbenu Schimschon und Rabbenu Ascher bei ihren gemachten Auseinandersetzungen bezüglich des Abstandes einer Quadratecke von der Peripherie des ihm eingeschriebenen Kreises gelangen. Statt dessen, dass sie hieraus erkennen sollten, dass ihre Voraussetzung, jener Abstand sei Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge = 1 Sp., unrichtig sei (indem dieser unter Annahme $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$, Diagonale eines Quadrates ist, dessen Seitenlänge $\frac{a}{7}$ ist, wenn a die Länge einer Seite des ursprünglichen Quadrates bedeutet), sagten sie: „wenn es auch mit $\frac{1}{5}$ nicht genau stimmt, so thut dies nichts“.

Von dieser irrigen Ansicht war der Tosfeth-Jom Tow schon frei, und muss überhaupt hervorgehoben werden, dass dieser Commentator mit mathematischem Wissen besonders vertraut gewesen zu sein scheint, wie dies auch aus der oben gegebenen Auseinandersetzung (Erubin 23ᵃ) hervorgeht. Er nahm für das Verhältniss zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises nicht mehr $\pi = 3$ an, sondern sagte:

„עגול טפח הקיפו ג טפחים ושביעית בקרוב“

d. i.: „hat der Durchmesser eines Kreises 1 Sp., so hat der Umfang beiläufig (oder besser: annähernd) $3\frac{1}{7}$ Sp.“

Ich will an diesen Gegenstand keine weiteren Bemerkungen knüpfen, begnüge mich vielmehr, fast wörtliche Uebersetzungen der betreffenden Stellen gebracht zu haben.

Eine mit dem hier vorgebrachten Gegenstande (in Bezug auf mathematischen Inhalt) zusammenhängende Stelle findet sich auch in Erubin 57ᵃ. Dasselbe findet sich auch vor in Erubin 60ᵇ und auch in Erubin 51ᵃ. Eine ebenfalls auf diesen Gegenstand Bezug habende Stelle findet sich vor in Baba-Bassra 102ᵃ. Hervorzuheben ist eine Bemerkung, die daselbst Raschi macht.

„Die Diagonale eines Rechtecks, dessen Seiten die Längen 4 Sp. und 6 Sp. haben, ist genau so gross, wie die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge = 5 Sp.“

Raschi meinte offenbar, dass, weil die Umfänge in beiden Figuren gleich sind, auch die Diagonalen einander gleich sein müssen.

Eine gleiche Naivität bekundet Raschi in Erubin 78ᵃ**. Daselbst sagt Raschi:

---

* Siehe des Verfassers „Beitrag zur Geschichte der Mathematik“ in Ztschr. f. Mathem. u. Phys., hist.-lit. Abth. Jahrg. 1882, S. 210.

** Siehe S. 128 Z. 3—6 v. o.

„Soll eine Leiter gegen eine 10 Sp. hohe Mauer so gestellt werden, dass das obere Ende der Leiter an den Rand der Mauer zu liegen kommt, so muss die Leiter 14 Sp. haben, da die Füsse derselben 4 Sp. von der Mauer abstehen müssen, und sonach bleiben noch 10 Sp. gegen die 10 Sp. hohe Mauer.“

Diese Worte Raschi's sind um so auffallender, nachdem dieser hervorragende Commentator an anderen Stellen eine grosse Anschauungskraft und Kenntniss in der Rechnung an den Tag legte.

Zieht man diese Stellen (Baba-Bassra und Erubin 78[a]) allein in Betracht, so wird wohl kaum Jemand zu behaupten wagen, Raschi sei Mathematiker gewesen, nachdem es durchaus keines grossen mathematischen Geistes bedarf, um sich von der Unrichtigkeit des von Raschi Vorgebrachten zu überzeugen. Jeder Laie, ja jedes Kind weiss, dass, wenn drei Punkte A, B und C nicht in einer Geraden liegen, der directe Weg von A nach C kürzer sei, als der von A über B nach C führende Weg. Wenn man einem Kinde den Auftrag giebt, von einer Ecke des Saales zur gegenüberliegenden Ecke zu gehen, so wird es diesen Weg wohl nicht längs den Wänden des Saales zurücklegen, sondern wird bestrebt sein, dies — wenn auch unbewusst — längs der Diagonale, die die Ecken verbindet, zu thun. Die citirte Stelle würde sonach das Urtheil Jener, die Raschi als grossen Mathematiker hinstellen, völlig vernichten.

Liest man dagegen in Erubin 56[b], so findet man folgende Stelle:

„Wenn eine Stadt, die in Kreisform gebaut ist, deren Durchmesser 2000 E. beträgt, in Quadratform von der Seitenlänge = 2000 E. umgebaut wird, so gewinnt dadurch die Stadt in Bezug auf die Bestimmung der Grenze eines Erublegens, welches das Tragen am Sabbath erlauben soll, 400 E. auf der einen Seite und 400 E. auf der entgegengesetzten Seite.“

Hierzu macht Raschi eine Erklärung, in der er eine vollständige Kenntniss aus der Lehre des rechtwinkligen Vierecks, des Kreises und der Beziehungen der einem Kreise eingeschriebenen und umgeschriebenen Quadrate zum Kreise verräth. Desgleichen findet man eine sehr interessante Auseinandersetzung Raschi's über eine Erubin 23[a] vorkommende Stelle (vergl. S. 122 dieser Arbeit). Nun könnte man behaupten, dass die alten Ausleger talmudischer Schriften Vieles verstanden, Vieles nicht verstanden haben, aber zu verstehen glaubten, und daher kämen jene Widersprüche, auf die hier hingewiesen wurde. Doch glaube ich, es sei besser die Annahme zu machen, dass jene Schriftgelehrte, bei denen man — wie bei Raschi — bezüglich ihres mathematischen Wissens auf hier angedeutete Widersprüche stösst, keine geschulten Mathematiker, wohl aber mit einem bedeutenden mathematischen Geiste begabt waren, der sie in den Stand setzte, gewisse schwierige mathematische Probleme, die sie bei gewissen rituellen Fragen (denn mit diesen und nicht mit wissenschaftlichen Disciplinen beschäftigten sie sich hauptsächlich) zu erörtern hatten,

richtig -- wenn auch auf höchst originelle Weise — zu lösen. Dass nun diese Männer bei einfachen Dingen oft sehr weit von der Wahrheit entfernt waren, erklärt sich dadurch, dass sie bei diesen Dingen, eben weil sie so leicht schienen, ohne viel nachzudenken ganz leichtfertig über dieselben hinweggingen, wie dies ja häufig bei solchen Leuten der Fall zu sein pflegt. Männer, wie Maimonides, die nicht nur in talmudischen Schriften forschten, sondern auch Zweige der Wissenschaft mit Eifer studirten, wussten derlei Probleme mit Leichtigkeit zu lösen. Anders war dies bei Männern, denen, wie Rabbi Owadja von Bartenurah selbst bemerkt, die mathematischen Auseinandersetzungen Maimonides' zu schwierig waren. Und blicke ich auf meine bisherigen Talmudstudien zurück, so gelange ich zur Ueberzeugung, dass, wenn Raschi auch nicht als Mathematiker gepriesen werden kann, er dennoch mit mathematischen Fähigkeiten reichlich begabt war.

Lesen wir Kilajim II, Mischnah 9, so finden wir:

„Soll ein Stück Feld von der Grösse eines Beth-Saa mit allerlei besäet werden, so theile man es in 24 Theile..."

Owadjah von Bartenurah giebt bezüglich der Theilung folgende Erklärung:

„Ein Beth-Saa ist ein Quadrat mit der Seitenlänge = 50 E. Ich denke mir nun diese Quadratfläche in 25 gleiche Theile getheilt, so ist jeder Theil ein Quadrat mit der Seitenlänge = 10 E. Nun greife ich eines dieser Quadrate heraus und theile es in 24 Flächenstreifen, so, dass jeder Streifen 10 E. lang und $2\frac{1}{2}$ Sp. (1 E. = 6 Sp.) breit sei. Füge ich nun je einen dieser Streifen an eine Seite je einer der übrig gebliebenen 24 Quadratflächen, so erhalte ich 24 Rechtecke, von denen jedes eine Länge von 10 E. und $2\frac{1}{2}$ Sp. hat und 10 E. breit ist."

Maimonides führt diese Theilung arithmetisch aus; er erhält 24 Quadrate, jedes mit der Seitenlänge = $10\frac{1}{5}$ E.

Der Tosfeth-Jom Tow führt die Sache noch einfacher aus. Er theilt das gegebene Quadrat nach der einen Richtung in sechs gleiche Theile, nach der anderen Richtung in vier gleiche Theile, wodurch das gegebene Quadrat in 24 gleiche Flächenstreifen zerlegt wird, jeder $12\frac{1}{2}$ E. lang und $8\frac{1}{3}$ E. breit.

Es könnten noch einige Stellen mathematischen Inhalts hier angeführt werden; da sie aber im Wesentlichen derselben Art und desselben Inhaltes sind, als die hier und die bereits in früheren Aufsätzen gebrachten, so glaube ich sie fortlassen zu können und schliesse somit meine Eingangs erwähnten Untersuchungen.

Bemerkungen zu den Regeln des Ahmes und des Baudhâyana über die Quadratur des Kreises.

Von

C. Demme,

Oberlehrer am Realgymnasium in Dresden-Altst.

Hierzu Taf. III Fig. 5 u. 6.

In dem altägyptischen Rechenbuche des Ahmes, in welchem auch die Quadratur des Kreises* behandelt ist, wird zur Quadratseite der um $\frac{1}{9}$ seiner Länge verminderte Kreisdurchmesser gewählt. Wie man zu dieser Vorschrift gekommen, ist allerdings nicht beigefügt.

Nun ist uns wohl bekannt, dass zu Ahmes' Zeiten in zwölf gleiche Theile zerlegte Kreise** zu den besonders auf Gefässen beliebten Verzierungen gehörten; man darf deshalb wohl auch dem Versuche einer Ableitung der obigen Formel die Betrachtung eines solchen in zwölf Theile zerlegten Kreises zu Grunde legen.

Der vertikale und der horizontale Durchmesser zerlegen den Kreis in vier Quadranten, von denen jeder wieder in drei gleiche Theile zerfällt. Zieht man durch die dem vertikalen Durchmesser benachbarten Theilpunkte der Kreislinie Parallele zum horizontalen Durchmesser und durch die dem horizontalen Durchmesser benachbarten Theilpunkte der Kreislinie Parallele zum vertikalen Durchmesser, so entsteht ein Quadrat, das an den vier Ecken über die Kreisfläche hinausragt, dagegen an den vier Seiten vier Kreissegmente übrig lässt. Das Quadrat würde dem Kreise flächengleich sein, wenn ein Kreissegment einem solchen an der Ecke des Quadrates herausragenden Flächenstück gleich wäre oder wenn man die Diagonalen zieht, wenn Flächenstück $ABD =$ Flächenstück DEF (s. Fig. 5).

Man wird nun wohl dem Ahmes, der*** den Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks durch das halbe Product aus Basis und Schenkel ausdrückt, nicht gerade Unrecht thun, wenn man ihm die Schlussfolgerung unterschiebt, dass die beiden Flächenstücke ABD und DEF, bei denen Bogen BD die Hälfte vom Bogen ED ist, gleich seien, wenn andererseits EF die Hälfte von AB wäre.

Unter dieser Bedingung würde dann der eine der beiden Abschnitte, welche der Durchmesser auf der Diagonale des Quadrates übrig lässt, gleich

* Cantor, Geschichte der Mathematik, S. 50.

** Cantor, G. d. M., S. 59.

*** Cantor, G. d. M., S. 49.

der Summe der beiden Abschnitte sein, welche die Quadratseite auf dem Durchmesser übrig lässt. Man konnte sich nun leicht überzeugen, dass der eine der eben erwähnten beiden Abschnitte der Diagonale (AB) auf dem Durchmesser (BC) ungefähr neunmal abgetragen werden kann, also AB gleich $\frac{1}{9}$ Durchmesser sei. Sollte nun aber AB gleich der Summe der beiden Abschnitte, die die Quadratseite auf dem Durchmesser übrig lässt, sein, so musste man den Durchmesser demnach um $\frac{1}{9}$ seiner Länge vermindern, um die entsprechende Quadratseite zu erhalten.

Für einen Praktiker, der die Messung wirklich ausführte, scheint mir bei Verwendung unserer Fig. 5 der obige Weg der einfachste zu sein, zumal wenn man annimmt*, dass die Ausmessung mit Hilfe eines Lineals, aber ohne Zirkel vorgenommen sei, da in diesem Falle dasselbe nur an der einen Linie AC entlang zu schieben war.

Die Frage, ob Ahmes oder wer sonst die Formel zuerst aufstellte, wirklich glaubte, dass in unserer Figur $AB = 2EF$ sei, braucht nach meiner Ansicht nicht weiter verfolgt zu werden: Ahmes setzte ja in seiner Rechnung den Unterschied zwischen Durchmesser und Quadratseite gleich der Grösse, die er für AB gefunden, machte also in seiner Rechnung jedenfalls $AB = 2EF$.

Ein mit der Betrachtung rechtwinkliger Dreiecke und der Quadratwurzelausziehung vertrauter Rechner, der dieselbe Figur seiner Entwickelung zu Grunde legte, hatte natürlich nicht nöthig, den Durchmesser und die ganze Quadratseite zur Vergleichung zu nehmen: er konnte leicht erkennen, dass, da $\angle DOF = 30^0$, das Dreieck DOF die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks und somit $DF = \frac{r}{2}$ und $OF = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ bezw. $HF = \frac{d}{2}\sqrt{3}$, woraus sich (für $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$) die Quadratseite gleich dem um $\frac{2}{15}$ seiner Länge verminderten Durchmesser ergab, wie von Baudhâyana und anderen indischen Mathematikern angegeben wird**.

Man kann nun wohl weiter annehmen, dass der Rechner auch $AO = \frac{r}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} = \frac{r}{2}\sqrt{6}$ und (für $\sqrt{6} = 2\frac{4}{9}$***) $AB = \frac{2}{9}r$ fand, so dass also $AB : EF = \frac{2}{9} : \frac{2}{15} = 5 : 3$. Auch selbst ein etwas zu grosser Wert für $\sqrt{6}$ (etwa $\sqrt{6} = 2\frac{1}{2}$) konnte immer noch nicht die Proportion $AB : EF = 2 : 1$ herstellen, vielmehr blieb auch hier noch $AB : EF = 15 : 8$ also $< 2 : 1$.

Ahmes setzte, wie oben erwähnt, in seiner Rechnung $AB = 2EF$. er wählte also ein kleineres EF bezw. eine grössere Quadratseite, als die seiner Figur zu Grunde liegende. Dem entsprechend musste dann aber wiederum eine grössere Diagonale vorausgesetzt werden, so dass hier eigent-

---

* Cantor, G. d. M., S. 48.

** Cantor, S. 548.

*** $\sqrt{6} = 2{,}44949$.

lich $AB:EF > 2:1$ sein würde. Sollte nun $AB:EF = 2:1$ festgehalten werden, so durfte man weder von der Beziehung der Diagonale zum Durchmesser, wie bei der Formel des Ahmes, noch von der Beziehung des Durchmessers zur Quadratseite, wie bei der oben erwähnten Regel des Baudhâyana, ausgehen. Dann blieb aber als dritter und letzter Ausgangspunkt die Beziehung der Diagonale zur Quadratseite, also eine Betrachtung, die sich zunächst nur auf das Quadrat bezog. Und dieser Weg wird auch in den Çulvasûtras angegeben. Dort wird nämlich* die Aufgabe behandelt, ein Quadrat in einen Kreis zu verwandeln. Der Unterschied zwischen der halben Quadratseite und der halben Diagonale (Fig. 6) wird in drei gleiche Theile getheilt und die um einen solchen dritten Theil vermehrte halbe Quadratseite als Radius gewählt. Aus dieser Construction hat nun Baudhâyana einen Werth für das Verhältniss zwischen Quadratseite und Durchmesser abgeleitet**. Da nämlich die Diagonale gleich der Quadratseite, multiplicirt mit $\sqrt{2}$, ist, so würde, wenn man für $\sqrt{2}$ den bei den Indern gebräuchlichen Werth $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12 \cdot 34} = \frac{577}{408}$ einsetzt, die Diagonale sich zur Quadratseite wie $577:408$ verhalten und, wenn man die Verhältnisszahlen für die Grössen selbst einsetzt, der Unterschied zwischen Diagonale und Quadratseite 169, der dritte Theil davon $56\frac{1}{3}$ und somit der Durchmesser $464\frac{1}{3}$ sein. Dann wäre also $\frac{408}{464\frac{1}{3}}$ das Verhältniss zwischen Quadratseite und Durchmesser. Da nun $\frac{406}{464} = \frac{7}{8}$, so ist $\frac{408}{464\frac{1}{3}} = \frac{7}{8}$ $+ \frac{408.8 - 464\frac{1}{3}.7}{8.464\frac{1}{3}} = \frac{7}{8} + \frac{13\frac{2}{3}}{8.464\frac{1}{3}}$, oder wenn man, um eine bei den Indern beliebte Entwickelungsweise, bei der jeder folgende Nenner ein Vielfaches des vorhergehenden ist, zu ermöglichen, den Bruch $\frac{1}{3}$ im Nenner weglässt,

$$= \frac{7}{8} + \frac{16}{8.464} - \frac{2\frac{1}{3}}{8.464} = \frac{7}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{7}{8.464.3}$$

$$= \frac{7}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{8}{8.464.3} + \frac{1}{8.464.3} = \frac{7}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{1}{8.29.6} + \frac{1}{8.29.6.8}.$$

Und dies ist der Werth, mit dem man nach Baudhâyana*** den Durchmesser multipliciren muss, um die Seite des dem Kreise gleichen Quadrates zu erhalten.

---

* Cantor, S. 546.
** Cantor, S. 547.
*** Cantor, S. 547.

Seiten- und Diametralzahlen bei den Griechen.

Von

PAUL BERGH,

Amtsschulvorsteher in Bergen (Norwegen).

Der als Verfasser in der Ueberschrift genannte norwegische Gelehrte hat dem Herausgeber der Historisch-literarischen Abtheilung brieflich eine kleine Mittheilung gemacht, welche dieser veröffentlichen zu müssen glaubt, da sie ihm eine überaus geistreiche Vermuthung auszusprechen scheint. Bekanntlich nennt Theon von Smyrna solche Zahlen Seiten- und Diametralzahlen (α_n und δ_n), welche den Bildungsgesetzen

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \delta_{n-1}, \quad \delta_n = 2\alpha_{n-1} + \delta_{n-1},$$
$$\alpha_1 = \delta_1 = 1$$

genügen, und welche $\frac{\delta_n}{\alpha_n}$ als Näherungswerth von $\sqrt{2}$ liefern. Herr Bergh zeigt nun die geometrische, mithin wahrscheinlich echt griechische Entstehung dieses Bildungsgesetzes. Ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ABC habe die beiden Katheten $AB = AC = \alpha_{n-1}$, die Hypotenuse $BC = \delta_{n-1}$. Die Katheten verlängert man um $BD = CE = \delta_{n-1}$, so erhält man ein neues gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ADE mit den Katheten $AD = AE = \alpha_n = \alpha_{n-1} + \delta_{n-1}$ und der Hypotenuse $DE = \delta_n$. Fällt man nun von B und C aus die Senkrechten BF und CG auf DE, so zerfällt letztere in drei Abschnitte DF, FG, GE. Weil $\angle ABC = 45^0$, $\angle CBF = 90^0$, ist $\angle DBF = 45^0$ und Dreieck BDF gleichschenklig rechtwinklig mit $BD = \delta_{n-1}$ als Hypotenuse, folglich mit α_{n-1} als Kathete, oder es ist $DF = \alpha_{n-1}$. Ebenso ist $GE = \alpha_{n-1}$. Endlich ist $FG = BC = \delta_{n-1}$, mithin $\delta_n = 2\alpha_{n-1} + \delta_{n-1}$. W. z. b. w.

Recensionen.

R. H. Hofmeister, **Leitfaden der Physik.** 4. Auflage. 1884. Zürich, Orell Füssli & Co. Preis 4 Mk.

Mit Recht führt dieses Buch den Namen Leitfaden, indem es in aller Kürze die ganze Physik behandelt und somit dem Schüler das in der Schule Erläuterte rasch ins Gedächtniss zurückruft. Gegenüber der früheren Auflage findet man theils andere Anordnung des Textes, die leider nicht immer besser geworden ist (z. B. sind in der früheren Auflage die Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie schärfer hervorgehoben gewesen), theils mehrere neue Capitel, wie z B. der Begriff vom Potential, das absolute Maasssystem etc. Irrthümlich werden die in der Praxis üblichen elektrischen Maasse aus dem elektrodynamischen Maasssystem abgeleitet, statt aus dem elektromagnetischen, welche Systeme zwar in den Dimensionen, aber nicht in den Constanten übereinstimmen. Das Ohm ist $[lt^{-1}] . 10^9$ und nicht $[lt^{-1}] . 10^8$. — Das Buch, das sich ganz auf der Höhe der Wissenschaft befindet, bietet in knapper Ausdrucksweise einen reichen Inhalt und darf daher für den Unterricht höherer Lehranstalten bestens empfohlen werden.

B. Nebel.

Lamb-Reiff, **Einleitung in die Hydrodynamik.** Preis 7 Mk. Verlag von J. C. B. Mohr, Freiburg-Tübingen, 1884.

Vorliegendes Werk ist eine Uebersetzung aus dem Englischen, welches durch Hinzufügen einiger Capitel und Vervollständigung des Literaturverzeichnisses erweitert wurde. Zuerst werden die Bewegungsgleichungen abgeleitet, wobei es S. 6 Z. 15 v. o. „Kraft“ statt „Beschleunigung“ heissen sollte; daran schliesst sich die Integration der Gleichungen in speciellen Fällen an. Das Capitel über relative Bewegung der Theilchen wurde von dem Uebersetzer eingeschaltet. Die Potentialbewegung und ihre Anwendung auf die Bewegung der Flüssigkeit nach zwei Dimensionen wurde auch an Beispielen weiter ausgeführt, wobei die Riemann'sche Theorie der complexen Variabeln nach Aufstellung der Hauptsätze derselben benützt wurde. Bewegung fester Körper in einer Flüssigkeit, Wirbelbewegung, Wellenbewegung in incompressibler Flüssigkeit, Wellen in der Luft und

innere Reibung bilden die weiteren Capitel, in welchen sehr anzuerkennen ist, dass die Methoden und Formeln der verschiedenen Autoren nach einander angeführt werden, was dem Buche zugleich einen kritischen Charakter verleiht und deshalb Jedem, der sich mit Hydrodynamik beschäftigt, um so willkommener sein wird. Der Anhang, welcher das nach einzelnen Capiteln geordnete Literaturverzeichniss und die Erwähnung der Lehrbücher umfasst, ist ein Vorzug, der nicht gering anzuschlagen ist.

B. Nebel.

Kritische und nicht kritische Versuche, von Egmont. I. Erdaxen im Verhältniss zum Werden und Vergehen. Danzig 1885. 22 S.

„Es müssen andere Naturgesetze, als die bisherigen Theorien aufweisen, bei der Bildung der Weltkörper in Thätigkeit treten.“ Das scheint das Thema zu sein, das sich der Verfasser gestellt hat. „Wenn das Sonnenlicht Resultat der Gravitationskraft, das heisst eine elektrische Erscheinung wäre, könnte die Theorie vom brennenden Urnebel aufgegeben werden.“ Das scheint die Lösung zu sein. Wie? das sollen einzelne Gedankenreihen nachweisen: Lage der Erde zur Sonne und Wechsel der Erdaxe, Jurazeit, Eiszeit, Protoplasma, Schamgefühl (vielen Menschen kann aus Furcht und Angst das Mannigfachste passiren), Instinkt, das Moner werden der Reihe nach betrachtet, zu welchem Zweck ist schwer zu errathen.

P. Zech.

Elemente der theoretischen Astronomie, für Studirende bearbeitet von Dr. Israel Holtzwart. Wiesbaden 1885. I. Abth. 185 S. Anhänge 51 S.

Der Verfasser will Studirenden Anleitung geben, die Aufgabe zu lösen, aus drei Beobachtungen eines Planeten dessen Bahn zu bestimmen, ohne dass mehr Mathematik verlangt wird, als in Gymnasien gegeben wird oder gegeben werden kann. Selbstverständlich sind hierbei Sätze aus der Mechanik, analytischen Geometrie und höheren Analysis zu entlehnen, die auf elementarem Wege entwickelt werden. Ueber die Zweckmässigkeit, zu Lösung einer bestimmten Aufgabe, der ein Schüler nach seinen bisher erworbenen Kenntnissen nicht gewachsen ist, diesen noch Einiges aus noch unbekannten Gebieten hinzuzufügen, kann man verschiedener Ansicht sein. Dass es aber möglich ist, auf astronomischem Gebiete mit elementarer Mathematik weit vorwärts zu kommen, hat Bohnenberger in seiner Astronomie gezeigt.

Der Verfasser weist zunächst die Kepler'schen Gesetze empirisch nach (S. 10 dürfte die Schlussfassung klarer sein) und zeigt, wie man die Form einer Planetenbahn aus Beobachtungen von geocentrischen Längen und Breiten finden kann. Dann folgt die theoretische Begründung der Kepler'schen Gesetze. Dabei werden rasch einige Differentialformeln eingeführt

für den Werth der Geschwindigkeit und der Beschleunigung, das Symbol $\Delta^2 s$ wird gebraucht, ohne etwas darüber zu sagen (S. 28). Um die bei der elliptischen Bewegung wirkende Kraft zu bestimmen, wird die Ellipse näher betrachtet unter Voraussetzung der Grundlehren der analytischen Geometrie auf drei Seiten (33 bis 35). Gerade diese Partie zeigt das Unbehagliche, für andere Zwecke nöthige Gleichungen rasch zu entwickeln, ohne beim Gegenstand selbst länger zu verweilen. Da die Ellipse für das vorliegende Werk Hauptgegenstand ist, so wäre es wohl besser gewesen, eine ausführliche Betrachtung derselben, etwa in der Art behandelt, wie in Gugler's Lehrbuch der descriptiven Geometrie, Allem voranzustellen.

In einem weiteren Abschnitt werden die Elemente der Mondbahn und die Ausdrücke für die Hauptstörungen des Mondes gegeben, und dann der elliptische Ort eines Planeten bestimmt, nebst einem Beispiel aus Bohnenberger's Astronomie.

Alles Bisherige lässt sich als Einleitung zu der nun folgenden Hauptaufgabe, eine Planetenbahn aus wenigen, durch kurze Zwischenzeiten getrennten Beobachtungen zu bestimmen. Die praktische Anleitung zur Ausführung der Berechnung, wie sie das Berliner astronomische Jahrbuch (Jahrgang 1879 und 1882) gegeben hat, ist nicht berücksichtigt. Die Beurtheilung der Wahl der Formeln überlassen wir dem rechnenden Astronomen.

P. Zech.

Lehrbuch der Physik und Mechanik, für gewerbliche Fortbildungsschulen von Dr. Ludwig Blum. 3. Auflage. Leipzig 1885. 539 S.

In den Fortbildungsschulen Württembergs werden seit mehr als dreissig Jahren Abends anderthalbstündige Vorträge über Physik und Mechanik gegeben. Das vorliegende Lehrbuch giebt dem Lehrer Anleitung zur Vertheilung des Stoffs. Es ist erfreulich, sagen zu können, dass hier nicht, wie so gewöhnlich bei den Lehrbüchern der Physik, frühere gedankenlos abgeschrieben werden, sondern dass Althergebrachtes, Unrichtiges überall verbannt ist. Man sieht dies z. B. bei der Behandlung der Waage, wo insbesondere der Uebelstand der langen Hebelarme berücksichtigt ist, oder bei der Ausdehnung der Gase, wo stets bestimmt gesagt wird, dass man vom Volumen bei Null Grad ausgeht u. s. w. Als Muster für den mechanischen Theil dienten die Werke von Delaunay und Holtzmann, er nimmt nahezu die Hälfte ein. In der Lehre von der Wärme schliesst sich noch die Betrachtung der Dampfmaschine an mit einer lehrreichen Uebersicht über die verschiedenen Arten derselben. Bei der Elektricität werden die Dynamomaschinen und die elektrischen Lampen, die Telegraphen und Telephone in Betracht gezogen. Den Schluss des Werkes bildet ein Kapitel über die Erhaltung der Energie und eine Anzahl von Tafeln physikalischer Constanten. Druck und Ausstattung sind sehr zu loben.

P. Zech.

Grundzüge der allgemeinen Mikroskopie von Dr. DIPPEL. Vieweg in Braunschweig, 1885. 524 S.

Eine Bearbeitung des früher besprochenen Handbuchs der Mikroskopie vom praktischen Gesichtspunkte aus, mit Beschränkung der theoretischen Abschnitte auf das geringste Maass, indem nur die Resultate der theoretischen Untersuchungen gegeben werden, soweit sie nöthig sind, um die neue Theorie der Bilderzeugung im Mikroskop Jedermann zugänglich zu machen. Die Ausstattung ist die bekannte, schöne der Verlagshandlung, die Holzschnitte sind dieselben, wie die des Handbuchs.

P. ZECH.

HELMERT, **Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie.** II. Theil: Die physikalischen Theorieen, mit Untersuchungen über die mathematische Erdgestalt auf Grund von Beobachtungen. Leipzig 1884, Teubner. XV und 610 S. 8° mit zwei Tafeln.

Im ersten Band des vorliegenden Werkes, von welchem in Band XXVIII S. 55flg. dieser Zeitschrift eine Inhaltsanzeige gegeben wurde, sind die mathematischen Methoden zur Bestimmung der Erdgestalt behandelt, wenn man die Erde als Kugel oder als Ellipsoid betrachtet. Zugleich sind die Mittel aufgezeigt, mit welchen man, genügendes Material vorausgesetzt, Schlüsse auf die wahre Form des Geoids machen kann. In dem jetzt vorliegenden zweiten Band giebt der Verfasser die Gründe an, welche ein Rotationsellipsoid als eine plausible Näherungsform für das Geoid erscheinen lassen, und zeigt, welche Mittel, ausser den geodätischen Messungen, uns zur Bestimmung der Erdgestalt noch zu Gebote stehen. Im Einzelnen ist der Inhalt in folgender Weise disponirt.

Da das Geoid eine Niveaufläche der Schwere ist, so werden im ersten Capitel die wichtigsten Eigenschaften des Potentials und der Niveauflächen abgeleitet.

Das zweite Capitel beginnt mit dem Beweise einiger Eigenschaften der Kugelfunctionen. Dann wird gezeigt, dass man das Potential der Erde in Bezug auf einen gehörig weit entfernten Punkt in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickeln kann, die aber nicht bis an die physische Erdoberfläche convergent ist. Für die weitere Betrachtung wird nun angenommen, die Massenvertheilung sei derart, dass das Potential ausserhalb durch die drei ersten Glieder jener Reihe dargestellt werden könne. Die Niveauflächen sind dann — unter einer bei der Erde zutreffenden Annahme — algebraische, an den Polen abgeplattete Rotationsflächen, die sich von Rotationsellipsoiden kleiner Abplattung wenig unterscheiden und die Niveausphäroide genannt werden. Für die Intensität der Schwere an ihrer Oberfläche folgt mit einigen Vernachlässigungen das Clairaut'sche Theorem und ergiebt sich ein Ausdruck durch die geographische Breite, welcher die bei der Erde

durch die Beobachtungen angezeigte Form hat, deren Constanten im dritten Kapitel berechnet werden. Aus ihnen ergiebt sich die Abplattung $= \frac{1}{299{,}26}$, also fast genau der Bessel'sche Werth. Ein Niveausphäroid mit dieser Abplattung erhebt sich über ein Rotationsellipsoid von gleicher Abplattung und gleichem Aequatorealradius im Maximum um rund 13^m. Mit derselben Annäherung, mit der man das Geoid als ein Niveausphäroid ansehen darf, darf man es auch als ein Ellipsoid betrachten.

Im dritten Capitel wird die Aufgabe gelöst, eine Formel für die Schwere im Meeresniveau aufzustellen. Zu dem Zwecke wird die wirkliche Erde durch eine theoretische Erde ersetzt, die aus dem inneren Kern der wirklichen Erde und einer darüber gelegten homogenen Schale von etwa 21 km Dicke besteht, deren äussere Begrenzung ein der wirklichen Meeresfläche sich nahe anschliessendes Rotationsellipsoid ist. Diejenigen Massen, welche bei der wirklichen Erde ausserhalb des Kernes liegen, werden bei der theoretischen auf die Oberfläche des Kernes condensirt. Für diese theoretische Erde nun kann man das äussere Potential durch Kugelfunctionen in eine bis zur Oberfläche convergente Reihe entwickeln und mit ihrer Hilfe auch einen Ausdruck für die Schwere herleiten. Da, wie eine Schätzung zeigt, die Niveauflächen gleichen Potentialwerthes der beiden Erden sich sehr nahe liegen, so kann man näherungsweise die der theoretischen Erde für die der wirklichen setzen. Aus der auf der wirklichen Erde beobachteten Schwerkraft muss nun die von der theoretischen Erde auf einen Punkt ihrer Oberfläche ausgeübte Anziehung berechnet werden. Die dazu dienenden, im Eingang des Capitels entwickelten, Formeln finden Anwendung auf die zur Zeit bekannten Schwerebeobachtungen, von welchen 22 Gruppen behandelt werden. Nach Ausgleichung der mehrfachen Beobachtungen an demselben Orte bleiben schliesslich 122 Beobachtungen an ebensovielen Orten übrig. An sie werden die erwähnten Correctionen angebracht und dann acht Gruppen gebildet, indem immer die Beobachtungen von je 10^0 Breite in ein Mittel zusammengefasst werden, unter Sonderung in Festland-, Küsten- und Insel-Stationen. Dabei zeigt sich, dass auf der theoretischen Erde Festland- und Küsten-Stationen derselben Breite sehr nahe die gleiche Schwere liefern, während auf den Inseln das Secundenpendel ungefähr 100 Microns länger ist, als auf dem Festlande.

Wenn mehr und besser vertheiltes Material vorläge, würde man die Formel für die Schwere mit Hilfe der mechanischen Quadratur finden können. Bei dem heutigen Stand bleibt nur übrig, in einer auf zwei Glieder reducirten Formel die Constanten durch die Methode der kleinsten Quadrate zu finden. Aus dem erwähnten Material findet Helmert so für die theoretische Schwere die Formel

$$g = 9{,}7800^m (1 + 0{,}005310 \sin^2 B)$$

(wo B die geographische Breite).

Wenn weitere Beobachtungen, besonders über die Schwere auf dem Meere existirte, könnte man nach einer von Stokes gegebenen, vom Verfasser reproducirten Formel die Abweichungen des Geoids von einem Niveausphäroid mit Hilfe eines Integrales finden, das aber heute noch nicht brauchbar ist. Gewisse Näherungsformeln für diese Abweichungen werden zum Schlusse als ungenügend erwiesen. Referent hatte bei der Lecture dieses Capitels das Gefühl, dass die Einführung von Zeichen für die verschiedenen anziehenden Körper und ihre Wirkungen, und die Herstellung einer Gleichung zwischen den Wirkungen der theoretischen und wirklichen Erde, an der Spitze der ganzen Untersuchung, die Uebersicht über die Condensationsmethode sehr fördern würde.

Das vierte Capitel führt uns noch mehr in ideelle Verhältnisse. Es werden hier die Wirkungen von Massen untersucht, die auf eine homogene, sehr grosse Kugel aufgesetzt sind. Die Schwere auf dem so entstehenden Körper, die Niveauflächen der Schwere und die Ablenkungen des Lothes werden ermittelt. Die Niveauflächen werden dabei bezogen auf eine, Normalniveau genannte Kugel, deren Centrum der Schwerpunkt des gesammten Körpers ist und deren Volum dem der betreffenden Niveaufläche gleich ist. Als „störende“ Massen, bez Defecte, erscheinen hier eine Kugel, ein sehr langes dreiseitiges liegendes Prisma, dessen mittlerer Theil nur betrachtet wird, ein prismatisches langes Thal, ein halbkugeliger Berg, eine halbkugelige Vertiefung, eine kleine spitze Insel. Wenn das auch nur ideale Formen sind, so erlauben die Resultate doch eine Schätzung der in der Natur vorkommenden Grössen. Man findet auf diese Weise, dass z. B. die Alpen, bei einer Dichte = 2,8, in ihrem mittleren Theile die Niveauflächen um etwa 30 m heben, in ihrer Kammlinie das Secundenpendel um 200 Microns verlängern und auf ihrem Hange eine Lothstörung von vielleicht 30″ bewirken.

Wichtiger noch ist die folgende Untersuchung. Die aufgesetzten Massen sind fünf unseren Continenten entsprechende abgestumpfte Kreiskegel. Jeder hat die Höhe von 1440 + 3400 m und seine Grundfläche ist dem betreffenden Continent flächengleich. Die Dichte wird 2,8 angenommen. Da die ganze Kugel mit einem 3400 m tiefen Meere bedeckt sein soll, so würde jeder Continent um 1440 m aus dem Meere hervorragen, wenn dieses durch die Anziehung der Continentalmassen nicht gestört würde. Zuerst werden für die Wirkung eines Continents die analytischen Formeln abgeleitet (wobei die Lothstörungen an den Küsten besonders zu behandeln sind), dann für jeden einzelnen Continent die Zahlenwerthe berechnet und diese durch ein graphisches Verfahren zu der Gesammtwirkung der fünf Continente zusammengesetzt. Die so gefundenen Höhen der gestörten Meeresfläche über einem Normalniveau sind durch Höhencurven in einer Karte dargestellt. Es ergiebt sich aus ihr, dass die Festländer im Mittel sich um 440 m über die gestörte Meeresfläche erheben (wie es auch bei der Erde der Fall ist) und dass die Niveaufläche

des Meeres sich bis gegen 500 m nach beiden Seiten vom Normalniveau entfernt. Die Lothstörungen können, besonders an den Küsten, bis auf 1—2½ Minuten anwachsen. Wenn man nun die Schwere auf diesem idealen Körper untersucht, so zeigt sich, dass sie auf dem Meere kleiner ist, als auf dem Festlande. Da aber nach den Resultaten des dritten Kapitels es sich gerade umgekehrt zu verhalten scheint, so giebt jene ideale Erde kein Bild der wirklichen. Die einfachste Art, dem Fehler abzuhelfen, besteht in der Annahme, die neuerdings auch sonst gemacht worden ist, dass unter den Continenten die Erdkruste weniger dicht ist, als unter dem Meere. Wenn man diese Voraussetzung macht, so weichen aber die Niveauflächen noch um viel weniger als 500 m vom Normalniveau ab. Man darf hiernach für die Erde als sicher annehmen, dass das Geoid von einem passend bestimmten Niveausphäroid nirgend sich weiter als ein paar hundert Meter entfernt, wodurch die Zulässigkeit der Rechnungen des zweiten Capitels dargethan ist und zugleich die Annahme der Geodäten, das Geoid sei ein Rotationsellipsoid, hinlänglich gerechtfertigt erscheint.

Das folgende, fünfte Capitel liefert eine Reihe von negativen Resultaten. Zuerst wird gezeigt, dass die Aenderungen der Schwere durch die Anziehungen von Sonne und Mond auf die Gestalt der Niveauflächen einen unwesentlichen Einfluss haben. Dann wird die Rotation der Erde um ihren Schwerpunkt betrachtet, zunächst ohne Rücksicht auf die störenden Kräfte, und, mit Zuziehung der beobachteten Werthe der Lunisolarpräcession, gefunden, dass die Momentanaxe um die Axe des grössten Trägheitsmomentes in 10 Monaten einen Kegel von sehr kleiner Oeffnung beschreibt, die aus den Polhöhebeobachtungen in Pulkowa sich zu etwa $\frac{1}{15}''$ ergiebt. Die Berücksichtigung der störenden Wirkungen von Mond und Sonne ändert dieses Resultat ebenso wenig in erheblicher Weise, als eine kleine Ungleichheit der, bis jetzt als gleich angenommenen, äquatorealen Trägheitsmomente. Die Bewegung der Momentanaxe im Erdkörper stört die Gestalt der Niveauflächen zwar etwas, aber nur um wenige Millimeter. Grösseren Einfluss könnten auf die Rotationsbewegung, und infolge dessen auf die Gestalt der Niveauflächen, dagegen Massenbewegungen auf der Erde, z. B. durch meteorologische Processe, ausüben. Ob eine langsame Abnahme der Polhöhen durch die Beobachtungen angezeigt ist, scheint zweifelhaft; sie würde sich — ebenso wie die beobachteten Hebungen und Senkungen des Landes an einzelnen Stellen — durch Aenderung der Eisbedeckung der Circumpolarländer erklären lassen.

Einen schätzenswerthen Beitrag zur Kenntniss der Erdgestalt liefern, wie im sechsten Capitel gezeigt wird, astronomische Beobachtungen. Die Idee zwar, Mondbeobachtungen zur Bestimmung der geocentrischen Coordinaten eines Erdortes zu benutzen, ist praktisch nicht ausführbar, weil die Theorie der Mondbewegung noch zu ungenau ist. Dagegen lassen sich, aus der Intensität der Schwere und der Mondparallaxe, der Aequatorealhalb-

messer der Erde, aus einigen Störungsgliedern der Mondbewegung und aus der Präcession die Hauptträgheitsmomente und die Abplattung (1 : 297,8) berechnen. Die Werthe der Trägheitsmomente ($A = 0{,}3310\, a_0^2 M$, $C = 0{,}3321\, a_0^2 M$; a_0 = Erdradius, M Erdmasse) entsprechen nicht einem homogenen Ellipsoid, sondern verlangen eine Zunahme der Dichte nach Innen. Indem man die Erde als Kugel annimmt und $A = C$ setzt, sowie die Dichte als gerade Function vierten Grades des Abstandes vom Centrum ansetzt, kann man das Gesetz der Dichte aus der Beobachtung finden. Die Rechnung ergiebt für die Dichte im Centrum den Werth 11,6. Eine ähnliche Rechnung wird unter der Annahme durchgeführt, die Masse sei in ellipsoidischen Schichten angeordnet, und sie liefert für die Dichte im Centrum 11,3. In diesem Falle würde die Schwere von der Erdoberfläche bis zur Tiefe von etwa 1200 km wachsen und dann erst abnehmen. Wie man aus einer beobachteten Zunahme die mittlere Dichte berechnen könne und wie sehr diese Rechnung von der Kenntniss der Umgebungen der Beobachtungsorte abhänge, wird am Schluss noch gezeigt.

Das siebente Capitel ist den geometrischen Nivellements gewidmet. Nachdem die strenge Reduction der Messungsergebnisse mit Hilfe von Schweremessung zur Erlangung von Potentialdifferenzen gelehrt ist, wird die wichtige Frage untersucht, wie die Resultate der gewöhnlichen Berechnungsart corrigirt werden müssen, um Unterschiede wahrer Meereshöhen zu geben. Wenn man nur die normale Aenderung der Schwere mit der Breite in Rechnung zieht, findet sich eine einfache Regel zur Berechnung der Correction. Wenn man sie nicht in Rechnung zieht, so kann das Nivellement einer geschlossenen Curve einen „Schlussfehler" zeigen, der z. B. bei einer die Alpen einmal überschreitenden Schleife, die an der Ostsee beginnt und endigt, bis gegen 0,4 m steigen kann.

Um für die Wirkung der unregelmässigen Aenderung der Schwere eine Schätzung zu gewinnen, wird ein synthetischer Weg eingeschlagen, indem die Fehler untersucht werden, die beim Nivelliren der Querschnitte von acht dreiseitigen langen Prismen entstehen. Bei einer Höhe von 2500 m haben vier Prismen eine Breite von 25 km, die vier anderen von 250 km. Die Resultate sind in Tabellen und durch Curven in einer Tafel niedergelegt, welche die Lothablenkung auf dem Hange und auf der Grundfläche, die Krümmung der Lothlinie vom Hang bis zur Grundlinie und den Nivellementsfehler ersehen lassen. Die Kammhöhe kann, wie sich zeigt, bis zu 35 cm fehlerhaft sich ergeben, wogegen der Schlussfehler nur bei dem Profil mit senkrechtem Absturz 3 dcm, bei allen anderen nicht über 1 dcm beträgt, so dass selbst bei Alpennetzen ein erheblicher Schlussfehler aus dieser Ursache unwahrscheinlich ist. Das gleiche Resultat folgt aus der Untersuchung der Wirkungen eines kugelförmigen Hohlraumes. Diese Ueberlegungen beweisen, dass man aus Nivellementsnetzen, mit Berücksichtigung der normalen Schwereänderung allein, wenigstens widerspruchsfrei

Meereshöhen berechnen kann, die zwar nicht fehlerfrei sind, deren Fehler aber (die selbst bei den grössten Alpenhöhen kaum 1 m betragen) sich durch kein Nivellement entdecken lassen. Zum Schlusse des Kapitels wird nachgewiesen, dass mehrere vorher gemachte Vernachlässigungen ohne Einfluss sind, dass höchstens die Anziehungen von Sonne und Mond sich unter besonderen und vermeidbaren Umständen bemerklich machen könnten.

Das achte und letzte Capitel ist der trigonometrischen Höhenmessung gewidmet. Wenn die Refraction nicht wäre, könnte man die gegenseitige Lage von beliebig vielen Erdorten durch Beobachtungen ohne Benutzung einer Hypothese bestimmen. Die Brechung des Lichts in der Luft aber kann nur der Rechnung unterworfen werden, wenn man über die Gestalt der Flächen gleicher Dichte, über die Temperaturabnahme nach oben und über den Gehalt der Luft an Wasserdampf Annahmen macht. In dem vorliegenden Capitel ist gezeigt, wie man dann je nach den verschiedenen Theorien (Laplace, Bauernfeind, Jordan) die Refraction berechnen kann. Leider sind jene Annahmen vielfach der Wirklichkeit nicht entsprechend und deswegen empfiehlt Verfasser, die Messungen von Zenithdistanzen auf Entfernungen von höchstens etwa 20 km zu beschränken. Bei so kurzen Distanzen können auch die auf dem üblichen Wege berechneten Höhenunterschiede sehr nahe als Unterschiede wahrer Meereshöhen betrachtet werden. Immerhin aber erhält man bei der Lecture dieses Capitels nicht den Eindruck, dass in absehbarer Zeit die Refractionstheorie so vervollkommnet werden könnte, dass man sich der Zenithdistanzen zur Bestimmung der Erdgestalt würde bedienen können.

Diese Uebersicht des Inhaltes, bei welcher Referent nur einige Resultate von allgemeinem Interesse hervorgehoben, reicht hin, um die ungemeine Reichhaltigkeit des Buches zu zeigen. Was beim ersten Bande zu rühmen war, eine einfache, durchaus einheitliche Bearbeitung eines umfangreichen Stoffes, ist auch beim vorliegenden Bande hervorzuheben. Eine grosse Zahl historischer und kritischer Noten behandelt die Bestrebungen der Vorgänger, unter welchen besonders Stokes und Bruns zu nennen sind, deren Arbeiten aber viel weniger ins Detail gehen, als die des Verfassers.

Herr Helmert hat sich durch dieses Buch die Anwartschaft auf eine leitende Stelle in der deutschen Geodäsie erworben und wir wünschen und hoffen, dass er in einer solchen bald seine Ideen praktisch ausführen kann.*

J. Lüroth.

Die Geschichte der Physik, in ihren Grundzügen mit synchronistischen Tabellen der Mathematik, der Chemie und beschreibenden Natur-

* Seit Abfassung dieser Anzeige ist der Wunsch durch Helmert's Berufung an die Spitze des geodätischen Institute erfüllt worden

wissenschaften, sowie der allgemeinen Geschichte. Von Dr. Ferd. Rosenberger. Zweiter Teil. Geschichte der Physik in der neueren Zeit. Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 1884. VI, 407 S.

Unser Bericht über den ersten Theil des vorliegenden Werkes ist im 28. Bande dieser Zeitschrift (hist.-lit. Abth., S. 14flgg.) enthalten. Es wurde damals die Anlage als eine geeignete anerkannt, der Styl gelobt, das Bestreben des Verfassers gebilligt, die Geschichte einer einzelnen Wissenschaft nur in stetem Zusammenhange mit der allgemeinen Kulturgeschichte zu behandeln; getadelt musste werden die mangelhafte und häufig ungründliche Ausführung der einzelnen Episoden. Es war zu erwarten, dass diese Nachtheile sich in der Geschichte der neueren Physik minder bemerklich machen würden, als in derjenigen der alten; denn es werden ja, je weiter die Darstellung fortschreitet, die Quellen auch immer leichter zugänglich, die sonstigen literarischen Hilfsmittel zahlreicher. So ist denn diese zweite Abtheilung ein recht lesbares und lesenswerthes Buch geworden, das namentlich in der äusseren Form der Geschichte der Physik von Poggendorff, in welcher freilich wieder eine weit grössere Menge von Thatsachen enthalten ist, vorzuziehen sein dürfte.

Mit Recht wird eine sehr umfängliche Schilderung der Leistungen Galilei's an die Spitze dieses Bandes gestellt, denn durch diese wird der Naturwissenschaft aller Folgezeit der unauslöschliche Stempel aufgedrückt. Daran reiht sich die Lehre vom Magnetismus und von der Elektricität, wie sie in den Schriften William Gilbert's zuerst eine systematische Fassung empfangen hat, und darauf folgt ein Kapitel aus der Geschichte der Optik (Kepler, Erfindungsgeschichte des Fernrohrs u. s. w.). Nachdem sodann, für ein der Astronomie als solcher doch ziemlich fern stehendes Werk sehr ausführlich, Kepler's und Galilei's Ansichten über kosmische Wirkungen und Gesetze besprochen sind, geht der Verfasser zu Bacon über, betreffs dessen es nun einmal zum guten Ton zu gehören scheint, sich mit Liebig's absprechendem Urtheil einverstanden zu erklären, verweilt kurz bei Gellibrand, Mersenne und Kircher, etwas länger bei Torricelli und beschäftigt sich sodann eingehender mit Descartes und Gassendi. Dass der Verfasser den erstgenannten dieser beiden speculativen Physiker nicht nach Verdienst gewürdigt, hat bereits Lasswitz in der „Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht“ hervorgehoben; Herr Rosenberger kennt recht wohl die Ehrenrettung von Kramer (4. Heft der „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“), allein dieselbe passt ihm so wenig zu seiner ungünstigen Meinung, dass er an einem von Cartesius an Snellius begangenen Plagiat nach wie vor festhalten zu müssen glaubt. Die zweite Periode nimmt ihren Anfang mit Guericke und Boyle — einer der besten Abschnitte dieses Bandes —, darauf wird von den Versuchen der florentinischen Akademie, von der Erfindung der Pendeluhren und von der

Verwendung des Secundenpendels zur genaueren Bestimmung der Erdgestalt gehandelt, und damit ist die Einleitung zu der durch den Namen Isaak Newton's gekennzeichneten Epoche gegeben. Aber auch die Meteorologie und die Fortschritte der Experimentirkunst werden nicht vergessen. Die dritte Periode erstreckt sich von 1690 bis 1750; neben der Vervollkommnung der Mechanik beginnt jetzt auch die Theorie der Imponderabilien eine grössere Rolle zu spielen denn vorher, auch der jugendfrisch aufstrebenden Akustik müssen einige Seiten eingeräumt werden, Wellenlehre, physiologische Optik und Hydrodynamik beginnen sich langsam zu entwickeln, und treffliche Lehrbücher der Experimentalphysik, wie diejenigen von Sturm und Musschenbroek, weisen auf das erfolgreiche Ringen der Wissenschaft nach methodischer Gestaltung hin. Die vierte Periode endlich soll bis 1780 reichen. Jedem Schriftsteller bleibt es unbenommen, sich die Grenze für seine Arbeit nach eigenem Ermessen zu wählen, doch können wir persönlich uns nicht davon überzeugen, dass gerade das genannte Jahr irgendwie ausgezeichnet vor anderen Jahren wäre. Natürlich ist es die Elektricität, welche dieser letzten Periode ihre Signatur verleiht. Fügen wir noch hinzu, dass die synchronistischen Tabellen in der That recht geschickt gearbeitet sind und die Aneignung des Memorirstoffs gewiss erheblich zu erleichtern vermögen, sowie dass ein guter Index das Buch beschliesst, so glauben wir von diesem letzteren einen ausreichend erschöpfenden Bericht erstattet zu haben, wenigstens soweit dessen allgemeine Eigenschaften in Frage kommen.

Im Besonderen freilich liessen sich, wie früher, manche begründete Einwände erheben. Die Bemerkung, dass der Verfasser sich zu häufig gänzlich in die Hände der Autoren giebt, aus denen er schöpft, drängt sich auch hier wieder auf. So ist denn doch der akustische Abschnitt (S. 269 bis 283) gar zu wenig selbständig, weil durchaus den betreffenden Bestandtheilen von Whewell's „Geschichte der inductiven Wissenschaften" nachgebildet. Auch mit Mersenne, diesem Centralorgan alles naturwissenschaftlichen Wissens aus der ersten Hälfte des XVII. Jahrhunderts, scheint sich der Verfasser nicht selbst beschäftigt zu haben, da er sich nur auf das beruft, was Montucla und Wilde von Jenem zu melden wissen; so ist denn auch von Mersenne's Werken die anregende und an scharfsinnigen Beobachtungen reiche „Acontismologia" nicht einmal genannt. S. 201 bespricht der Verfasser die bekannte Arbeit von Huygens über Doppelbrechung und fügt hinzu: „Newton kann diese Abhandlung nur flüchtig gelesen haben, denn er giebt in seiner Optik zur Auffindung des aussergewöhnlich gebrochenen Strahles eine falsche Regel, während Huygens schon die richtige hat." Abgesehen davon, dass es immer eine missliche Sache ist, gegen einen Newton den Vorwurf der Flüchtigkeit zu erheben, ist dieser Vorwurf auch inhaltlich unzutreffend, denn wie konnte Newton die Ellipsoidconstruction des Huygens billigen, welche mit der vom

Ersteren nun einmal nicht anerkannten Vibrationstheorie steht und fällt? Endlich sind gewisse Untersuchungsgebiete mit Stillschweigen übergangen, die für die Beurtheilung der Physik des XVII. und XVIII. Jahrhunderts von höchster Bedeutung sind. Von der Atomistik wird stets nur gelegentlich, niemals im Zusammenhang, gehandelt, die mit den Molekularhypothesen in engster Verbindung stehende Theorie des leuchtenden Barometers, ein ganz ungemein belehrendes Capitel, wird nur gelegentlich gestreift, und, was wir am wenigsten verstehen, die meteorologische Bedeutung der Himmelskörper, über welche in dem genannten Zeitraum eine wahre Fluth von Schriften erschien, findet gar keine Erwähnung. Allerdings machen es die Vorlagen, an welche sich die Darstellung des Verfassers in der Hauptsache anlehnte, nicht anders, allein darum hätte eben in solchen Punkten über das Vorhandene hinausgegangen werden sollen.

Diese Ausstellungen sollen an dem oben gefällten Gesammturtheil nichts mehr ändern. Sie sollen nur zur Begründung unseres Ausspruchs dienen, dass die Herstellung einer wirklichen, pragmatischen Geschichte der Physik, so wie wir sie uns denken, nur auf Grund ausgedehnterer Vorarbeiten zu ermöglichen ist. Als Etappe auf dem Wege zur Erreichung dieses Zieles wollen wir uns Rosenberger's Buch gerne gefallen lassen.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit von August Heller, Professor in Budapest. Zweiter Band. Von Descartes bis Robert Mayer. Stuttgart. Verlag von Ferdinand Enke. 1884. XV, 754 S.

Eine Geschichte nicht sowohl der Physik, als vielmehr der Physiker — so hatten wir bei unserer Anzeige des ersten Bandes diesen zu charakterisiren, und ebenso erscheint auch der zweite. Nimmt man diese Einrichtung des Buches, auch ohne sich mit ihr einverstanden zu erklären, als etwas Gegebenes hin, so wird man nicht umhin können, den grossen und achtungswerthen Fleiss anzuerkennen, welchen der Verfasser seiner Aufgabe gewidmet hat. Referent glaubt sich zu der Behauptung berechtigt, dass kein Physiker, von dem irgend originelle Leistungen bekannt sind, in dem Verzeichniss fehlt, und zahlreiche Stichproben haben ihm auch die Ueberzeugung verschafft, dass die biographischen Abrisse treu und die literarischen Angaben zuverlässig sind, obschon — vergl. weiter unten — nicht selten noch Zusätze angebracht werden könnten. Im Gegensatz zu Rosenberger führt Herr Heller die Darstellung bis in die allerneueste Zeit herein fort, indem er sich dabei eine wohl anzuerkennende Unparteilichkeit zu wahren sucht. So stellt er die grossen Verdienste Robert Mayer's um die Ausbildung der Wärmemechanik zwar in helles Licht, aber er verfällt nicht in die durch den Vorgang Dühring's neuerdings herrschend gewordene Manie

der Uebertreibung, sondern hat den Muth, für den vielgeschmähten Poggendorff einzutreten und es auszusprechen, dass es nicht so leicht gewesen sei, hinter dem von Jenem zurückgewiesenen Aufsätzchen „Ueber quantitative und qualitative Bestimmung der Kräfte" das Genie des Autors zu verspüren. Man merkt es Heller's Erzählung, obgleich dieselbe an Gewandtheit der Form hinter derjenigen Rosenberger's um ein Merkliches zurücksteht, allenthalben an, dass ihr eine genauere Kenntniss der abgehandelten Dinge zu Grunde liegt, und diese Ueberzeugung söhnt auch mit jenem Hauptfehler des Buches aus, der darin besteht, eine Fülle von Sachen mit in den Text zu verweben, die an sich ganz wissenswürdig sind, aber mit dem eigentlichen Gegenstand so gut wie gar nichts zu thun haben.

Wie lässt es sich z. B. rechtfertigen, dass Otto v. Guericke's wegen volle 2½ Seiten durch Schilderungen aus der Magdeburger Belagerungsgeschichte angefüllt sind, wie ferner, dass die blosse Lebensgeschichte des Cartesius gar 10 Seiten beanspruchen darf? Dadurch wird denn doch eine unzulässige Breite herbeigeführt. Dass der Verfasser die Astronomie, auch die blos beobachtende und theoretische, für nahezu gleichberechtigt mit der eigentlichen Physik hält, haben wir schon früher gesehen, und so begegnen wir denn auch hier Männern, wie Dörfel, Kirch, Hevel, die sich wohl selbst darüber wundern würden, weshalb sie an diesem Orte figuriren; bei dem Erstgenannten ist sogar gerade jene Leistung nicht aufgeführt, welche ihm wenigstens in der Geschichte der Geophysik eine Stelle sichert, nämlich seine Berechnung einer Meteorbahn (vergl. die interessante Biographie von C. Reinhardt). Ganz ähnlich verhält sich's mit Spinoza. Dass die geistvollen Schriften dieses tiefen Denkers irgend eine Rückwirkung auf den Fortgang unserer Naturerkenntniss gehabt hätten, dafür fehlt jeder Anhalt, allein eine physikalische, hier nicht erwähnte Abhandlung hat er allerdings geschrieben, nämlich eine „Steelkonstige Reeckening van den Regenboog". — Kleinigkeiten herauszusuchen, um daran zu mäkeln, kann nicht unsere Sache sein, denn dass bei einer solchen Fülle von Einzelangaben Manches der Berichtigung bedarf, versteht sich ja von selbst. Nur um dem Verfasser einen Beweis des Interesses zu geben, mit welchem wir sein Werk lasen, schalten wir hier zwei Bemerkungen ein, zu welchen uns S. 243 den Anlass bietet. Von Thévenot wäre doch etwas mehr zu sagen, als hier zu finden ist, denn er ist nach R. Wolf der Erfinder eines der wichtigsten unter allen auf physikalischen Grundsätzen basirten Messwerkzeugen, der Wasserwaage, und der Geologe Steno hiess von Hause aus nicht Steen, sondern Stensen, wie die unlängst über ihn von Plenckers veröffentlichte Monographie darthut.

Heller's nunmehr zum Abschlusse gelangtes Werk kann mit noch grösserem Rechte als dasjenige, von dem wir vorhin sprachen, als eine wichtige und unumgängliche Vorarbeit zu einer dereinstigen Geschichte der

Naturlehre im wahren Sinne des Wortes bezeichnet werden. An Kenntniss und an Beherrschung des Materials fehlt es diesmal nicht, nur die methodologische Auffassung, mit welcher der Verfasser an seine Arbeit herantrat, ist in unseren Augen eine vollkommen unrichtige. Wir wünschten, dass in einer zu erhoffenden zweiten Auflage ein Versuch zur Abstellung dieses Grundfehlers gemacht würde; leicht ist nicht, was wir verlangen, aber möglich ist es. — Ausstattung und Correctheit des Druckes sind hier, wie auch bei der zuerst recensirten Schrift, durchaus lobenswürdig.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Die Geschichte des Fernrohrs bis auf die neueste Zeit. Von Dr. H. Servus. Mit acht in den Text gedruckten Abbildungen. Berlin. Verlag von Julius Springer. 1886. VII, 135 S.

Für eine quellenmässige Geschichte des Fernrohrs sind 8½ Bogen sehr weiten Druckes in Klein-Octav etwas wenig, und in der That ist die Darstellung auch keine vollständige. Wir wollen das, was fehlt, weiter unten in Kürze zusammenfassen, gleichzeitig aber jetzt schon bereitwillig das Zugeständniss machen, dass einige Hauptpunkte eine genügend ausführliche und durchaus einwurfsfreie Erledigung gefunden haben. Der Verfasser entscheidet sich auf Grund der Actenstücke, welche uns über die allfallsigen Ansprüche der Niederländer Jansen, Metius und Laprey unterrichten, dafür, dass für die Priorität des letzteren die grössere Wahrscheinlichkeit spreche; er schildert zutreffend die Verdienste von Galilei, Kepler und Descartes, welch' Letzteren er gegen die allerdings oft recht leichtfertigen Vorwürfe seiner und einer späteren Zeit in Schutz nimmt, er giebt endlich eine ausführliche und, soweit wir zu prüfen in der Lage waren, durchaus zutreffende Geschichte der Entdeckung des Achromatismus, die er bis auf die neuesten Arbeiten von W. Schmidt, Hansen, Scheibner, Vogel fortführt. Die Spiegelteleskope behandelt er weit kürzer, doch wird auch in dem von ihnen handelnden Abschnitte nichts eigentlich Wichtiges vermisst.

Dem gegenüber ist hervorzuheben, dass der Verfasser die Vorgeschichte des Fernrohrs mit einigen aus Poggendorff entnommenen Angaben abmacht, ohne sich irgend mit den hochinteressanten Fragen zu beschäftigen, zu deren Stellung jene Anlass gegeben hat. Stellte doch schon Lessing hierüber eine seiner geistreichen, durch kritischen Geist ausgezeichneten Untersuchungen an. Henri Martins' Abhandlung „Sur des instruments d'optique faussement attribués aux anciens par quelques savants modernes“ mag in Deutschland allerdings nicht sehr bekannt geworden sein, allein dafür hat R. Wolf im 9. Jahrgang der „Vierteljahrsschr. d. astron. Gesellschaft“ einen genügend eingehenden Bericht über dieselbe abgestattet. Der Verfasser bemerkt ferner, dass die Astronomen des Mittelalters sich offener

und nur zur Abhaltung des diffusen Lichtes bestimmter Tuben zum Beobachten der Gestirne bedient hätten; das ist wahr, und den vom Verfasser angeführten Beispielen lässt sich nach Zimmermann noch ein weiteres, anscheinend sehr merkwürdiges aus einem St. Gallener Codex zur Seite stellen, allein hier wäre der Ort gewesen, zu erörtern, welchen Zweck die Verwendung eines gläserlosen Tubus wohl haben konnte. Es ist nicht ganz leicht, sich einen solchen zu denken. Bezüglich des Binocularteleskops finden wir nur die an sich richtige Bemerkung, Rheita habe es nicht zuerst erfunden. Gerade über diesen Gegenstand hat uns die Neuzeit manch' interessante Forschung gebracht, so von Govi und Favaro; zumal des Letzgenannten Schrift „Sulla invenzione dei cannochiali binoculari“ (Turin 1881) hätte nicht ausser Acht gelassen werden dürfen. — Schliesslich müssen wir es tadeln, dass den Eigennamen, resp. ihrer Rechtschreibung, zu wenig Beachtung geschenkt ist (Huyghens statt Huygens, Hook statt Hooke, Barron statt Barrow, Vitellion statt Witelo, Schleiner statt Scheiner u. a. m.).

Aller dieser Ausstellungen unerachtet hoffen wir den Verfasser noch häufig auf dem mit dieser Monographie betretenen Wege zu begegnen. Denn in der Hauptsache hat er nicht blos Lust und Liebe, sondern auch Talent für die Arbeit auf seinem noch immer zu wenig bebauten Gebiete bethätigt.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Tychonis Brahe Triangulorum planorum et sphaericorum praxis arithmetica, qua maximus eorum, praesertim in astronomicis usus compendiose explicatur. Nunc primum edidit Dr. F. J. Studnička, C. R. Prof. Math. Publ. Ord. Universitatis litterarum Bohem. etc. etc. Pragae 1885.

Dass die Prager Universität ein merkwürdiges Manuscript aus Tycho's Feder bewahre, war seit einiger Zeit bekannt; einige Mittheilungen darüber hatte R. Wolf im 15. Jahrgang der Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft gegeben. Nunmehr hat Professor Studnička diese Tychonische Trigonometrie, welche ihr Autor als eine Ergänzung zum „Canon doctrinae Triangulorum“ des Rheticus aufgefasst zu haben scheint, in trefflicher photographischer Nachbildung herausgegeben. Die ebene Trigonometrie enthält sieben, die sphärische neun „Dogmata“; aus beiden zusammen ersieht man recht deutlich, über welche Hilfsmittel rechnerischer Art ein Astronom zu Ende des XVI. Jahrhunderts, also ungefähr 30 Jahre vor dem Bekanntwerden der Logarithmen, verfügte. Tycho bedient sich nicht der jetzt üblichen Fassung, man solle aus gegebenen Stücken des Dreiecks die übrigen berechnen, sondern bedient sich, wie 350 Jahre früher Jordanus Nemorarius in seinem Buche „De numeris datis“, der Ausdrucksweise: Wenn die und die Stücke bekannt sind, so sind auch die noch fehlenden

bekannt, und zwar vermöge der folgenden Sätze. Die Beweise fehlen theilweise ganz, theilweise beschränken sie sich auf eine den Beweisgang darlegende Figur. In einem Falle war der Verfasser mit der Zeichnung nicht zufrieden und strich sie aus, ohne eine andere an ihre Stelle zu setzen. Für die Geschichte der Terminologie fällt der immerhin beachtenswerthe Umstand ab, dass Brahe die Ausdrücke Hypotenuse und Katheten nicht kennt, sondern sich mit den Umschreibungen „*latus recto subtensum*“ und „*latera circa rectum*“ behilft.

Die Aufgaben für das rechtwinklige Dreieck werden in drei Sätzen in der bekannten Weise erledigt. Beim schiefwinkligen Dreieck wird natürlich so verfahren, dass möglichst wenig Multiplicationen und Divisionen sich als nöthig erweisen, und die Art der Auflösung ist deshalb häufig eine von der modernen ziemlich abweichende. Zum Beweise hierfür sei die Stellung und Behandlung der Aufgabe hier mitgetheilt, aus b, c und α ($b > c$, $\alpha > 90^0$) den Winkel β zu finden. „*At si angulus obtusus fuerit, duc sinum complementi obtusi in majus latus, et divide per totum, exit inventum I. Deinde duc sinum obtusi in majus latus, et divide per totum; exit inventum II. Postea adde I. inventum dato minori lateri, et habebis inventum III. Jam duc inventum II. in totum, et divide per inventum III. exit numeris Anguli, qui adjacet lateri minori, in Tabula foecunda inquirendi.*“ Schreiben wir diese Anweisung entsprechend um, indem wir zugleich mit r den Sinus totus bezeichnen, so sieht das Rechnungsschema so aus (die Sinus sind hier nicht als Verhältnisszahlen, sondern als Strecken zu nehmen):

$$\frac{b \sin(\alpha - 90^0)}{r} = \mathrm{I}, \quad \frac{b \sin\alpha}{r} = \mathrm{II}, \quad \frac{\mathrm{I} + c}{\mathrm{II}} = \mathrm{III} = \text{der in der „Tab. foec.“ aufzusuchenden Zahl.}$$

Diese Tafel, die ihren Namen schon durch Regiomontan erhalten hat, ist aber keine andere, als eine solche der Tangenten und Cotangenten, und wirklich ist

$$\frac{\operatorname{cotang}\beta}{r} = \frac{b \sin(\alpha - 90^0) + c r}{b \sin\alpha} = \frac{c + b \cos(180^0 - \alpha)}{b \sin(180^0 - \alpha)} \quad (\text{für } r = 1).$$

Die Berechnung der Winkel aus den Seiten erfolgt im Wesentlichen noch ganz nach dem Gedankengang des Ptolemaeischen Almagests, in welchem diese Aufgabe — bei Bestimmung der Verfinsterungsgrösse einer partiellen Sonnenfinsterniss — uns zuerst begegnet. Die Raumtrigonometrie trägt dagegen völlig den Stempel Regiomontan'scher Geistesarbeit, wie denn erst durch L. Euler dieser Disciplin die Gestalt verliehen wurde, welche uns heute als die einzig natürliche erscheint.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Autolyci de sphaera quae movetur liber de ortibus et occasibus libri duo una cum scholiis antiquis e libris manuscriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit FRIDERICUS HULTSCH. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri. 1885. LXIV, 231 S.

Seit Josef Auria 1587 die Schriften des Autolykus erstmalig aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt herausgab, sind fast drei Jahrhunderte verflossen. Man kann nicht sagen, dass diese Jahrhunderte die genannten, für sie neuerdings vorhandenen Werke in richtiger Weise ausgebeutet hätten. Man wusste, dass es einen astronomisch-geometrischen Schriftsteller Autolykus von Pitane gegeben habe, dass dessen Lebenszeit kurz vor der des Euklid lag, aber über den Inhalt seiner Leistungen war man auf's Nothdürftigste, wenn überhaupt, unterrichtet. Die Auria-sche Ausgabe gehörte eben selbst zu den buchhändlerischen Seltenheiten, und da Autolykus nur von wenigen griechischen Schriftstellern genannt wird, vorzugsweise von Pappus, der auch wieder vor der Hultsch'schen Ausgabe (1876—78) häufiger erwähnt als studirt wurde, so versäumten die Geschichtsschreiber alter Geometrie, sich nach Autolykus genauer umzuschauen. Auch als Herr Rich. Hoche 1877 den griechischen Wortlaut der Lehrsätze des Autolykus in einem Programm des Hamburger Johanneums zum Abdruck brachte, veränderte sich die Sachlage nur unwesentlich. Trotz allen Gewichtes, welches die gelehrten Gymnasien, von den Einen dafür geschmält, von den Anderen gelobt, auf die Pflege der griechischen Sprache legen, bedarf es doch meistens mit Erläuterungen und womöglich mit Uebersetzungen versehener Ausgaben griechischer Mathematiker, damit sie von modernen Fachgenossen in Deutschland berücksichtigt werden können, und in anderen Ländern als Deutschland liegen die Verhältnisse wohl wenig anders. Herr Hultsch hat uns nun mit einer solchen Ausgabe beschenkt, und dass dieselbe auch weitestgehende Ansprüche befriedigt, braucht kaum besonders gesagt zu werden. Der Hultsch'sche Pappus steht fest in der allgemeinsten Anerkennung; der Hultsch'sche Autolykus ist dessen ebenbürtiges Seitenstück. Ohne diesem Lobe Worte beifügen zu wollen, die es doch nicht erhöhen könnten, wenden wir uns zu den Schriften des Autolykus selbst.

Zurückführung verhältnissmässig späten Wissens auf frühere Zeiten, diese Worte kennzeichnen das Bestreben und das Ergebniss der Geschichte unserer Wissenschaft, wie sie allmälig in den letzten fünfzig Jahren sich entwickelt hat. Es kann hier unsere Aufgabe nicht sein, diese Behauptung im Einzelnen und an jedem Capitel der Mathematik zu rechtfertigen. Nur der Kugellehre oder Sphärik haben wir zu gedenken. Die längste Zeit galt es für unanfechtbar, dass Theodosius von Tripolis, muthmasslich dem I. vorchristlichen Jahrhundert angehörig, der Erste war, der ein Werk über diesen Gegenstand schrieb. Ein Gymnasialprogramm von A. Nokk (1847) bewies zu grossem Erstaunen der Wenigen, die zufällig die Abhandlung in

die Hand bekamen, dass die Euklidischen Phänomena bereits eine entwickelte Sphärik ganz ähnlich der des Theodosius voraussetzen, und Herr Heiberg vervollständigte den Beweis in seinen Euklidstudien und half ihm zu allgemeiner Bekanntschaft. Mit den Schriften des Autolykus in der Hand fordert heute Herr Hultsch ein noch älteres Ursprungszeugniss für die griechische Sphärik, und Herr Paul Tannery wagt die Vermuthung (Note zu S. XII der Hultsch'schen Vorrede zu Autolykus), Eudoxus als Verfasser einer ältesten, aber von der jüngsten des Theodosius kaum verschiedenen Sphärik zu nennen! Wir wollen diese letzte Vermuthung (ohne sie geradezu abzuweisen, denn einem Astronomen wie Eudoxus, der mit der Bewegung von mannigfachen Sphären sich beschäftigte, konnten leicht Sätze aus der Kugellehre eines Beweises bedürftig und fähig erscheinen) auf sich beruhen lassen. Dass aber Autolykus eine schon entwickelte Kugellehre voraussetzt, ist unzweifelhaft. Insbesondere die Schrift *Περὶ κινουμένης σφαίρας* zeigt sichere und wiederholte Spuren der Sätze, die bei Theodosius als I, 1, 6, 7, 8, 12, 15, 20; II, 2, 5, 10, 13, 20; III, 1 erscheinen, die also jedenfalls um 320 a. C. bereits vorhanden waren. Man wusste mithin damals: dass jede Ebene die Kugel in einem Kreise schneidet; dass die Ebenen der Grösstenkreise durch den Kugelmittelpunkt gehen; dass die Verbindungsgerade des Kugelmittelpunktes mit dem Mittelpunkte eines Kreises der Kugel auf der Ebene dieses Kreises senkrecht steht; dass eben diese Verbindungsgerade nach beiden Seiten verlängert in den Polen des Kreises endigt; dass einander gegenseitig halbirende Kugelkreise Grösstekreise sein müssen; dass ein die Pole eines Kugelkreises enthaltender Grössterkreis jenen Kreis halbirt; dass Kugelkreise mit einerlei Polen einander parallel sind; dass die Pole zweier einander berührender Kugelkreise nebst dem Berührungspunkte auf einem und demselben Grösstenkreise liegen; man war im Stande, durch zwei gegebene Punkte auf der Kugeloberfläche einen Grösstenkreis zu legen. Man kannte endlich drei ziemlich viel umständlichere Sätze, deren Wortlaut wir im Wesentlichen nach der Nizze'schen Uebersetzung der Sphärik des Theodosius (Stralsund 1826) folgen lassen: Wenn sich auf einer Kugel Parallelkreise befinden und Grösstenkreise beschrieben sind, die den einen Parallelkreis berühren, die anderen aber schneiden, so sind die Bogen der Parallelkreise einander ähnlich, welche zwischen den nicht zusammentreffenden Halbkreisen der Grösstenkreise liegen. Wenn ein Grössterkreis der Kugel irgend welche Parallelkreise derselben nicht durch die Pole schneidet, so werden unter den abgetrennten Bogen in der einen Halbkugel die dem sichtbaren Pole näheren grösser als ähnlich den entfernteren sein. Wenn durch einen Kugelkreis eine gerade, denselben ungleich theilende Linie geführt und darüber senkrecht ein Kreisabschnitt, nicht grösser als ein Halbkreis errichtet, auch der Bogen des errichteten Abschnittes ungleich getheilt worden ist, so ist die Sehne des kleineren Bogens die

kleinste unter allen geraden Linien, die von jenem Theilungspunkte bis an den grösseren Bogen des ursprünglichen Kreises reichen. Erwägt man, dass alle diese Sätze nicht ohne Weiteres jeder aus dem vorhergehenden folgen, so erhellt um so deutlicher die Wahrheit der Behauptung, dass dem Zeitalter des Autolykus, der sie in bunter Folge benutzte, in der That eine sehr ausgebildete Sphärik vorangegangen sein muss, und damit ist die Bedeutsamkeit der neuen Veröffentlichung wohl auch solchen unserer Leser klargelegt, welche historischen Untersuchungen im Allgemeinen ferner stehen.

CANTOR.

Der Liber trium fratrum de geometria nach der Lesart des Codex Basileensis F. II, 33, mit Einleitung und Commentar herausgegeben von MAXIMILIAN CURTZE M. A. N., Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Thorn. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Separatabzug aus den Nova Acta der Kais. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Band XLIX Nr. 2 (S. 109—167 des Bandes). Halle 1885. Druck von E. Blochmann & Sohn in Dresden. Für die Akademie in Commission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.

Das erhöhte Interesse, welches unsere Zeit der geschichtlichen Entwickelung der mathematischen Wissenschaften entgegenbringt, macht sich nicht blos in der Geschichte selbst gewidmeten Schriften bemerklich, sondern auch in der Nutzbarmachung alter Quellen für den allgemeinen Gebrauch. Bald wagen sich bekannte Verlagsbuchhandlungen an die selbstständige Herausgabe älterer und ganz alter Mathematiker, bald sind es akademische Veröffentlichungen und Zeitschriften, welche die neue Bekanntschaft der in Vergessenheit gerathenen Leistungen früher Jahrhunderte vermitteln. Wir haben es heute mit einem Drucke der zweiten Gattung zu thun. Die Leopoldinisch-Carolinische Akademie hat dem Buche der drei Brüder einen Platz in dem neuesten Bande ihrer Abhandlungen eingeräumt, und wir können ihr nur dankbar dafür sein. Grösseren Dank freilich hat sich Herr Maximilian Curtze erworben, der den Abdruck leitete und durch die vorausgeschickte Einleitung, durch Reinigung des Textes, durch am Schlusse beigefügte Erläuterungen das Verständniss theils erleichterte, theils erst ermöglichte. Wir denken dabei insbesondere an den zweiten Beweis der Heronischen Dreiecksformel (S. 133—135 als VII^b bezeichnet), den Herr Kinkelin noch als unrettbar verderbt betrachtete und den Herr Curtze, allerdings unter der Annahme, es seien wiederholt verschiedene Wörter ausgefallen, wieder hergestellt hat. Dass in dem Buche der drei Brüder ein Beweis der Heronischen Dreiecksformel sich finde, war so ziemlich das Einzige, was man von jenem Buche wusste, und konnte, wie jetzt der Augenschein zu bestätigen erlaubt, unmöglich zu einer auch nur annähernd richtigen Werthschätzung desselben führen. Heute erkennen

wir den wahrhaft geometrischen Geist, der drei Söhnen des Mûsâ ibn Shâkir innewohnte. Wohl waren sie gleich allen arabischen Geometern Schüler der Griechen, aber sie waren es doch in verhältnissmässig selbständiger Weise. Sie schrieben, wie es scheint, nicht einfach die griechischen Vorlagen ab, sie wussten neben dem, dass sie Sätze verschiedenen Ursprunges zu einem neuen Ganzen vereinigten und dadurch eine gewisse Gestaltungsfähigkeit an den Tag legten, auch in der Beweisführung sich einigermassen freier zu bewegen. Wenigstens nehmen sie Manches ausdrücklich für sich in Anspruch, und wir sind sehr geneigt, diesen Anspruch zum Mindesten für ihre Methode der Kubikwurzelausziehung als berechtigt anzuerkennen, darin mit unserem gelehrten Freunde Herrn Curtze durchaus übereinstimmend. Diese Methode verlangt, um $\sqrt[3]{A}$ zu finden, deren Verwandlung in $\frac{1}{60^m}\sqrt[3]{A.60^{3m}}$, so dass Sexagesimalbrüche m^{ten} Grades als Wurzeln erscheinen. Herr Curtze hat gewiss Recht, wenn er dieser Methode eine nicht zu unterschätzende geschichtliche Bedeutung beilegt. Wirft sie doch ein Licht auch auf die Näherungsmethoden der Quadratwurzelausziehung und giebt manchen seitherigen Wiederherstellungsversuchen derselben eine bedeutsame Stütze.

Cantor.

Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero e di altri celebri astronomi e matematici dei Secoli XVI e XVII con Giovanni Antonio Magini tratto dall' Archivio Malvezzi de' Medici in Bologna pubblicato ed illustrato da Antonio Favaro. Bologna 1886, Nicola Zanichelli. XV, 522 pag.

Giovanni Antonio Magini wurde am 14. Juni 1555 Nachmittag um 6 Uhr 57 Min. in Padua geboren. Sein Tod erfolgte in Bologna am 11. Februar 1617.

Die genaue Geburtsangabe, welche uns überliefert ist, zeigt auf's Deutlichste, dass Magini's Eltern so wenig als er selbst der Sitte und den Anschauungen ihrer Zeit sich entziehen konnten. Wenn unser Jahrhundert die Geburt eines Kindes, man möchte sagen, mit Zirkel, Maassstab und Waage erwartet, so erwartete das XVI. und zum Theil noch das XVII. Jahrhundert das gleiche Ereigniss die Uhr in der Hand. Statt nach Grösse und Gewicht des Neugeborenen, fragte man nach dem genauen Stand der Gestirne, unter deren Einfluss er sein Leben durch zu stehen hatte, und man hielt diese judiciäre Astrologie für exacte Forschung, gleichwie eine später auch für exact gehaltene Forschung Witterungsänderungen auf Monate, wenn nicht auf Jahre vorherzuverkündigen, künftige Erdbeben zu berechnen, Weltkatastrophen anzusagen liebte und für Wissenschaft gab, gleichwie die Jetztzeit ohne alle Zweifel Mancherlei exact erforscht und Erfahrungsschlüsse

darauf baut, welche eine Zukunft in die Rumpelkammer des Irrthums werfen wird. Die Geschichte aller Wissenschaften warnt uns, nicht gar zu stolz auf unsere Altvorderen herabzusehen. Sofern ihr Streben ein wissenschaftliches war, und wissenschaftlich auch ihre Methode, dürfen wir wenig Gewicht auf das Richtige oder Nichtige in ihren Lehren legen. Sie halfen auch an dem Bau unseres Wissens mit, sie brachten Steine zu demselben, mögen sie sie zunächt immerhin erst in ungeordneten Haufen aufgeschichtet haben. Zu den wissenschaftlich arbeitenden Astrologen in diesem Sinne gehörte unbedingt Magini. Er gehörte sogar einer Gattung an, welche zu jener Zeit weit seltener war, als in unseren Tagen: er war vorzugsweise Rechner, nicht Beobachter. Ist es doch bekannt, dass Magini zu Denen gehörte, welche die Galileische Entdeckung der Jupitermonde leugneten, welche an die Offenbarungen des Fernrohrs nicht glaubten. Und andererseits fanden die von Magini hergestellten Ephemeriden bei einem Tycho Brahe und einem Kepler verdiente Anerkennung. Wollen wir sie ihnen nachträglich versagen, weil ihr Verfasser sie zu astrologischen Zwecken berechnete?

Ist uns der Astrolog Magini demnach eine Persönlichkeit, deren die Astronomie mit Achtung gedenkt, so kann uns auch seine Stellung auf Seiten der Gegner des Kopernikanischen Systems nicht irre machen. War er als Astrologe ein Gleichdenker mit Kopernikus selbst, mit Kepler, mit Galilei, so fand er sich in seinen astronomischen Theorien Schulter an Schulter mit Tycho Brahe und nicht Wenigen unter den damaligen Gelehrten. Die Galileischen Dialoge über die beiden Weltsysteme waren noch nicht geschrieben, Kepler hatte seine Gesetze noch nicht entdeckt, Newton, der die Lehre von der allgemeinen Anziehung auf die letzteren gründen sollte, war noch nicht geboren. Damals schon Kopernikaner zu sein, dazu gehörte ein der Bewunderung würdiges wissenschaftliches Vorgefühl, ohne dass die entgegengesetzte Meinung die Fähigkeiten Dessen, wer ihr anhing, in Abrede stellen liesse.

Auf Abwegen begegnen wir Magini allerdings, aber in einer Richtung, die mit heutiger Wissenschaft gar Nichts gemein hat. Die Vorbedeutungslehre fesselte ihn, auch wo sie statt der Gestirne die Linien in der Hand und dergleichen beobachtete, und diesen Magini preiszugeben, nehmen wir natürlich nicht Anstand.

Eine eigentliche mathematische Bedeutung hat Magini, trotzdem er die mathematische Professur in Bologna inne hatte, nicht besessen; nur die sphärische Trigonometrie verdankt ihm einige Formeln.

Von bahnbrechender Wichtigkeit sind dagegen seine kartographischen Leistungen. Er hat für Italien das überboten, was die grossen niederländischen Kartenzeichner für ihre Heimath geleistet haben, und die Geschichte der Geographie wird mit Recht betrauern, dass das grossartig angelegte Werk nicht ganz, wie es geplant, zur Vollendung kam.

Diese wenigen Züge, welche wir dem meisterhaften Lebens- und Charakterbilde entnehmen, das Herr Favaro von seinem Helden zu entwerfen wusste, mögen genügen, um zu zeigen, dass Magini in der That eine Persönlichkeit ist, mit welcher es sich lohnte, genauer bekannt zu werden. Da nun überdies Herr Favaro in Besitz eines ganzen ungedruckten Briefwechsels eben dieses Gelehrten mit geschichtlich denkwürdigen Personen der verschiedensten Lebensstellung und Herkunft gelangte, so war es gewiss verdienstlich von ihm, die Briefe herauszugeben. Doppelt verdienstlich aber müssen wir die Art der Herausgabe nennen. Von den vielen Fragen, die dem Leser unwillkürlich auf die Lippen treten, bleibt kaum eine unbeantwortet. Ueberall und immer geben entweder besondere, reichhaltige Anmerkungen oder die 184 S. starke einleitende Abhandlung die gewünschte Auskunft.

Wir wiederholen es daher, Herr Favaro hat sich durch diese neue Arbeit seiner rastlosen Feder wirkliche Verdienste erworben, und wer die Zeit um das Jahr 1600 studiren will, wird nicht umhin können, auch dieses Werk einer gründlichen Durchsicht zu unterziehen.

CANTOR.

Kurzgefasste Geschichte der Arithmetik und Algebra. Eine Ergänzung zu jedem Lehrbuche der Arithmetik und Algebra von RICHARD KLIMPERT, Seminarlehrer in Bremen. Mit fünf in den Text eingedruckten Figuren. Hannover 1885, Verlag von Carl Meyer (Gustav Prior). 70 S.

Der Verfasser findet die bis jetzt erschienenen Geschichten der Mathematik zu gelehrt für den Leserkreis, an welchen er sich wendet. Er will also deren Ergebnisse popularisiren, und er bedient sich, wie es scheint, dazu folgender von ihm „zu Hilfe genommener" oder „theilweise benutzter" Werke: Die mathem. Beiträge z. Culturl. des Referenten, daneben Kästner, Poppe, Hankel, Suter, Geschichte der Mathematik, Klügel's Wörterbuch und Schmid's Encyklopädie des gesammten Erziehungs- und Unterrichtswesens. Ob Herr Klimpert alle diese Schriften als gleichwerthig betrachtet oder die einen für glaubwürdiger und zuverlässiger hält, als die anderen, darüber vermissen wir jede Auskunft. Bis zu den Quellen selbst scheint der Verfasser nirgend aufgestiegen zu sein, so dass es für ihn wirklich recht schwer war, sich ein Urtheil über die von ihm gelesenen geschichtlichen Werke zu bilden, dieselben also mit der nöthigen Auswahl zu benutzen. Das merkt man dem kleinen, gewiss sehr gut gemeinten Schriftchen auch aller Orten an. Referent bedauert, dass Herr Klimpert sich nur seines Buches von 1863 bediente, ohne von seinen späteren, vielleicht etwas reiferen Arbeiten auf dem gleichen Gebiete Notiz zu nehmen. Er hätte sich durch deren Benutzung vielleicht manche Irrthümer ersparen können.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 31. Juli 1886.

Periodische Schriften.

Physikalische Abhandlungen d. königl. preuss. Akademie d. W. aus dem J. 1885. 2 Abthlgn. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Mathematische und naturwissensch. Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der Berliner Akademie. Jahrg. 1886 (12 Hefte). 1. Heft. Berlin, G. Reimer. compl. 3 Mk.

Mémoires de l'Académie impér. des siences de St. Petersburg. 7. série, tome 34, No. 2 u. 3. Leipzig, Voss. 2 Mk. 20 Pf.

Beobachtungen der meteorol. Stationen im Königreiche Bayern. Herausgegeben von C. Lang und F. Erk. VIII. Jahrgang. 1886, 1. Heft. München, Ackermann. compl. 18 Mk.

Nautisches Jahrbuch f. d. Jahr 1889. Herausgeg. von Tietjen. Berlin, Heymann. 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Ohrtmann, fortgesetzt von Henoch u. Lampe. 15. Jahrg. 1883. Heft 3. Berlin, G. Reimer. 7 Mk.

Journal für reine und angewandte Mathematik (begr. von Crelle), herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass. 100. Bd., 1. Heft. Berlin, G. Reimer. compl. 12 Mk.

Acta mathematica, herausgeg. von Mittag-Leffler. VIII. Bd., 1. Heft. Berlin, Mayer & Müller. compl. 12 Mk.

Archiv der Mathematik, begründet von Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. II. Reihe, 4. Theil (4 Hefte). 1. Heft. Leipzig, Koch. compl. 10 Mk. 50 Pf.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, redig. von J. Fröhlich. 3. Bd. (Juni 1884 bis Juni 1885). Berlin, Friedländer & Sohn. 6 Mk.

Reine Mathematik.

LEGENDRE, M., Zahlentheorie. Deutsch von H. MASER. 2. Bd. Leipzig, Teubner. 11 Mk. 60 Pf.

MANSION, P., Elemente der Theorie der Determinanten. 2. Aufl. Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

REICHEL, O., Die Grundlagen der Arithmetik, unter Einführung formaler Zahlbegriffe dargestellt. 1. Theil. Berlin, Haude & Spener. 1 Mk.

KÜRTEN, B., Theorie der magischen Quadrate und Kreise. Köln, Theissing. 1 Mk.

BEHL, F., Die Darstellung der Geometrie nach inductiver Methode. Hildesheim, Lax. 2 Mk.

ROHN, K., Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

JOLLES, S., Die Theorie der Osculanten und das Sehnensystem der Raumcurven IV. Ordnung und 2. Species. Aachen, J. A. Mayer. 2 Mk.

LILIENTHAL, R. v., Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Flächen und geradlinigen Strahlensysteme. Bonn, Ed. Weber. 4 Mk.

SCHÖNFLIES, A., Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

BURMESTER, L., Lehrbuch der Kinematik. Bd. I. Die ebene Bewegung. 1. Lief. Leipzig, Arth. Felix. 16 Mk.

HOLZMÜLLER, G., Einführung in das stereometrische Zeichnen mit besonderer Rücksicht auf Krystallographie und Kartographie. Leipzig, Teubner. 4 Mk. 40 Pf.

Angewandte Mathematik.

HOMANN, B., Die wissenschaftliche Fehlerausgleichung in der Markscheidekunst. Freiberg, Craz & Gerlach. 2 Mk.

FINGER, J., Elemente der reinen Mechanik. 6. Lief. (Schluss). Wien, Hölder. 3 Mk. 60 Pf.

MÜLLER, F., Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Bauconstructionen. Leipzig, Baumgärtner. 6 Mk.

HAASE, H., Die Theorie der parabolischen und elliptischen Bögen in ihrer Anwendung auf Eisenconstructionen. Wien, Waldheim. 5 Mk. 50 Pf.

Astronomisch-geodätische Arbeiten für die europäische Gradmessung im Königreich Sachsen. 4. Abtheilung. Das Landesnivellement, begr. von J. Weisbach, vollendet und bearbeitet von A. NAGEL. Berlin, Stankiewicz. 12 M.

JSRAEL-HOLZWART, K., Elemente der Astromechanik, f. Stud. bearbeitet. Wiesbaden, Bergmann. 6 Mk.

Weinek, L., Astronomische Beobachtungen an der kaiserl. königl. Sternwarte in Prag, enthaltend Originalzeichnungen des Mondes. Prag, Calve's Verlag. 12 Mk.

Anschütz, C., Ungedruckte wissenschaftliche Correspondenz zwischen Joh. Kepler und Herw. v. Hohenburg (1599). Altenburg, Dietz. 2 Mk. 70 Pf.

Physik und Meteorologie.

Baumgarten, M. v., Kritischer Versuch über ein Maass für Schall-Intensität. Wien, C. Teufen. 60 Pf.

Winter, W., Lehrbuch der Physik für Schulen. München, Ackermann. 4 Mk. 80 Pf.

INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ueber die Entdeckung der Variation und der jährlichen Gleichung des Mondes.

Von

C. Anschütz, S. J.

Als ich mich im Herbst vorigen Jahres mit der Herausgabe und Erklärung der von mir in München aufgefundenen Briefe Kepler's[1]) befasste, lenkte eine Stelle des Briefes vom 9. und 10. April 1599 meine Aufmerksamkeit auf sich. Kepler charakterisirt in derselben eine Mondgleichung, die er einstweilen als Conjectur hinstellt, so deutlich, dass man in ihr sofort die jährliche Gleichung erkennt[2]). Dies erregte in mir den Verdacht, ob es wohl mit der hergebrachten und in allen Büchern als zweifellos hingestellten Meinung, dass Tycho Brahe der Entdecker der jährlichen Gleichung sei, auch wirklich seine Richtigkeit habe; und ich machte mich daran, die in seinen Werken und Briefen zerstreuten Aeusserungen Kepler's über die Ungleichheiten des Mondlaufes soviel möglich zu sammeln und zu vergleichen. Das Ergebniss dieser mühsamen Arbeit war aber auch höchst überraschend und lohnend.

Ich werde im Folgenden drei Sätze nachzuweisen suchen, nämlich:

1. Tycho Brahe kann nicht als Entdecker der jährlichen Gleichung des Mondes gelten.

2. Dagegen gebührt Tycho Brahe das Recht, als der selbstständige Entdecker der in Europa bis dahin unbekannten Variation angesehen zu werden, auch für den Fall, dass die nicht unbestrittene Priorität Abul Wefa's begründet sein sollte.

1) Dieselben sind unter dem Titel: „Ungedruckte wissenschaftliche Correspondenz zwischen Johann Kepler und Herwart von Hohenburg. 1599“ im Format der „Opera omnia Kepleri“ (Ausgabe von Chr. v. Frisch), mit einer Ergänzung des Sachregisters und Noten versehen, erschienen, und bei Victor Dietz in Altenburg (S.-A.) zu haben. Ich bezeichne diese Schrift in der Folge mit U. W. C.

2) Ich komme weiter unten im Verlauf der Untersuchung auf diese Stelle zurück.

3. Kepler ist der Entdecker der jährlichen Gleichung, war nahe daran, einen sehr genauen Werth für dieselbe zu bestimmen, und wurde nur durch eine unglückliche Idee abgehalten, sie auch als Mondgleichung definitiv aufzustellen.

---

1. Tycho Brahe kann nicht als Entdecker der jährlichen Gleichung des Mondes gelten.

Beim Nachweis dieses und des folgenden Satzes stütze ich mich zumeist auf die Auctorität Kepler's. Ich halte Kepler's Aussprüche für entscheidend in der Frage, welche Mondgleichungen beim Tode Tycho Brahe's aufgestellt waren; ebenso darin, welcher Antheil an der Entdeckung (eventuell Neuentdeckung) einer Mondgleichung demselben zukomme. Ich glaube, dass wohl Niemand Kepler ein competentes Urtheil und ein eminentes Verständniss in astronomischen Fragen absprechen wird; ebenso wird man wohl einverstanden sein, wenn ich sage, Niemand sei so im Stande gewesen, die Ansichten und Theorien Tycho Brahe's authentisch zu interpretiren, wie gerade Kepler[1]). Die Wahrheitsliebe Kepler's endlich ist über jeden Zweifel erhaben. Sein gutmüthiges schwäbisches Naturell zeigt sich in seinen Briefen oft von der liebenswürdigsten Seite. Er war nicht fähig, ein Plagiat sich zu Schulden kommen zu lassen, noch viel weniger einen Plagiatstreit mit der Erbitterung zu führen, wie etwa Tycho Brahe oder Galilei. Ist er doch unbefangen genug, an Menschen, die seinen guten Namen hinterlistig blossgestellt haben, sogar in der ersten Aufregung das Gute in lobenden Worten anzuerkennen.[2])

Wie wäre es nun unter diesen Umständen denkbar, dass Kepler von der Variation als einer Entdeckung Tycho's oft und ausführlich handelt, diese vorgebliche Entdeckung Tycho's aber nie als solche erwähnt?[3])

Indessen dies wäre nur ein rein negativer Beweis, der nicht hinreichte, um eine Ueberlieferung zu beseitigen. Kepler hat aber Stellen, welche positiv das Gegentheil beweisen und zugleich einen Fingerzeig dafür geben, wie diese Ansicht sich bilden konnte.

---

1) Kepler verkehrte nicht nur persönlich mit Tycho Brahe, sondern hatte auch Tycho's Aufzeichnungen und Beobachtungen zu seiner Verfügung, arbeitete dieselben mit grossem Aufwande von Zeit und Mühe durch, und gab sogar die „Progymnasmata", welche für Tycho's Ansprüche zuerst in Betracht kommen, nach dessen Tode mit Zusätzen heraus. Vergl. die zweitfolgende Anmerkung.

2) Man vergl. z. B. Kepler's Lob des Reimarus Ursus, S. 41 meiner Schrift, und das S. 91 flgg. über Kepler's damalige Lage Gesagte. Ergötzlich ist auch Kepler's Bericht über den Anlauf, den er nahm, um Ursus bei einer persönlichen Zusammenkunft seinen Zorn fühlen zu lassen. Und das Ende? *„Sicque nomen tandem professus, pacifice ab ipso discessi."* (Opera Omnia, Bd. I S. 237.)

3) Der Nachweis für Letzteres ergiebt sich bei Besprechung des zweiten Satzes von selbst.

Tycho Brahe hat in seinen „Progymnasmata“ [1]) zwei Tafeln der Zeitgleichung aufgestellt. Die erste derselben findet sich bei dem Abschnitt über die Bewegung der Sonne und enthält die vollständige Zeitgleichung; die zweite ist dem Abschnitt über den Mond beigedruckt, und in dieser fehlt ein Element der Zeitgleichung. Welches dieses Element sei, könnte ich aus Autopsie berichten, will aber Kepler das Wort lassen [2]). „Die Zeitgleichung entsteht hauptsächlich durch das Zusammenwirken zweier Ursachen: der Schiefe der Ekliptik und der ungleichförmigen Bewegung der Sonne oder ihrer [Mittelpunkts-] Gleichung. Den ersten Theil hat Tycho berücksichtigt, den andern, der aus der [Mittelpunkts-] Gleichung der

1) Da im Folgenden die „Progymnasmata“ Tycho Brahe's eine grosse Rolle spielen, so bin ich genöthigt, ihre Entstehung und Bedeutung ins rechte Licht zu setzen, da immer noch sehr irrige Anschauungen darüber in vielen Büchern herumspuken. Ich will daher die Daten zusammenstellen, wie sie grösstentheils Kepler selbst aufgezeichnet hat.

Die „Progymnasmata“ sind 1582 im Druck begonnen (O. O. I, 191), und zwar in Tycho's eigener Druckerei zu Uranienburg (auch auf dem Titelblatt steht: „Typis inchoata Uraniburgi Daniae“). Tycho förderte den Druck in dem Maase, wie das Manuscript voranschritt. So erklärt es sich, dass der Druck volle 20 Jahre dauerte. Tycho druckte manche Seiten mit der Zeit von Neuem und vertheilte auch unvollständige Exemplare während des Druckes (so Kepler, O. O. VII, 192). Daher ist Vorsicht bei Argumenten aus diesem Buche anzurathen. Im Jahre 1592 wurde der Druck sistirt, weil Tycho nach dem Tode des Landgrafen von Hessen die „Epistolae astronomicae“ zu drucken begann, die 1596 vollendet wurden (I. Band). Tycho verliess darauf Dänemark und nahm die unvollendeten Exemplare des I. und II. Bandes der „Progymnasmata“ mit. Am I. Band fehlten noch: Vorrede, Nachwort und die Blätter, die vom Mond handeln; der II. Band (über Kometen) war unvollendet, weil der III. mit gleichem Stoffe sich unmittelbar anschliessen sollte (so Kepler, O. O. VII, 225). In diesem Zustande war das Werk noch bei Tycho's Tode (O. O. I, 191). Die Herausgabe besorgte vorzüglich Kepler, der auch den vom Mond handelnden Theil überarbeitete (O. O. I, 191); dieser letztere Abschnitt ist theilweise anders paginirt (nach S. 112 folgt S. 01—029, dann S. 113 u. s. w. Von 02 bis 136 reicht die Mondtheorie). Die Vorrede ist von den „Erben“. Ebenso, angeblich, das Nachwort; in Wirklichkeit ist Kepler dessen Verfasser („*Appendicis ad Progymnasmata ipse auctor sum.*“ Kepler an Magini, den 1. Febr. 1610. O. O. III, 495. Vergl. I, 191; VI, 568. Deshalb ist es auch O. O. VI, 568 abgedruckt). Ob auch eine von Tycho selbst verfasste Vorrede sich in der ersten Auflage befindet, konnte ich leider nicht feststellen, da in dem mir zu Gebote stehenden Exemplar acht Seiten fehlen; nach den Aeusserungen Kepler's (O. O. I, 191; VII, 225) ist dies jedoch fast sicher nicht der Fall. Eine neue Ausgabe veranstaltete von beiden Bänden mit Beifügung der „Epistolae astronomicae“ Tengnagel (Schwiegersohn Tycho's) im Jahre 1610 (O. O. I, 191); endlich wurden beide Bände neu aufgelegt zu Frankfurt 1648 (L. c.).

2) O. O. VIII, 630: „*Aequatio temporis duas potissimum habet causas: obliquam ascensionem graduum eclipticae, et inaequalitatem motus Solis, seu ejus aequationem. Illa parte usus est Tycho; hac, quae ex aequatione Solaris motus fluit, in Luna non est usus.*“

Sonne folgt, nicht." Ferner[1]): „Die erste Tafel Tycho's für die Berechnung des Sonnenortes enthält beide Theile der Zeitgleichung; die zweite Tafel, für die Berechnung des Mondortes bestimmt, enthält nur den einen Theil der Zeitgleichung, der sich aus der Neigung der Sonnenbahn gegen den Aequator herleitet."

Da die jährliche Gleichung dasselbe Argument (*sin M*) hat, wie die Mittelpunktsgleichung der Sonne, aber entgegengesetztes Vorzeichen, so lag allerdings der Gedanke nahe, Tycho habe auf die angegebene Weise die jährliche Gleichung in seinen Mondtafeln compensiren wollen; und so mag die Meinung, Tycho sei deren Entdecker, entstanden sein. Dem ist aber nicht so.

Zwar berichtet Kepler[2]): „Vor meiner Zusammenkunft mit Tycho, bei dessen Aufenthalt in Wittenberg[3]), sah er sich genöthigt, um seine Beobachtungen richtig darzustellen, ausser so vielen anderen „Circelli" auch einen mit jährlichem Umlauf einzufügen, so lange er beide Theile der Zeitgleichung beibehielt." Dass Tycho diesen Versuch in einer zu Wittenberg veröffentlichten Schrift gemacht habe, erhellt aus einem Briefe Herwart's an Kepler[4]): „Sonst werdet Ihr noch gedenken und von Braheo selbst vernommen haben, wie Braheus *ad rectificationem veri loci Lunae* ein *circellum annuae variationis* (in dem *deliquio Lunae*, so sie zu Wittenberg drucken lassen) introducirt, *cujus initium statuitur Sole versante in principio ♋, ita ut in priori semicirculo hujus circelli verus locus Lunae promoveatur in consequentia*[5]), *et in posteriori retrotrahatur in praecedentia.*"

Allein wenn auch Brahe durch seine Beobachtungen zur Aufstellung einer jährlichen Gleichung hingedrängt wurde, so schreckte ihn andererseits die Menge der „Circelli" ab, welche nöthig gewesen wäre, besonders nach Entdeckung der Variation, um in der althergebrachten unbehilflichen Weise alle Launen des so sehr zur Freizügigkeit hinneigenden Trabanten der Erde darzustellen, wie wir aus folgender Aeusserung Kepler's entnehmen[6]):

1) O. O. VIII, 631: *„Tabula Tychonis prior pro Sole computando continet utramque partem aequationis temporis, tabula posterior pro Luna facta continet unam saltem partem aequationis temporis, quae fluit ex inaequalibus et obliquis eclipticae ascensionibus in sphaerae recta."*

2) O. O. VIII, 627: *„Priusquam ego ad Tychonem veni, quo tempori is Witebergae adhuc fuit, coactus fuit, praeter tot circellos unum etiam annuum inserere, quando retinuit utramque temporis aequationem, ut observata sua tueri possit."*

3) Also nicht vor Juni 1598 und nicht nach Mai 1599.

4) Vom 25. Juli 1600. O. O. III, 28.

5) Zu ergänzen ist: *„signa"*, ebenso *„praecedentia signa"*.

6) O. O. VI, 584: *„Et tamen adhuc aliam Tycho variationem deprehendit, cujus effectrices machinas non est ausus inferre systemati orbium Lunae; transscripsit igitur eos ipsi Zodiaco! Oculos aperuit illi tandem haec inaequalitas ultima, ut videre inciperet, non circulis realibus, sed causis naturalibus aliis has inaequalitates effici."*

„Ueberdies entdeckte Tycho noch eine Variation, deren Mechanismus er gar nicht in das System der Mondsphäre einzuschalten wagte; er übertrug sie daher auf den Thierkreis selbst! Diese letzte Ungleichheit öffnete ihm endlich die Augen, dass er einzusehen begann, dass diese Ungleichheiten nicht reellen Sphären, sondern anderen physischen Ursachen ihre Entstehung verdanken." Hieraus wird verständlich, was Kepler über die Versuche des Tycho und Longomontanus in dieser Richtung mittheilt[1]). Bei dem „Anfang der Einsicht" blieb es aber auch. Tycho war, wie Kepler sich ausdrückt[2]), zu sehr in die Vorstellung von der kreisförmigen als der vollkommensten Bewegung verrannt, als dass er sich hätte entschliessen können, eine wirkliche Ungleichförmigkeit der Bewegung anzunehmen. Indessen die Schwierigkeit war einmal da und forderte ihre Beseitigung. „Dieser „Circellus" mit jährlichem Umlauf", sagt Kepler[3]), „wurde später in Prag beseitigt durch Weglassung des zweiten Theiles der Zeitgleichung und durch Vernachlässigung von 5—6 Bogenminuten, um welche Berechnung und Beobachtung noch differiren." Diesen letzten Ausweg darf man sich aber keineswegs als eine wohlüberlegte, zielbewusste Lösung vorstellen[4]); es war ein Nothbehelf, den die Rathlosigkeit eingab. Auch war nicht Tycho es, der in dieser Weise den Knoten zerhieb, sondern Longomontanus, der nach Kepler's Erzählung[5]) dem unzufriedenen Tycho grob erwiderte: wenn ihm das nicht gefiele, so möge er selbst etwas Besseres an dessen Stelle setzen. Tycho's Stimmung zeichnet Kepler zur Genüge mit den Worten[6]): „Hätte Brahe seine Mondtafeln und das übrige Werk gleichzeitig abgefasst, so hätte er vielleicht den beim Mond vernachlässigten Theil der Zeitgleichung auch bei der Sonne weggelassen, da er bei dieser unmerklich ist[7]); ... Aber weil die Blätter über die Sonnentheorie schon vor langer Zeit gedruckt waren, ergab sich diese Inconsequenz."

Ein weiteres Zeugniss Kepler's für die rein empirische Natur dieser Massregel Tycho's findet sich in einer Antwort Kepler's an Fa-

1) O. O. VI, 571.

2) *„Totus perfectioni motuum addictus in circulis perfectis."*

3) O. O. VIII, 627: *„Is ergo annuus circellus profligatus est postea Pragae, per ommissionem secundae partis aequandi temporis, et per neglectionem 5 vel 6 scrupulorum residuorum, quibus calculus adhuc abit ab observatis."*

4) Kepler erkannte, wie wir sehen werden, klar seine Tragweite.

5) O. O. VIII, 627.

6) Brief an Odontius vom 30. Sept. 1606. O. O. VIII, 626 flg.: *„Si Braheus, quo tempore tabulas Lunares scripsit, scripsisset etiam totum suum librum, fortasse partem aequationis in Luna omissum omisisset etiam in Sole, utpote insensibilem in Sole; ... Sed quia paginae de Sole erant impressae a multo tempore, hinc orta haec dissimilitudo."*

7) Für die damaligen Beobachtungsmittel.

bricius[1]). Letzterer hatte gefragt, weshalb eine doppelte Zeitgleichungstabelle nöthig sei. Kepler erwidert: „Ich weiss nicht, was du eigentlich willst. Die Zeitgleichung entsteht aus zwei Ursachen...; Tycho berücksichtigt beim Mond nur eine derselben und vernachlässigt die andere, thut also gerade das Gegentheil von dem, um dessen Grund du fragst. Sachlich gerechtfertigt hat sich Tycho oder vielmehr sein Bearbeiter der Mondtheorie, Chr. Longomontanus, indem er sich auf die Erfahrung beruft. Oder ist der Sinn deiner Frage vielleicht der, warum bei Berechnung des Laufes der Sonne die doppelte Ursache der Zeitgleichung berücksichtigt sei, bei der Berechnung des Mondlaufes nur eine? Wenn dies, so habe ich schon gesagt, dass Tycho sich auf die Erfahrung beruft."

Im Lichte dieser Erklärungen Kepler's[2]) erhalten die Worte, mit denen in den „Progymnasmata" die Tafel der Zeitgleichung für den Mond eingeführt wird, eine sehr prosaische, handwerksmässige Bedeutung[3]), während man sonst versucht ist, mehr dahinter zu suchen. Sie lauten[4]): „Oftmalige Erfahrung lehrte, dass der Mondlauf die Zeitgleichung, wie sie aus der Bewegung der Sonne sich ergiebt, nicht zulässt, ausser wenn man ihn von der wahren Sonnenbewegung, von welcher dann diese Differenz gleichsam absorbirt wird, abhängig macht. Deshalb haben wir eine andere Art der Zeitgleichung nebst der Tafel dazu ausfindig gemacht, welche nur aus der geraden Aufsteigung der Ekliptikgrade entsteht und so lautet..." (folgt dann die Tafel der Zeitgleichung). Dazu nehme man noch, dass Tycho gar keinen Versuch macht, den genauen Betrag dieser vermeintlichen Mondgleichung zu bestimmen, und dass die Tychonische Lösung[5]) die Differenz nicht compensirt, sondern nur verringert.

---

1) O. O. II, 96: *„Nescio quid velis. Duae sunt causae, ob quas tempus est aequandum: altera inaequalis ascensio recta additamentorum Solis, altera inaequalia Solis additamenta. Jam Tycho in Luna usurpat saltem priorem causam, posteriorem negligit, itaque plane contrarium fit ejus, cujus tu quaeris causam. Pro re cavit Tycho seu ejus curator motibus Lunaribus designatus, Chr. Longomontanus, vocat inquam ad experientiam. An tu haec fortasse quaeris, cur in motu Solis inquirendo tempus propter utramque causam aequetur, in motu Lunae tempus propter causam alteram? Si hoc quaeris, jam dixi experentiam a Tychone allegatam."* — Vergl. O. O. II, 9.

2) Ich will durchaus nicht gesagt haben, dass dies alle Stellen Kepler's über diesen Gegenstand sind. Das wäre nicht richtig. Aber die angeführten sind so klar und unzweideutig, dass weitere Citate überflüssig scheinen.

3) Tycho spricht eben wie ein Meister, der seinem Lehrling Anweisungen giebt, wie er seine Aufgabe lösen muss. Derartige Weisungen können viel praktischer sein, als ein Theoretiker sie zu geben vermöchte, beweisen aber nicht, dass der Meister auch von den zu Grunde liegenden Gesetzen Kenntniss habe. Tycho war eben gross als Beobachter, als Theoretiker ist er ein Zwerg neben dem genialen Kepler.

4) Progymnasmata (1602), L. I p. 06. Diese Seiten sind allerdings später gedruckt, aber dass ihr Inhalt gleich geblieben ist, dafür bürgt Kepler.

5) Im dritten Theil wird dies näher gezeigt.

Kann Tycho Brahe unter diesen Umständen als Entdecker der jährlichen Gleichung gelten? Ich glaube nicht.

2. Tycho Brahe ist für das Abendland der Entdecker der Variation.

Wenn es, wie wir gesehen haben, um die Urheberschaft der vorhin besprochenen Mondgleichung für Brahe so schlimm bestellt ist, ist dann nicht das Gleiche bei der vielfach umstrittenen Entdeckung der Variation der Fall? Hier scheint die Sache noch schlimmer zu liegen, da ein Concurrent auftritt, dessen Priorität von vielen Astronomen als begründet anerkannt wird. „Dass nicht erst Tycho (wie man früher glaubte, obschon er es selbst nicht behauptete), sondern schon Abul-Wefa die Variation entdeckte, hat Sédillot aus des Letzteren „Almagestum sive Systema Astronomicum" schlagend nachgewiesen." So Dr. R. Wolf[1]). In der „Geschichte der Astronomie"[2]) vertritt Wolf die Ansicht Sédillot's nicht mehr so entschieden; er spricht von der Streitfrage als einer zweifelhaften und beklagt mit Recht den unfruchtbaren Streit. Ich habe auch nichts weniger als die Absicht, „diese unerquickliche Fehde" neuerdings zu inauguriren, und habe diesem Standpunkt Ausdruck verliehen durch die Formulirung des zweiten Satzes. Mag Sédillot Recht haben oder nicht, mir scheint, dass man rein um des Kaisers Bart gestritten hat.

Zunächst würde ich mich bedenken, so ohne Weiteres zu sagen, Tycho Brahe habe nie diese Entdeckung für sich in Anspruch genommen[3]). Es ist wahr, Tycho rühmt sich dessen nicht in auffallender Weise; und dies kann befremden, da Tycho seine Verdienste wohl zu schätzen wusste. Allein Tycho mochte zunächst, da er fest überzeugt war, er habe der Astronomie durch sein System eine ganz neue Aera eröffnet, es nicht für der Mühe werth halten, von einer einzelnen untergeordneten Entdeckung zuviel Aufhebens zu machen. Andererseits sind die wenigen der Mondtheorie gewidmeten Seiten in den „Progymnasmata" nur ein Lückenbüsser[4]), während die „Progymnasmata" selbst schon ihrem Titel nach nur der Vorläufer zu einem grossen Werke sind, etwa wie Kepler's „Pro-

---

1) Handbuch der Mathematik u. s. w. 1872. Bd. II Nr. 394.

2) München 1877. S. 53 figg.

3) Wolf hält diese Behauptung auch in der „Gesch. d. Astron." S. 54 aufrecht. Ich wünsche übrigens nicht, dass der hochverehrte Herr diese Ausführungen als lediglich gegen sich gerichtet auffasse; dies liegt mir fern; ich fand eben nur bei ihm sämmtliche Steine des Anstosses, die vorher zu entfernen sind, schön gesammelt.

4) Im Nachwort der „Erben" (eigentlich Kepler's; O. O. VI, 568) wird platterdings erzählt, da der Druck gleichzeitig mit verschiedenen Partien begonnen habe, und bei der ersten die Sonne behandelnden noch einige Bogen leer geblieben seien, habe Tycho beschlossen, diese Lücke mit einer kurzen Mondtheorie auszufüllen. Daher die sonderbare Paginirung.

dromus" zur „Harmonice mundi". Endlich hatte Tycho keine Veranlassung, diese Priorität so zu betonen, da Niemand sie ihm streitig machte. Unter diesen Umständen ist es doch hinreichend, wenn Tycho nach Besprechung der Mittelpunktsgleichung und Evection fortführt[1]): „Da es sich jedoch aus vielen genauen Beobachtungen ergab, dass diese Kreise noch nicht allen Erscheinungen Genüge leisten, indem in den Octanten oder den mitten zwischen den Quadraturen und Syzygien, ☌ und ☍, gelegenen Stellen, wenn die beiden Himmelskörper in 45° Distanz von einander sich befinden, noch eine sehr merkliche Ungleichheit sich geltend macht, so schien es von Nöthen, noch einen kleinen Kreis, der diese Variation darzustellen hat, hinzuzufügen. ... Der Betrag dieser periodischen Gleichung ist von der doppelten wahren Distanz der Sonne und des Mondes abhängig und erreicht ein Maximum von 40′ 30″, welches im ersten und dritten Octanten, von der ☌ an gerechnet, addirt, im zweiten und vierten Octanten subtrahirt werden muss."

Tycho bezeichnet hier die Variation mit aller wünschenswerthen Genauigkeit und sagt ausdrücklich, er sei durch seine Beobachtungen darauf gekommen. Was sollte er noch hinzufügen?

Nun führt man noch ins Feld, dass Tycho von der Variation ausdrücklich als einer „*hypothesis redintegrata*" spreche[2]). Leider hat man vergessen, dass nur Derjenige in diesem Sinne von einer Wiederherstellung reden kann, der von der ersten Aufstellung eine Kenntniss gehabt hat. Kannte Tycho Brahe den „Almagest" Abul Wefa's? Hierfür einen Beweis oder auch nur den Schein eines Beweises beizubringen, scheint Niemand eingefallen zu sein; es wäre auch vergebliche Mühe gewesen. Der „Almagest" Abul Wefa's ist noch nie in Druck gekommen[3]); wer kann es da für wahrscheinlich halten, dass Tycho das Manuscript kannte? Verstand Tycho das Arabische? Kepler, der sonst sogar gerne mit solch' alten Reliquien sich abgab, hatte allem Anscheine nach nicht einmal eine Ahnung, dass ein Abul Wefa existirte[4]). Bevor also der Beweis beigebracht ist,

---

1) Progymnasmata (1602), L. I pag. 05 (immer erster Band): *„Verum cum per multiplices et accuratas observationes experti simus, hoc circulos omnibus apparentiis necdum satisfacere, siquidem in octantibus sive mediis locis inter quadraturas et syzygias, ☌ et ☍, cum luminaria sesquisigno inter se distant, adhuc inaequalitas quaedam et differentia satis perceptibilis sese ingerat, necessum videbatur, adhuc alium parvum circellum, per quem haec variatio excusetur, superaddere. ... Motus autem hujus librationis duplici distantiae verae Solis et Lunae commensurabilis est, maximamque variationem 40′ 30″ in 1. et 3. a ☌ octante addendam; in 2. vero et 4. octante subtrahendam procreat."*

2) So z. B. Dr. Wolf, „Gesch. d. Astron." S. 54, wo er offenbar die Argumente Sédillot's referirt.

3) Dr. Wolf, „Gesch. d. Astron." (1877) S. 204.

4) Wenn Jemand eine Stelle aus Kepler's Werken oder Briefen aufweist, bin ich gern bereit, zu widerrufen; Frisch kennt, soviel ich weiss, keine.

dass Tycho die Schrift Abul Wefa's gekannt habe, sind alle auf die Worte *„hypothesis redintegrata“* gebauten Schlüsse eitel Luftschlösser. Der Beweis leidet aber noch an einem andern höchst bedenklichen Mangel. Hat Tycho mit den Worten *„hypothesis redintegrata“* auch den Begriff verbunden, den Sédillot unterlegt? Durchaus nicht. *„Hypothesis Lunae redintegrata“* ist die Ueberschrift des ganzen Abschnittes[1]), in dem von der Mittelpunktsgleichung, der Evection und der Variation die Rede ist. Wem wird es wohl einfallen, die dem Ausdruck von Sédillot unterschobene Bedeutung als von Tycho z. B. auf die Evection angewandt zu bezeichnen? Noch mehr! S. 03 heisst es: *„Ejus primam inaequalitatem* [also die Mittelpunktsgleichung!] *ad amussim restituimus.“* An anderen Stellen der „Progymnasmata“ braucht er *„redintegrare“*, *„restituere“* von noch anderen Problemen, deren Lösung niemals in Vergessenheit gerathen war[2]). Tycho bezeichnet sogar die nach ihm benannte Hypothese als *„redintegratio“*[3]); was er aber dazu sagen würde, wollte man dies für „aufgewärmt“ nehmen, davon könnte Reimarus Ursus erzählen, den er noch auf dem Todesbette vor Gericht zog[4]). *„Redintegrare“* bedeutet für Tycho einfach: „von Grund aus erneuern“[5]), und eine *„hypothesis redintegrata“* kann somit alte Elemente in neuem

---

1) In der „Gesch. d. Astron.“ ist freilich von einer „Note in Tycho's hinterlassenen Papieren“ die Rede; welche damit gemeint sind, weiss ich nicht; da es hier aber nur darauf ankommt, zu zeigen, welchen Begriff Tycho mit dem Ausdruck verbindet, ist ein Beweis aus den „Progymnasmata“ ganz am Platze.

2) Z. B. in der „Praefatio“ (also eigentlich Kepler): *„in Solis curriculo restituendo“*; — S. 106: *„de Solaris cursus redintegratione ex professo agemus“*.

3) Einige Beispiele. Tycho an Mästlin (1. Mai 1598; O. O. I, 45): *„Perspicies uti spero, rem astronomicam aliter quam putatur* [Copernicus!] *redintegrari posse.“* An Kepler (9. Dec. 1599; O. O. I, 225): *„Ex Mechanicis* [Werk Tycho's] *colliges, quanto molimine astronomiae redintegrationem aggressus sim.“* In den „Progymnasmata“ S. 9: *„Ab hujus ... ad rem astronomicam redintegrandam necessarii Jubaris* [er meint die Sonne] *in debitum et congruentem cum eo, qui coelitus apparet, tenorem restitutione.“*

4) Dieser Vorgang wirft ein so eigenthümliches Licht auf Tycho's Charakter, dass ich mir es nicht versagen kann, auf eine bezeichnende Stelle aus einem Briefe Tycho's an Kepler aufmerksam zu machen. Tycho schreibt den 28. August 1600 an Kepler (O. O. I, 232): *„Institui contra illum actionem juridicam, ... intelligens periculum esse in mora, siquidem graviter decumberet.“* Er erlangt vom Kaiser die Einsetzung einer Gerichtscommission. *„Verum accidit, ut eadem hora, qua citatio illi intimanda fuit, exstingueretur.“* Welche Rachsucht, einen in den letzten Zügen Liegenden noch vor Gericht zu schleppen wegen einer Ehrenbeleidigung!

5) So z. B. *„Conveniunt haec tempora* [einer Finsterniss] *satis praecise cum nostro redintegrato calculo“* (Tycho an Mästlin; O. O. I, 46). *„Tempora* [*eclipsium*] *mea restitutioni apprime congruentia“* (Tycho an Kepler; O. O. I, 225).

Gewande und auch ganz neue Entdeckungen umfassen[1]). Eine Stelle der Mondtheorie in den „Progymnasmata" widerspricht sogar direct der Annahme, für die man sich auf die *„redintegrata hypothesis"* beruft. Sie lautet: „Ich hielt es für der Mühe werth, wenn ich als Anhang zu diesem Capitel über die Sonne kurz und bündig darlegte, wie die Mondtheorie wieder in Ordnung zu bringen sei; da viele Jahre fortgesetzte genaue Beobachtungen mich überzeugt hatten, dass der Lauf des Mondes am Himmel durch die bisher aufgestellten Hypothesen, ob dies nun Ptolemäische oder Copernicanische sind, und die aus diesen auf irgend eine Weise abgeleiteten Tafeln nicht richtig dargestellt werde" [2]). Hier versichert Tycho, dass ihm keine frühere Hypothese bekannt sei, die den Anforderungen Genüge leiste, und er soll die Variation, die er gerade deshalb neu einführt, in einem Athem als eine alte, wieder neu aufgelegte Hypothese bezeichnet haben?

Die im Wege stehenden Argumente dürften mit diesem genügend widerlegt sein. Sehen wir uns jetzt um, wie Kepler sich über die Variation äussert. Er entwickelt in seinen beiden für den damaligen Stand der Mondtheorie klassischen Werken, der „Epitome Astronomiae Copernicanae" und den „Tabulae Rudolphinae" dieselbe in folgender Weise.

Er unterscheidet zwei Arten von Ungleichheiten des Mondlaufes in Länge. Die erste Art (nur eine einzige Ungleichheit) nennt er *„Lunae anomalia soluta"* (d. h. *a motu Solis*). Es ist dies die Mittelpunktsgleichung[3]). Er nennt sie auch *„anomalia periodica"* und *„sui juris"*[4]). Die anomalistische Revolution des Mondes giebt er sehr genau an zu $27^d\ 13^h\ 18^m\ 35^s$.

Die zweite Art nennt er *„inaequalitates menstruae"*. Er führt nur zwei an: eine *„temporanea"* und eine *„perpetua"*. Die erstere nennt er *„temporanea"*, weil sie zwar von den Lunationen abhängig, jedoch nicht in allen synodischen Revolutionen von gleichem Betrag ist[5]). Er erklärt ihren Verlauf und ihren Unterschied von der Mittelpunktsgleichung. Wenn auch die Auseinandersetzung etwas dunkel ist, so erkennt man doch be-

---

1) Das Wort *„hypothesis"* kann Niemand stossen. Tycho kennt nur dieses; er nennt seine, des Ptolemaeus, der Copernicus Theorie gleicherweise *„hypothesis"*. Vergl. die folgende Anmerkung.

2) Progymnasmata, L. I pag. 02: *„Operae pretium me facturum existimavi, si brevem et succinctam curriculi Lunaris restitutionem huic capiti de Sole ... subjungerem; postquam multorum annorum accuratis observationibus satis exploratum habuerim, ejus in coelo phaenomena non congruere hypothesibus hactenus constitutis, sive Ptolemaicis, sive Copernicanis, atque numeris hinc quomodocunque derivatis."*

3) O. O. VI, 580 flg.

4) O. O. VI, 462.

5) O. O. VI, 466 flgg.; 584.

stimmt die Evection. Ueberdies sagt er noch[1]), sie sei abhängig vom Apogaeum und den Syzygien. Ihr Maximum giebt er zu 2° 30′ an. — Die andere *„inaequalitas menstrua"* nennt er *„perpetua"*, weil sie von den Lunationen abhängig, aber auch in allen synodischen Revolutionen von gleichem Betrag ist. Diese kennzeichnet er durch die Bemerkung: „Sie verschwindet sowohl in den Syzygien, als in den Quadraturen, und erreicht ihr Maximum in den Octanten"[2]) zweifellos als unsere heutige Variation. Er nennt sie auch so und sagt an verschiedenen Stellen, sie sei den Alten unbekannt gewesen[3]), Tycho habe sie gefunden und kraft seines Entdeckungsrechtes „Variation" genannt[4]).

Von der angeblich durch Tycho Brahe eingeführten jährlichen Gleichung weiss dagegen Kepler Nichts.

Auf Grund dieser Ausführungen glaube ich mit Recht behaupten zu können, es sei unerwiesen und unwahrscheinlich, ja fast unmöglich, dass Tycho Brahe von der Entdeckung Abul Wefa's, wie es nun mit dieser immer aussehen mag, Kenntniss hatte; dagegen ist erwiesen, dass Tycho Brahe selbstständig die Variation fand, ihren Verlauf beschrieb, den Betrag genau bestimmte, und ihr den noch heute gebräuchlichen Namen gab; somit das Recht hat, als ihr Entdecker (wenigstens für das Abendland) zu gelten.

---

1) L. c. 474.

2) O. O. VI, 475: *„Evanescit tam in quadris quam in copulis, maxima est circa octantes."*

3) *„Inobservata a veteribus"* (O. O. VI, 584). — *„Praeterea ignoraverunt illi [Veteres] incitationem Lunae in copulis, quam Tycho Brahe variationem dixit"* (O. O. VIII, 112).

4) *„Tertia lunae inaequalitas, Variatio, inventum Tychonis Brahe"* (O. O. VII, 485). — *„Succedit famosa illa Tychonis inventio, variatio dicta"* (O. O. VII, 527). Vergl. O. O. II, 9 und III, 312). — *„Tycho Brahe inventor variationem dixit"*, was jeder des Lateins Kundige mit: „Tycho gab ihr als Erfinder den Namen Variation" übersetzen wird (O. O. VI, 475. — *„Quam Tycho inventor variationem indigetavit"* (O. O. VI, 585). Vergl. O. O. III, 535; 545; 684 flg.; 708. VI, 14. VIII, 838. — Tycho bestimmte das Maximum hinreichend genau zu 40′ 30″. Kepler will dasselbe aus Gründen, die er *a priori* aus seiner Speculation über die Ursache der Centralbewegung herleitet, auf 51′ oder wenigstens 49′ erhöhen.

(Fortsetzung folgt.)

Recensionen.

Histoire des sciences mathématiques et physiques. Par M. MAXIMILIEN MARIE, répétiteur de mécanique, examinateur d'admission à l'école polytechnique. Tome VII. De Newton à Euler (Suite). 272 pag. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire. 1885.

Wenn man je ein Werk als ungleichen Werthes in seinen einzelnen Abtheilungen bezeichnen durfte, so gilt dieses für dasjenige, dessen VII. Band uns heute vorliegt, selbst ein Muster von Ungleichheit. Auch dieser Band ist noch der Entstehung und ersten Entwickelung des Infinitesimalcalculs gewidmet. Er beginnt mit der Erzählung des Prioritätsstreites zwischen Newton und Leibnitz, er bringt in seinem Verlaufe die Entdeckungen von Jacob und Johann Bernoulli, von de L'Hospital, von Taylor, um nur die wichtigsten Namen hervortreten zu lassen. Aber wir möchten den Leser kennen lernen, der aus den hier gegebenen Schilderungen den Entwickelungsgang der Wissenschaft zu entwirren im Stande ist! Einen grossen Theil der Schuld trägt die unselige Gewohnheit des Verfassers, die Schriftsteller nach dem Geburtsdatum zu ordnen. So erscheint Jacob Bernoulli S. 72—119, Johann B. S. 154—198, de L'Hospital, Johann's Schüler, dagegen schon S. 143—148! Wie kann da eine folgerichtige Geschichte der Ideen zu Stande kommen, die Herr Marie sich doch als Ziel vorsetzte? Nein, wir können hier höchstens mehr oder weniger gut gelungene Uebersetzungen einzelner Abhandlungen einzelner Schriftsteller aus der Sprache ihrer Zeit in die der heutigen Bezeichnungsweise erkennen, aber wie die Ideen sich eine aus der anderen ableiteten, wie die richtigen Gedanken, wie die Fehlschlüsse entstanden sein mögen, wie jeder unmittelbare oder mittelbare Lehrer auf seine Schüler einwirkte, das sagt uns Herr Marie nie und nirgend. Aber auch an grossen nicht erwähnten Leistungen ist in diesem Bande so wenig ein Mangel wie in den früheren. Wir begnügen uns wiederholt damit, auf einige der klaffendsten Lücken hinzuweisen. Jeder Fachmann kennt die Bernoulli'schen Zahlen und das Gesetz der grossen Zahlen von Jacob Bernoulli, kennt Tschirnhausen's Methode, zwei Glieder aus einem Gleichungspolynom wegzuschaffen, kennt Halley's bahnbrechende Arbeit über die Bevölkerungsverhältnisse der Stadt Breslau. Von diesen wichtigen Dingen ist mit keinem einzigen Worte die Rede.

CANTOR.

Die Berechnung der trigonometrischen Vermessungen mit Rücksicht auf die sphäroidische Gestalt der Erde. Von J. G. F. Bohnenberger. Deutsche Bearbeitung der Abhandlung „De computandis etc.", von E. Hammer, Professor am Königl. Polytechnikum in Stuttgart. VIII, 65 S. mit 13 Figuren im Text. Stuttgart, 1885. Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.

Wenn eine Abhandlung etwa 60 Jahre nach ihrem erstmaligen Erscheinen einen neuen Abdruck und zwar in deutscher Uebersetzung erfährt, so kann diese immerhin sehr seltene Erscheinung als ein gutes, wie als ein schlimmes Zeichen aufgefasst werden. Als ein schlimmes, sofern daraus der Schluss gezogen werden könnte, die Wissenschaft sei inzwischen nicht weiter gekommen, als ein gutes, sofern der Abhandlung selbst durch die Uebersetzung das Zeugniss bleibenden Werthes ertheilt ist. Der erstere Schluss wäre, wenn man ihn auf Bohnenberger's Abhandlung anwenden wollte, nicht gerechtfertigt. Es bedarf nur des Hinweises auf die „Disquisitiones generales circa superficies curvas", in welchen Gauss 1828 der Lehre von den Oberflächen neue Bahnen eröffnete, auf Grunert's Sphäroidische Trigonometrie (1833), in welcher der Verfasser in gewohnt breitspuriger, aber gewissenhafter Darstellung das zu seiner Zeit Bekannte vereinigt wiedergab, auf die ganze neuere Literatur über das Geoid, um der Meinung von etwaigem Stillstande der Wissenschaft zu begegnen. Nichtsdestoweniger ist Bohnenberger's Schrift noch heute sehr lesenswürdig und Herrn Hammer's Bearbeitung derselben sehr lesbar, so dass wir mit Vergnügen auf die neue alte Erscheinung aufmerksam machen.

Cantor.

Algebraische Analysis von Augustin Louis Cauchy, deutsch herausgegeben von Carl Itzigsohn. Berlin 1885, bei Julius Springer. XII, 398 S.

Im XXX. Bande dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 23, haben wir die Uebersetzung des I. Bandes von Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen anzeigen können als Eröffnungsband jener Sammlungen mathematischer Klassiker, welche die Springer'sche Verlagshandlung dem deutschen Publicum zu bieten gedenkt. Zur Fortsetzung des Unternehmens wurde Cauchy's Algebraische Analysis gewählt. Wir können die Wahl nur billigen. Das französische Original von 1821 ist eine bibliographische Seltenheit geworden. Huzler's Uebersetzung von 1828 ist kaum häufiger zu finden und nahezu unlesbar. Dass aber zwischen Euler's und Cauchy's Werk, zwischen 1748 und 1821 kein anderes Buch von gleicher Bedeutung für die Analysis erschienen ist, darf bereitwilligst zugestanden werden. Nur eine Abhandlung von unvergänglichem Werthe fällt in diese lange Zwischenzeit von fast dreiviertel Jahrhundert, welche, wenn sie bei ihrer Entstehung gleich so bekannt geworden wäre, wie sie es jetzt ist, vielleicht anders

gestaltend auf Cauchy's Analyse algébrique gewirkt hätte, möglicherweise zum Schaden des Werkes, welches dabei an Originalität eingebüsst hätte. Jeder Fachmann weiss, dass wir von der Gauss'schen Abhandlung „Circa seriem" etc. sprechen, welche in den Jahren 1811—1813 dem Drucke übergeben wurde. Während Euler heute noch durch die Fülle neuer Sätze überwältigt, hat Cauchy sich den Ruhm erworben, für Vieles, was Euler wusste und sagte, die ersten strengen Beweise geführt zu haben. Dieser Ruhm ist vollauf verdient, aber er gebührt nicht Cauchy allein. Auch Gauss hat bereits ein Strenge der Beweisführung, welche vor jeder modernen Kritik besteht. Insbesondere seine Kriterien der Convergenz unendlicher Reihen sind mustergiltig entwickelt, und deutsche Schriften über Analysis sollten, glauben wir, aus geschichtlich und vaterländisch gestattetem Erstlingsrechte, mit den Gauss'schen statt mit den Cauchy'schen Reihenuntersuchungen zu beginnen sich zur Pflicht machen. Diese Bemerkung soll natürlich nicht das geringste Lorbeerblatt aus Cauchy's Ruhmeskranz entfernen. Wir bleiben bei dem Ausspruche, es sei eine vortreffliche Wahl gewesen, unmittelbar auf die „Introductio" die „Analyse algébrique" folgen zu lassen, insofern nur Bücher und nicht einzelne Abhandlungen übersetzt werden sollen. Sonst hätte die Schrift „Circa seriem" vorausgehen müssen.

CANTOR.

J. VAN BEBBER: **Handbuch der ausübenden Witterungskunde.** I. Theil: Geschichte der Wetterprognose. 392 S. 12 Holzschn.

Unter allen naturwissenschaftlichen Zweigen ist wohl als eigentliche Wissenschaft die Meteorologie die jüngste, während andererseits die uranfänglichsten Versuche der Wetterkunde und -Voraussage bis in die frühesten Zeiten der Menschheit zurückreichen. Nachdem sich nun aus diesen kindlichen Bestrebungen des Alterthums und den Verirrungen der mittelalterlichen Astrometeorologie in unserem Jahrhundert auf physikalischer Grundlage ein Hauptzweig der Gesammtmeteorologie, die Wetterprognose, als selbstständige Disciplin entwickelt hat, muss ein Werk, welches uns den ganzen geschichtlichen Aufbau vorführt, von hohem Interesse für den Fachmann im engeren Sinne, wie für den ferner stehenden Laien sein. Eine solche „Geschichte der Wetterprognose" hat als ersten Theil eines Handbuchs der ausübenden Witterungskunde Herr Dr. J. van Bebber, Abtheilungsvorstand an der deutschen Sternwarte, in dem bekannten Verlag von F. Enke (Stuttgart) zur Publication gebracht. Der Autor war gerade so recht berufen, dieses Werk zu veröffentlichen, da er für die Praxis der täglichen Wetterprognose, wie für den wissenschaftlichen Ausbau der ihr zu Grunde liegenden Regeln seit Jahren so hervorragend thätig ist. Ein nicht geringer Vorzug der v. Bebber'schen Publication ist die scharfe sachliche Gliederung in einzelne Capitel, die dann wieder für sich in chro-

nologischer Folge durchgeführt sind. Durch diese systematische Theilung und einen die literarischen Nachweise erbringenden Anhang wird dieses Buch zu einem ausgezeichneten Nachschlagswerke, das auch Lehrer und Forscher hochschätzen werden. Um aber auf den Inhalt der einzelnen Capitel überzugehen, führt uns der Autor zunächst die Aeusserungen des Glaubens an die Einwirkung von dämonischen Kräften auf die Witterungselemente vor. Nach zahlreichen Citaten aus den Religionsschriften der vorchristlichen und christlichen Aera lesen wir von einer ganzen Reihe jener Verirrungen, in denen der religiöse Wahnsinn, der ganze Völker erfasst hatte, Hunderte und Tausende von unglücklichen Opfern als Hexen und Zauberer in die Arme des Henkers trieb. Neben Goldmachen, Pestanstiften und allenfallsigem Viehverhexen war ja besonders das Wettermachen eine Klage, die man gegen die der Zauberei Verdächtigen erhob. Auch die Entwickelung der eigentlichen Astrometeorologie wird uns bekannt gegeben durch Mittheilungen über ihre hauptsächlichen Vertreter, ihre Regeln und den hundertjährigen Kalender, jenes Vermächtniss derselben, das noch bis in unsere Tage hinein sein Unwesen treibt. Während der Glaube an den hundertjährigen Kalender, dessen Unsinn durch einen Blick auf seine Entstehung erkannt werden muss, als eine Schmach für den Menschenverstand zu erklären ist, muss ein zweiter Irrthum, der nicht weniger verbreitet ist, wesentlich milder beurtheilt werden, nämlich der Glaube an den Einfluss des Mondes auf die Witterung. Bei der relativen Nähe und Grösse des Mondes scheint der Gedanke an einen Einfluss desselben nicht von vornherein ausgeschlossen, zumal ja die Ebbe und Fluth als eine Wirkung des Mondes bekannt ist. Der Autor hat mit dem grössten Fleisse und Geschicklichkeit, welche durch seine hervorragende Literaturkenntniss unterstützt wurden, jene zahlreichen Untersuchungen, welche seit den Tagen Newton's mit den Hilfsmitteln der höheren Mathematik und der ausgebildeten Statistik angestellt wurden, zusammengetragen und uns damit ein höchst werthvolles Material geliefert. Am Schlusse des 3. Capitels, das diese Zusammenstellung bringt und an Raum einen grossen Theil des Gesammtwerkes einnimmt, kommt er zu den Resultaten, dass zwar der Mond auch eine atmosphärische Ebbe und Fluth erzeugt, dass aber selbst in niederen Breiten, wo ihre Wirkung auf das Barometer noch am besten nachweisbar ist, dieselbe unter 0,1 mm bleibt. Auf kein anderes meteorologisches Element ausser dem Luftdruck lässt sich, selbst in so geringem Maasse, ein Einfluss mit Bestimmtheit nachweisen, und jedenfalls ist es unzulässig und unwissenschaftlich, auf Mondeinflüsse Wetterprognosen zu gründen. Die nächsten zwei Capitel, welche sich gegen die Annahme eines Einflusses der Kometen, sowie der Meteoriten wenden, wurden kürzer gefasst. Eine weitere Ausdehnung erhielt wieder der folgende Abschnitt, der sich mit dem Einfluss der Sonnenflecken beschäftigt. Seit man die Sonnenflecken beobachtet hat, sind Versuche gemacht worden, einen Zusammenhang zwischen ihnen und

den Vorgängen in der Atmosphäre der Erde nachzuweisen. Ein solcher Zusammenhang scheint allerdings zu bestehen; ob er aber als ein ursächlicher oder vielleicht nur als ein gleichzeitiger, aus gemeinschaftlicher Begründung entspringender sich aufrecht erhalten lässt, muss vor der Hand noch zukünftigen Forschungen aufbewahrt bleiben. Jedenfalls können aber unsere Kenntnisse von der Sonnenfleckenperiode noch nicht benützt werden, um darauf Wetterprognosen für längere Zeit zu gründen. Nach einer noch folgenden kurzen Besprechung der „Wetterregeln" tritt der Verfasser auf das moderne Gebiet, die Entwickelung der neueren Meteorologie über. Es sind eine Reihe hochinteressanter historischer Einzelheiten, die uns hier geboten werden, so jene Worte, in welchen Lavoisier gewissermassen prophetisch die heutigen Wetterbulletins ankündigte. Die Arbeiten von Brandes und Dove bereiteten den Boden vor, auf dem sich schliesslich nach Auffindung des Buys-Ballot'schen Gesetzes die synoptische Meteorologie voll entwickeln konnte. Von historischem Werthe sind die Mittheilungen über die Prioritätsansprüche, die zwischen Buys-Ballot und Ferrel bestehen. Es waren aber nicht blos die erwähnten und weitere sich daran schliessende wissenschaftliche Arbeiten, welche den mächtigen Aufschwung der Meteorologie förderten, sondern es traten noch zwei äussere Factoren hinzu: einerseits die Entwickelung des Telegraphenwesens, welche gestattete, rasche Witterungsnachrichten zu sammeln und die auf ihnen begründeten Prognosen und Sturmwarnungen rechtzeitig zu verbreiten, andererseits die praktischen Erfahrungen, welche man über den hohen Werth solcher Mittheilungen machte. Congresse und Conferenzen, zuerst durch den amerikanischen Nautiker Maury ins Leben gerufen, beriethen sich nun über die praktische Verwerthung und den weiteren Ausbau der Meteorologie. Die Schilderung der Thätigkeit der Congresse, sowie des sich nun allenthalben entwickelnden telegraphischen Wetterdienstes füllt die beiden letzten Capitel. Am Schlusse ist noch der bereits anfangserwähnte literarische Nachweis gegeben.

Die bei aller Wissenschaftlichkeit stets populär und leicht fasslich gehaltene Sprache eröffnet dem Werke einen grossen Leserkreis. Mit Interesse sehen wir dem zweiten Theile entgegen.

F. Erk.

J. Kiessling: **Die Dämmerungserscheinungen im Jahre 1883 und ihre physikalische Erklärung.** 53 S. 5 Holzschn.

Nachdem die Dämmerungserscheinungen des Jahres 1883 so ausserordentliches Aufsehen erregt haben und die Anregung gaben zu sorgfältigen Studien über das Phänomen der Dämmerung im Allgemeinen und speciell in der damals auftretenden Verstärkung, ist eine Schrift von besonderem Interesse, die zum ersten Male eine Erklärung des mehraktigen Schau-

spiels giebt, welches wir bei einer zur ganzen Entwickelung gelangenden Dämmerung sehen. Herr Professor J. Kiessling hat unter dem obigen Titel eine Studie veröffentlicht, welche, zunächst noch in populärer Form gegeben, der Vorläufer einer grösseren Arbeit über das gleiche Thema sein soll. Der Verfasser giebt eine Schilderung der Krakatoa-Ausbrüche und schliesst sich der Ansicht an, dass vulkanischer Staub, der von diesen oder anderen, nahezu gleichzeitigen Eruptionen herstammte, die Ursache von diesen aussergewöhnlichen Verstärkungen der Dämmerung gewesen sei. Es ist nämlich, wie ausführlich dargethan wird, nur bei Gegenwart von feinem Staube die Bildung einer homogenen, äusserst zarten Nebel- oder Dunstschicht möglich, die dann ihrerseits Anlass zu den Diffractionserscheinungen giebt, welche eben die einzelnen Phasen der Dämmerung sind. Daran reiht der Verfasser eine die grösste Feinheit der Beobachtung beweisende Schilderung einer normalen Dämmerung und giebt dann die Erklärung des ganzen Phänomens „durch die Diffraction, welche die oberste Zone einer der Erdoberfläche in grosser Höhe aufgelagerten Schichte von Nebelkörperchen von nahezu gleicher Grösse auf die Sonnenstrahlen ausübt“. An der Hand einer schematischen Figur wird die Aufeinanderfolge der einzelnen Dämmerungsphasen in der überzeugendsten Darstellung abgeleitet. Die anomalen Dämmerungen von 1883 lassen sich in allen ihren Eigenthümlichkeiten dieser Erklärung unterordnen, ja gerade das damals bemerkte charakteristische Fehlen des „dunklen Segments“ erscheint als eine nothwendige Folge. Zum Schluss vertritt der Autor nochmals seine Ansicht, dass diese ungewöhnlichen Dämmerungen in directem Zusammenhange mit den vulkanischen Ausbrüchen in der Sunda-Strasse stehen. Als Anhang ist noch eine Schilderung des Nebelglühapparates und der interessanten Versuche gegeben, welche Herr Professor Kiessling zur experimentellen Darstellung der mannigfaltigen Farbenbildungen machte, welche die Dämmerungserscheinungen begleiten. Wir sehen nach dieser kleineren, populären Schrift mit Interesse dem grösseren Werke entgegen, welches ausser einer umfassenden Bearbeitung des normalen Dämmerungsproblems auch eine Untersuchung über die geographische Verbreitung jener ungewöhnlichen Dämmerungen bringen wird.

F. Erk.

Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik zum Gebrauche für Handelslehranstalten und für den Selbstunterricht. Von Dr. Ernst Kaulich, Director der Prager Handelsakademie. 4. umgearbeitete und vermehrte Auflage. Prag, 1885. Druck und Verlag der k. k. Hofbuchdruckerei von Ignaz Fuchs. IX, 378 S.

Es war eine Principienfrage für uns, ob wir einem Berichte über das vorliegende Werk in unserer Zeitschrift Raum geben sollten oder nicht. Wendet sich doch dasselbe an Leser, die von der Existenz dieser Zeitschrift

kaum in den seltensten Fällen Kenntniss haben; ist es doch auf deren Bedürfnisse an Strenge, wie an Fasslichkeit eingerichtet, und beide weichen gar sehr von denen des Mathematikers ab. Wir entschlossen uns, ausnahmsweise das Buch zu besprechen, weil es uns die Gelegenheit bietet, einen Gegenstand zu berühren, den wir gern schon längst einmal in unserer Zeitschrift zur Sprache gebracht hätten und der den mathematischen Unterricht in unseren humanistischen Gymnasien betrifft.

Vergleichen wir den Lehrcursus in unseren badischen Gymnasien, welcher von dem anderer deutscher Anstalten gleichen Ranges nur wenig abweichen dürfte, so finden wir für Quarta: „Einfache und zusammengesetzte Zweisatzrechnungen.“ Darunter werden Procentrechnungen, Mischungsrechnungen u. dergl. verstanden. In keiner der höheren Classen wird dagegen ein eigentlicher Rechenunterricht ertheilt. Ist das richtig? Wir bezweifeln es auf das Entschiedenste. Wir wünschten vielmehr die ganze Reihenfolge anders geordnet. Das algebraische Pensum der Untertertia bis zu dem der Obersecunda sollte nach unserem Dafürhalten von Quarta bis Untersecunda abgehandelt werden und könnte es ohne die geringste Schwierigkeit. Den algebraischen Lehrstoff der beiden Primen würden wir den drei oberen Classen mit je einer Wochenstunde weniger als seither zuweisen. Die so frei werdende Stunde beanspruchen wir dagegen in denselben drei Classen für kaufmännisches Rechnen, wie wir statt des vorher erwähnten Namens „Einfache und zusammengesetzte Zweisatzrechnungen“ zu sagen vorziehen würden.

Die Gründe, welche uns leiten, sind folgende. Es ist Thatsache, dass in Quarta bisher gerade die mathematisch begabteren Schüler nur widerwillig dem Unterricht folgen, und es kann kaum anders sein. Auswendig gelernte Rechnungsschemen befriedigen den erwachenden Verstand nicht; für eine genügende algebraische Begründung fehlt aber die Voraussetzung algebraischen Elementarwissens; wie soll da der Knabe Freude an dem Lernen und dem Erlernten haben? Was ist die Folge davon? Unsere Gymnasialabiturienten sind im Allgemeinen nicht im Stande, die einfachste Rechnung eines Bankiers auch nur zu verstehen, und da sie bei ihrem Universitätsstudium diese Lücke nur in den seltensten Fällen ausfüllen, so sind und bleiben sie unwissend auf einem Gebiete von hoher praktischer Bedeutung, auf einem Gebiete, auf welchem sie, falls sie etwa Mathematiker wurden, sogar berufen sind, später Unterricht zu ertheilen, der alsdann auch oft genug entsprechend beschaffen ist. Dazu kommt noch Eines. Der Quartaner ist nicht blos unreif für die Begründung der ihm zugemutheten Rechnungsverfahren, er ist es noch mehr für deren inneren Gehalt. Wir möchten beinahe sagen: erst mit beginnendem Taschengelde, mit beginnender freier Verfügung über kleinere Summen, die dem Erstverfügenden stets gross erscheinen, und um so grösser, wenn sie auf die Neige gehen, erwacht der Begriff des Geldwerthes, der Berechtigung etwaigen Abzuges bei baarer Bezahlung, der Möglichkeit, Geld zu miethen, also auch zu ver-

zinsen. Es kommt das Verständniss des Versicherungswesens gleichzeitig mit eigener oder fremder Erfahrung bei mannigfachen Unglücksfällen. Es bilden sich unter dem Einflusse wiederholter Volkszählungen die Begriffe der Bevölkerungslisten, der Sterblichkeit u. s. w. Kurzum es wächst von Jahr zu Jahr in dem Knaben die Menge eines dem Schulunterricht nicht angehörenden Wissens, welches ihm Interesse und Verständniss für die Aufgaben selbst gewährt, die das kaufmännische Rechnen zu lösen hat, und jetzt erst soll er nach unserem Dafürhalten die Lösungen als nunmehr leichtes Mittel zu einem wichtigen Zwecke kennen lernen. Wir wissen wohl, dass manche Wünsche noch weiter gehen, als die unsrigen. Viele Knaben, sagt man, verlassen das Gymnasium nach zurückgelegter Untersecunda; sollen diese, die theilweise zum Kaufmannsstande übergehen, nie Etwas von kaufmännischem Rechnen kennen gelernt haben? Sollte man nicht um ihrer willen schon in Untersecunda jenen Unterricht und zwar vorzugsweise pflegen? Wir sind der entgegengesetzten Ansicht. Schon heute ist das humanistische Gymnasium in seinen unteren und mittleren Classen schwer überlastet durch eine Vielzahl von Knaben, welche zu ihrem künftigen Lebensberufe viel besser durch die Realschule vorbereitet würden. Soll diese Vielzahl künstlich zu einer Mehrzahl grossgezogen werden dadurch, dass man das Gymnasium in seiner die Zulassung zum Einjährigendienst bedingenden Abtheilung zu einer Vorbereitungsanstalt für junge Kaufleute umwandelt? Gerade das Gegentheil scheint uns nothwendig im Interesse des Gymnasiums und seiner berechtigten Schüler, wie im Interesse der einem nichtgelehrten Berufe Zustrebenden, die vor Halbwissen bewahrt werden sollen, und mehr könnte ihnen der Rechenunterricht der Untersecunda doch nicht gewähren.

Nur eine nebensächliche Frage ist es, wie der nach dem seitherigen Bildungsgange in seine Lehrstelle eingerückte Schulmathematiker den neuen Unterricht werde ertheilen können. Er wird sich eben guter literarischer Hilfsmittel zu bedienen haben, denen er mit leichter Mühe die ihm mangelnden sachlichen Kenntnisse entnehmen kann, während sein mathematisch geschulter Geist die meist etwas mangelhaften Beweise bestens ergänzen wird. Ein solches Hilfsbuch kann ihm auch das uns vorliegende Werk sein, aus welchem wir selbst Manches in der angegebenen Richtung gelernt haben. Leider wimmelt das Buch von Druckfehlern auch in den Zahlenangaben, so dass jedes Beispiel erst der Nachrechnung bedarf, bevor man sich auf die Richtigkeit der mitgetheilten Ergebnisse verlassen kann.

Cantor.

Zinseszins-, Renten-, Anleihen-, Obligationen-Rechnung. Handbuch von V. Baerlocher. Mit 5 Tafeln von Fédor Thoman. Zürich, 1886. Verlag von Orell Füssli & Comp. XXXI, 249 S.

Der Verfasser geht von der in der Vorrede stark betonten Voraussetzung aus, die deutsche Literatur sei in den hier behandelten Fragen hinter der fremdländischen zurückgeblieben. Wäre dem so, so läge in der That ein Bedürfniss vor, die Lücke auszufüllen und durch ein neues Handbuch den nur mit den Anfangsgründen der Algebra bekannten Leser in den Stand zu setzen, die Lehre von den Anleihen — denn diese bildet naturgemäss den Mittelpunkt des Ganzen — im Zusammenhange zu studiren. Weit geringer wird aber dieses Bedürfniss sein, wenn schon seit 40 Jahren ein vortreffliches deutsches Werk vorhanden ist, das eben jenen Zweck zu erfüllen durchaus sich eignet, und dem wir es nicht als Tadel anzurechnen vermögen, dass es auch mit dem Versicherungswesen sich beschäftigt, welches Herr Baerlocher grundsätzlich ausgeschlossen hat. Wir meinen die 1845 im Vieweg'schen Verlag in Braunschweig erschienene „Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen" von L. Oettinger. Der Freiburger Professor hatte, dem Studienplan badischer Cameralisten entsprechend, alljährlich Vorlesungen über politische Arithmetik zu halten, und aus diesen oftmals wiederholten Vorlesungen ist offenbar sein Buch hervorgegangen, welches Referent selbst genauer kennen und schätzen lernte, seit er an der Heidelberger Universität die gleichbenannten Vorlesungen übernommen hat.

Wenn nun die Voraussetzung einer auszufüllenden Lücke unrichtig ist, so fällt es uns selbstverständlich nicht ein, daraus folgern zu wollen, es sei unstatthaft, ein zweites Werk über den gleichen Gegenstand zu schreiben. Höchstens wünschen wir, der Verfasser des zweiten Werkes hätte mit dem vorhandenen Vorbilde sich bekannt gemacht und dasselbe theilweise benutzt. So ist, um nur ein Beispiel hervorzuheben, S. 4 des neuen Handbuches von der Zinseszinsrechnung gesagt: „Sie ist für die Berechnung von grösseren Finanzoperationen, welche sich zumal auf eine lange Reihe von Jahren ausdehnen, wie Staats- und Eisenbahnanleihen, Lebensversicherungen etc., ganz unerlässlich." Fürchtet Herr Baerlocher nicht, ein denkender Leser werde daran die Frage: Warum? knüpfen? Bei Oettinger wird diese Frage beantwortet, und zwar etwa folgendermassen. Ein Schuldner habe Mk. 10000 zu 4 Procent aufgenommen. Am Ende des ersten Jahres zahlt er seinem Gläubiger Mk. 400 an fälligem Zins und die Hälfte seiner Schuld mit Mk. 5000, zusammen also Mk. 5400. Am Ende des zweiten Jahres zahlt er den jetzt fälligen Zins mit Mk. 200 und seine Restschuld mit Mk. 5000, zusammen also Mk. 5200, wodurch er schuldenfrei wird. Die Zahlungen von Mk. 5400 am Ende des ersten und von Mk. 5200 am Ende des zweiten Jahres müssen also zusammen den Baarwerth Mk. 10000 besitzen. Ihn liefert aber die Zinseszinsformel und ist folglich richtig, während Discontirung mit einfachem Zinse, mag er von 100 oder auf 100 gerechnet werden, nicht zu dem Baarwerthe Mk. 10000 führt und folglich falsch ist. Diese schlagende Beweisführung, welcher wir den Eingang in den Schul-

unterricht wünschen und die wir deshalb hier so weitläufig wiederholen, rührt übrigens ihrem Wesen nach von Leibnitz her, der in seinem berühmten Aufsatze von 1683, „De interusurio simplice", noch folgende Betrachtung beifügt. Unzweifelhaft werden 100 zu 4 Procent in einem Jahre 104 und umgekehrt ist der Baarwerth einer am Ende des Jahres zu leistenden Zahlung am Anfang des betreffenden Jahres gleich deren Quotient durch 1,04. Ist daher der Schuldner zunächst mit seinem Gläubiger übereingekommen, ihm am Ende des ersten Jahres 5400, am Ende des zweiten Jahres 5200 zu zahlen, so kann er letztere Zahlung, auf $\frac{5200}{1,04}$ vermindert, auf das Ende des ersten Jahres gleichzeitig mit den 5400 zurückführen. Die $5400+\frac{5200}{1,04}$ am Ende des ersten Jahres sind aber am Anfang desselben infolge ganz ähnlichen Schlusses $\frac{5400}{1,04}+\frac{5200}{1,04^2}$ und ausgerechnet giebt dieses genau 10000 und damit zugleich die bewiesene Zinseszinsformel. Auch den Beweis dafür, dass bei halbjährlicher Zinszahlung die Discontirung über t Halbjahre zum Jahreszinsfuss von p Procent durch Division mittels $\left(\frac{100+\frac{p}{2}}{100}\right)^t$ und nicht durch Division mittels $\left(\frac{100+p}{100}\right)^{\frac{t}{2}}$ gefunden wird, hat Oettinger geliefert, indem er die Uebereinstimmung der ersteren Formel mit allmäliger Schuldabtragung, verbunden mit pünktlicher Zinszahlung, zeigt, auch dieser Beweis verdient gleichfalls allgemeinere Verbreitung. Lässt Herr Baerlocher so an mehreren Stellen naturgemäss sich einstellende Fragen unbeantwortet, so sind dagegen andere Sätze wenigstens in Anmerkungen bewiesen, wie z. B. die Baily'sche Formel S. 52, welche dadurch für den mathematisch gebildeteren Leser mehr wird als eine blosse Regel. Im Ganzen können wir unser Urtheil dahin zusammenfassen, dass das neue Handbuch insbesondere durch die zahlreich ausgerechneten Beispiele und die angehängten Tabellen, wenn dieselben, wie wir annehmen, correcten Abdruck erfahren haben, sich als brauchbar erweist, ohne eine mustergiltige Leistung auf unbebautem Gebiete zu sein.

Cantor.

Graphisch-mechanischer Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen, mit gemeinverständlichen Erläuterungen. Von Dr. C. Reuschle, Professor an der technischen Hochschule in Stuttgart. Stuttgart, Herbst 1885. J. B. Metzler'sche Buchhandlung.

Im XXX. Bande dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 29—30, haben wir über Reuschle's graphisch-mechanische Auflösung von Gleichungen berichtet. Dieselbe beruhte auf der Verschiebung einer auf durchsichtigem

Material angefertigten Curve — einer Apollonischen Parabel — über anderen auf Millimeterpapier hergestellten Curven. Die Zeichnung solcher Curven, auf deren Genauigkeit Alles ankommt, ist nicht gerade Jedermanns Sache. Herr Reuschle hat der Mühe sich unterzogen und der Verleger seiner Druckschrift aus dem Jahre 1884 hat für die Vervielfältigung Sorge getragen. So bilden denn ein grosser Foliobogen steifen Millimeterpapieres und ein kleineres Blatt Gelatinepapier, beide mit wundervoll gezeichneten krummen Linien bedeckt, den heute zum Verkauf bestimmten Apparat, welchem eine kurze populäre Gebrauchsanweisung beigegeben ist. Der Preis mit 2 Mk. 80 Pf. ist für die elegante Ausstattung ein verhältnissmässig nicht hoher.

CANTOR.

Otto Stolz, **Vorlesungen über allgemeine Arithmetik.** Nach den neueren Ansichten bearbeitet. Erster Theil: Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen. Leipzig, 1885.

Die allgemeine Arithmetik konnte bis vor Kurzem, wenn man nicht so glücklich war, ein Colleg darüber zu hören oder wenigstens eine (doch niemals authentische) Ausarbeitung einer solchen Vorlesung zu bekommen, nur aus der überaus kleinen Zahl von Originalarbeiten erlernt werden, wo gerade die ersten Elemente keine Berücksichtigung fanden und wo leise Andeutungen nur dem Reichbegabten über die Schwierigkeiten hinweghelfen konnten. Das soll jetzt besser werden. Zwar vermissen wir es noch immer schmerzlich, dass Herr Weierstrass die Resultate seiner Forschungen noch nicht im Zusammenhang veröffentlicht hat; aber wir freuen uns, dass gerade die letzte Zeit manchen überaus werthvollen Beitrag von ihm in authentischer Form gebracht hat. Vor noch nicht vier Jahren schenkte uns Herr P. du Bois-Reymond im ersten Theile seiner „Allgemeinen Functionentheorie“ (Tübingen 1882) eine sehr anregende Theorie der mathematischen Grundbegriffe, worin namentlich der Grenzbegriff von zwei ganz verschiedenen Seiten beleuchtet war; wenn auch manche Mathematiker den Standpunkt des Verfassers nicht theilen konnten, so mussten sie doch ohne Zweifel der Schärfe und Consequenz seiner Deductionen volle Anerkennung zollen. Jetzt haben wir die angenehme Aufgabe, über das vorliegende Werk des Herrn Stolz Bericht zu erstatten. Der Verfasser ist längst bekannt durch die vielen werthvollen Bereicherungen, welche ihm die Functionentheorie verdankt; seine früheren Arbeiten haben ausserdem gezeigt, dass er mit der Literatur sehr vertraut ist und dass er es namentlich versteht, die Anschauungen der alten griechischen Mathematiker für neuere Forschungen nutzbar zu machen. Wir gingen daher mit sehr grossen Erwartungen an das Studium seines Werkes und wir freuen uns, aussprechen zu müssen, dass dieselben nicht getäuscht worden sind.

Nach dem Vorwort hat der Verfasser denjenigen Lehren, deren Gesammtheit als allgemeine Arithmetik und algebraische Analysis bezeichnet wird, systematisch fortschreitende, den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft überall berücksichtigende Vorlesungen gewidmet, welche er in diesem Werke der Oeffentlichkeit übergiebt. Der vorliegende erste Theil umfasst die Lehre von den reellen Zahlen; auch der zweite Theil ist bereits angekündigt und wird wohl binnen Kurzem zu erwarten sein. Der erste Abschnitt entwickelt den Grössenbegriff in der grössten Allgemeinheit nach Hermann Grassmann und setzt den Umfang unserer Wissenschaft fest. Im zweiten Abschnitt wird die Theorie der natürlichen Zahlen im Anschluss an E. Schröder gegeben; hier möchte ich, allerdings ohne unbedingt zuzustimmen, auf folgenden Passus aufmerksam machen (S. 15): „Die Summe von b Gliedern A ... wird das b-fache von A genannt ... bA ... Wenn auch die erstere eine natürliche Zahl a ist, so betrachtet man das b-fache als das Ergebniss einer Verknüpfung der Zahlen a, b, ..., in Zeichen: $ba = a \times b = a.b$." Der dritte Abschnitt beruht auf Hankel's Betrachtungen über Grössenverknüpfungen im Allgemeinen, jedoch werden neben „gleich" auch die Begriffe „grösser", „kleiner" in formalem Sinne benutzt. Die Verknüpfungen werden als thetische und lytische unterschieden; Zeichen für die ersteren sind dem Verf. $\circ$ und $\odot$, für die letzteren $\smile$. Besonders genau werden die Bedingungen für das associative, das commutative und das distributive Gesetz untersucht. Die Entwickelung wird benutzt, um das System der rationalen Zahlen rein formal zu begründen. Demnach definirt der Verfasser zunächst die rationale Zahl $a:b$ als das Ding, welches existirt, falls a durch b nicht theilbar ist; setzt dann die Begriffe gleich, grösser oder kleiner für diese Zahlen fest und führt entsprechend die Definitionen für die Rechenoperationen ein. Ganz ähnlich gelangt er zur Null und den negativen Zahlen. Warum aber der Verfasser die rationalen Zahlen (S. 53) auch algebraische Zahlen nennt, ist uns nicht recht erfindlich. Nachdem kurz auf irrationale Zahlen aufmerksam gemacht ist, liefert der vierte Abschnitt die synthetische Theorie der rationalen Zahlen, indem der Stammbruch $\frac{1}{b}$ als neue Einheit, Untereinheit eingeführt wird. Während die Vergleichung mehrerer Brüche und ihre Addition sehr natürlich erhalten werden, haftet der Einführung der Multiplication auch hier der formale Charakter an. Aehnlich gelangt der Verf. zu den negativen Zahlen. Daran schliesst sich die Einführung der allgemeinen Decimalzahl oder vielmehr unter Anwendung einer beliebigen natürlichen Zahl $e \geq 2$ die Theorie der systematischen Brüche. Der folgende Abschnitt: Absolute, relative und stetige Grössen, erörtert zunächst, welche Eigenschaften allen Systemen von geometrischen Grössen, abgesehen von der Ausdehnung, zukommen, und stellt dafür fünf Forderungen auf: I. Möglichkeit der Vergleichung nach gleich, grösser und kleiner; II.—IV. Möglichkeit der Addition, der Sub-

traction und der Theilung; V. das „Axiom des Archimedes“: Ist $A > B$, so giebt es ein Vielfaches von B, das grösser ist als A. Die Geometrie der Alten wird in Bezug auf die Grössenlehre einer genauen Prüfung unterzogen, welche beim Anfänger viel zur Klärung des Begriffs und zur Schärfung des Urtheils beitragen wird. Die nach G. Cantor gegebene Definition der stetigen Grössen dürfte wahrscheinlich dem Anfänger sehr grosse Schwierigkeit bereiten; wir möchten den Verf. bitten, diesen Abschnitt in der zweiten Auflage weitläufiger zu gestalten. Im folgenden Abschnitt wird die Theorie der Verhältnisse nach Euklid dargestellt, das arithmetische Verhältniss nur kurz erwähnt, das geometrische aber sehr weitläufig entwickelt. Es ist einerseits der Euklidische Geist, welcher die ganze Behandlung durchdringt; aber zugleich ist die Darstellung so recht das eigenste Werk des Verfassers, so dass wir nicht anstehen, diesen Abschnitt zum genauesten Studium auf's Wärmste zu empfehlen. Derselbe wird nicht nur zu echt mathematischer Bildung beitragen, auch die Analysis, die Geometrie und die allgemeine Grössenlehre wird Nutzen davon haben. Natürlich geht der Verf. weiter als die Alten, indem er das Verhältniss als Zahl auffasst und zeigt, wie damit gerechnet werden kann. Nachdem so die Untersuchung von den verschiedensten Seiten dahin gedrängt hat, das Zahlengebiet über die Rationalzahlen zu erweitern, ist der siebente Abschnitt der arithmetischen Theorie der irrationalen Zahlen gewidmet, und zwar wird die von G. Cantor aufgestellte Theorie entwickelt. Die Darlegung knüpft an die systematischen Brüche an. Da die Bedingungen, unter welchen ein unendlicher systematischer Bruch einen rationalen Werth hat, zunächst entwickelt werden, bietet der Uebergang zum Irrationalen keine Schwierigkeit. Es sei φ_n ein rationaler, von der ganzen Zahl n abhängiger Ausdruck und für jedes n definirt. Es wird angenommen, dass zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl μ von der Eigenschaft gehört, dass der absolute Betrag von $\varphi_{n+r} \dot{-} \varphi_n$ kleiner als ε sei, wenn nur $n > \mu$ ist, was für eine positive ganze Zahl auch r sein mag. Besitzen diese Functionen keinen rationalen Grenzwerth, so denkt sich der Verf. dadurch ein neues, von jeder rationalen Zahl verschiedenes Object gesetzt und zeigt, dass mit diesen neuen Objecten gerechnet werden kann, dass dieselben, zu den Rationalzahlen hinzugenommen, ein stetiges System bestimmen, dass man ferner die Forderung, φ_n solle eine rationale Function von n sein, fallen lassen kann, ohne zu neuen Zahlen zu gelangen, und dass sich jede irrationale Zahl in systematischer Form darstellen lässt. Diese Theorie findet ihre Anwendung in der Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, welche im achten Abschnitt durchgeführt wird. Der folgende Abschnitt: Die reellen Veränderlichen und ihre Functionen, definirt zuerst die untere und die obere Grenze der Veränderlichen, dann deren Stetigkeit, und geht, nachdem er die Function erklärt hat, dazu über, die gebräuchlichsten Arten derselben anzuführen. Der Grenzwerth einer Function wird nach Weierstrass gegeben. Für den Anfänger ist es sehr wich-

tig, wie hier geschieht, angehalten zu werden, dass er wohl darauf achtet, in welcher Weise der Grenzübergang vor sich geht. Es ist eine strenge Schule, die er durchzumachen hat, aber dieselbe ist von sehr grossem Nutzen und wird, ebenso wie die folgende Darlegung über stetige Functionen, durch zahlreiche äusserst interessante Beispiele erleichtert, welche auch an sich, abgesehen von den zu erklärenden Sätzen, hohes Interesse gewähren. Betreffs der stetigen Functionen einer Veränderlichen handelt es sich vor Allem um die Erreichung eines jeden Mittelwerthes, um Erreichung der oberen und der unteren Grenze und um Feststellung der Schwankungen in gegebenen Intervallen. Von den Functionen mehrerer Veränderlichen wird nur das Wichtigste behandelt, namentlich der Grenzwerth und die Stetigkeit. Einen Anhang zu diesem Capitel bildet die Theorie der unendlich kleinen Grössen.

Der folgende, zehnte Abschnitt, welcher den unendlichen Reihen gewidmet ist, umfasst mehr als ein Viertel des ganzen Werkes. Dennoch hat der Verfasser hier eine weise Mässigung in der Begrenzung des Stoffes bewiesen, indem er das Hauptaugenmerk den unbedingt convergenten Reihen zuwendet. Dabei sind diejenigen Reihen, deren Grenzwerth von der Anordnung der Glieder abhängt, in völlig genügender Vollständigkeit behandelt; aber dabei lag die Versuchung nahe, die hierüber in letzter Zeit gefundenen Resultate dem Werke einzuverleiben, welcher Versuchung der Verfasser gewiss mit Recht widerstanden hat. So entwickelt er denn die allgemeinen Gesetze über Convergenz und Divergenz, legt den durchgreifenden Unterschied zwischen absolut und bedingt convergenten Reihen klar, streift kurz die unendlichen Producte und geht dann dazu über, im Anschluss an P. du Bois-Reymond die bisher aufgestellten und auf ganz verschiedenen Wegen hergeleiteten Kriterien für die Convergenz und Divergenz unter wenigen Gesichtspunkten zu vereinigen. Von denjenigen Reihen, deren Glieder von einer Variabeln abhängen, werden natürlich die Potenzreihen am genauesten untersucht, und zwar in Bezug auf Convergenz, auf Gleichmässigkeit der Convergenz, auf Unbestimmtheit an den Grenzen; es werden neue Reihen aus der gegebenen hergeleitet, rationale Brüche in recurrente Reihen verwandelt. Die Reihen mit mehreren Unbekannten werden zur Umkehr von Reihen und zur Auflösung von Gleichungen benutzt. Daneben enthält dieser Abschnitt noch manches interessante Resultat, das wir hier der Kürze wegen nicht berühren konnten. Auch liefert derselbe wiederum zur Erläuterung zahlreiche Beispiele. Die schönste Anwendung aber liefert der letzte Abschnitt, indem er die Potenzreihen für die Exponentialfunction, die Potenz und den Logarithmus behandelt. Eine angenehme Beigabe sind hier ganz gewiss Anleitungen zu möglichst einfacher und genauer Berechnung von Wurzeln und Logarithmen.

Es versteht sich von selbst, dass die Ansichten über die Auswahl und die Behandlung des Stoffes nie ganz übereinstimmen werden. Aber zur

Klärung muss es entschieden beitragen, wenn Jeder recht deutlich seinen eigenen Standpunkt darlegt. In diesem Sinne spreche ich jetzt ganz offen einige Punkte aus, in denen ich dem Verf. nicht beizustimmen vermag. Da muss ich denn gestehen, dass mir auf dem Titel die Worte: „Nach den neueren Ansichten" nicht recht gefallen. In den Ergebnissen, welche durch langdauernde und angestrengte Untersuchungen über Stetigkeit, irrationale Zahlen, unendliche Reihen u. dergl. gefördert sind, erblicke ich eben mehr, als eine blosse Ansicht. Dagegen bin ich überzeugt, dass Grösse, Zahl, Zahlsystem und verwandte Begriffe augenblicklich einer strengern Behandlung noch nicht fähig sind, und möchte demnach hierauf die Worte „Neuere Ansichten" beschränkt sehen. Dieser Unterschied muss durch die ganze Darstellung ausdrücklich hervorgehoben werden, so dass auch der Anfänger sich bewusst wird, wo er es mit Ansichten zu thun hat und wo er auf festem Boden steht. Wir glauben, dass unser Standpunkt von dem des Verf. nicht wesentlich verschieden ist, aber wir zweifeln daran, dass der Anfänger beim Studium dieselbe Ueberzeugung gewinnt. Ueberhaupt legt der Verf. in den ersten Capiteln den Ansichten verschiedener Autoren zu grosses Gewicht bei, ohne deren Mängel scharf genug zu kennzeichnen.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass die erste Einleitung in eine strenge Arithmetik meistens nur geringes Interesse zu erwecken vermag, ja dass die Berechtigung solcher Darlegungen im Anfange vielfach völlig geleugnet wird. Untersuchungen über den Gleichheitsbegriff werden anfangs nur wenige Studirende Interesse entgegenbringen, und dieses wird durch die Hinzunahme des allgemeinen Begriffes „eindeutige Verknüpfung von Grössen" ganz gewiss nicht gesteigert. Da wäre es sehr erwünscht gewesen, wenn der Verf. seine schönen Entwickelungen über „gleich, grösser und kleiner" von geraden Strecken, ebenen Polygonen und Polyedern (S. 74—78) hätte in den Anfang setzen und dadurch die Darstellung beleben und das Interesse steigern wollen. Besonders mache ich auf die Gleichheit von Polygonen aufmerksam. Herr Stolz definirt: „Zwei Polygone sind einander gleich, wenn sie entweder congruent sind oder aus gleich vielen Stücken bestehen, die paarweise congruent sind." Diese wird dann allen Sätzen zu Grunde gelegt. Wir stimmen aus unserer früheren Erfahrung dem Verf. darin bei, dass auf diesem Wege der Unterricht bedeutend gewinnt. (Dabei darf ich wohl eine kleine Bemerkung einschalten. Die Definition benutzt eine ganz bestimmte Zerlegung und eine ganz bestimmte Anordnung der Theile; damit die Definition also erlaubt sei, muss folgender Satz vorausgesetzt werden: Wenn es eine Zerlegung eines Polygons A giebt, für welche eine bestimmte Anordnung der Theile ein Polygon B liefert, so ist keine Zerlegung von A möglich, für welche eine neue Anordnung der Theile ein Polygon C liefert, in welchem das Polygon B als Theil enthalten ist.)

Einigemal führt der Verf. Sätze an oder verweist auf Betrachtungen, welche an der betreffenden Stelle und bei der nothwendigen Kürze schwer-

lich verstanden werden dürften. Das mag sonst angebracht sein; für ein Werk, dessen Aufgabe es ist, zur grössten mathematischen Schärfe zu erziehen, kann es uns weniger gefallen. — Die Literatur ist mit grosser Sorgfalt citirt; nur an einer Stelle, bei Erwähnung derjenigen Linien, bei denen von Länge nicht die Rede sein kann, hätten wir gewünscht, dass die ersten Entdecker angegeben seien.

Für den Studirenden ist das Werk natürlich geradezu unentbehrlich. Wir möchten aber auch diejenigen Collegen darauf dringend hinweisen, denen der Unterricht in den Elementen der Mathematik obliegt. Referent ist lange genug Lehrer gewesen, um ermessen zu können, wie weit die höchste Strenge in den Beweisen für den Unterricht nutzbringend ist, und spricht seine Ansicht unbedenklich dahin aus, dass der Geist, in welchem das vorliegende Werk geschrieben ist, auch für den Schulunterricht der passende ist. Einzelne Partien können direct für die Schule verwendet werden.

Braunsberg. W. Killing.

Bibliographie

vom 1. August bis 15. September 1886.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1886. 1. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

——, Inhaltsverzeichniss zu den Jahrg. 1871—1885. Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. II. 95. Bd., 5. Heft. Wien, Gerold. 5 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. v. A. Krueger. 115. Bd. (24 Nrn.) Nr. 1. Hamburg, Mauke S. compl. 15 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft, herausgeg. von E. Schönfeld und H. Seeliger. 21. Jahrg. 1886, 1. und 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica; ed. R. v. Hanstein. 35. Jahrg. 2. Heft, Juli-December 1885. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 80 Pf.

Reine Mathematik.

Jacobi, C. G. J., Gesammelte Werke. 4. Bd., herausgeg. von K. Weierstrass. Berlin, G. Reimer. 18 Mk.

Sersawy, V., Ueber den Zusammenhang zwischen den vollständigen Integralen und der allgemeinen Lösung bei partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 80 Pf.

Schüler, F., Die allgemeine Derivation, ein neuer Grundbegriff der Functionenrechnung. Ansbach, Brügel & S. 3 Mk.

Gegenbauer, L., Die mittlere Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch eine Summe von bestimmten Vielfachen oder Quadraten. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

——, Ueber die Classenzahl der quadratischen Formen von negativer Determinante. Ebendas. 20 Pf.

Mertens, F., Ueber die Invarianten dreier ternären quadratischen Formen. Ebendas. 35 Pf.

Fuhrmann, W., Wegweiser in der Arithmetik, Algebra und niederen Analysis.) (Formelsammlung.) Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Euclidis opera omnia, edd. L. Heiberg et H. Menge. Elementa, Vol. III. librum X continens. Ebendas. 4 Mk. 50 Pf.

Ameseder, A., Ueber Configurationen und Polygone auf biquadrat. Curven. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Wirtinger, E., Ueber rationale Raumcurven vierter Ordnung. Ebendas. 40 Pf.

Kohn, G., Ueber das Vierseit und Viereck, das Fünfflach und Fünfeck. Ebendas. 60 Pf.

Fuss, K., Sammlung der wichtigsten Sätze aus der Planimetrie und Stereometrie. Nürnberg, Korn. 75 Pf.

Kleyer, A., Lehrbuch der Goniometrie. Stuttgart, Jul. Maier. 7 Mk.

Heinze, K., Genetische Stereometrie, bearb. v. F. Lucke. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Hochheim, A., Aufgaben aus d. analytischen Geometrie der Ebene. 3. Heft: Die Kegelschnitte. Ebendas.
Aufgaben 1 Mk. 20 Pf. Auflösungen 1 Mk. 60 Pf.

Hofmann, F., Die Construction doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken. Ebendas. 3 Mk. 20 Pf.

Angewandte Mathematik.

Ameseder, A., Zur Auflösung der Gleichungen 4. und 5. Grades durch Bewegungsmechanismen. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Roth, F., Der Einfluss der Reibung auf die Bewegungen längs der Erdoberfläche. Halle, Schmidt. 80 Pf.

Lampel, A., Ueber Drehschwingungen einer Kugel mit Luftwiderstand. (Akad.) Wien, Gerold. 45 Pf.

Boltzmann, L., Der zweite Hauptsatz der mechan. Wärmetheorie. Vortrag. Ebendas. 50 Pf.

Oppolzer, Th. v., Entwurf einer Mondtheorie. Ebendas. 2 Mk.

Kühnert, F., Ueber die definitiven Elemente des Planeten Hilda (153). Ebendas. 35 Pf.

Nissl, G. v., Bahnbestimmung des Meteors v. 17. Juni 1885. Ebdas. 30 Pf.

Pizzetti, P., La determinazione degli azimut. Turin, Löscher. 6 L.

Physik und Meteorologie.

Meiser u. Mertig, Anleitung zum experimentalen Studium der Physik. 1. Thl.: Galvanische Elektricität. Leipzig, Baldamus. 1 Mk. 50 Pf.

Mache, J., Ueber die Sichtbarkeit der Doppelsterne. Halle, Schmidt. 40 Pf.

Exner, F., Ueber die Ursache und die Gesetze der atmosphärischen Elektricität. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 50 Pf.

Obermayer, A. v. und M. v. Pichler, Ueber die Einwirkung der Entladung hochgespannter Elektricität auf feste in d. Luft suspendirte Theilchen. Ebendas. 25 Pf.

Hornberger, R., Graphische Darstellungen für den meteorologischen Unterricht. 1. Lief. Kassel, Fischer. 8 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1885.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

1. Zum Schwering'schen Liniencoordinatensystem. W. Krimphoff. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 253.
2. Coordonnées parallèles et coordonnées axiales. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLIV, 110. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 504.]
3. Remarques sur un article de M. d'Ocagne. E. Cesaro. N. ann. math. XLIV, 256. — D'Ocagne ibid. 374.
4. Sur une courbe du 6. degré avec 4 points de rebroussement. H. Brocard. N. ann. math. XLIV, 144.
5. Sur une méthode de transformation. A. Mathieu. N. ann. math. XLIV, 471.
6. Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une courbe peut être une droite, sans que cette courbe soit une parabole. V. Jamet. Mathesis V, 11. — P. Mansion ibid. 11.
7. Propriété de 3 droites menées par les sommets d'un triangle et par un même point. Bastin. Mathesis V, 60. — Liénard ibid. 62. — Radicke ibid. 62.
8. Trouver une courbe plane telle que la projection de son rayon de courbure en un point M, sur une droite fixe du plan, soit proportionelle à la partie de la tangente au point M, comprise entre ce point et la droite fixe. J. Richard. N. ann. math. XLIV, 526.
9. Le centre d'une circonférence se meut sur une parabole, trouver le lieu des points de contact des tangentes à cette circonférence, menées d'un point fixe pris sur l'axe de la parabole. Pisani. Mathesis V, 36.
10. Construction par points de la courbe $x^2(x^2+y^2)-2axy(x+y)+y^2(2a^2-b^2)=0$. Falisse etc. Mathesis V, 260.
11. Propriétés de la cochléoide. J. Neuberg. Mathesis V, 89.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitt. Kreis. Parabel. Quadratur. Singularitäten.

Analytische Geometrie des Raumes.

12. Sur l'hélice osculatrice. E. Cesaro. Mathesis V, 32.
13. Sur la plus courte distance entre deux droites infiniment voisines. E. Cesaro. Mathesis V, 196
14. Reduction der Gleichung des Tetraedroids auf die Form $\sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta}=0$. F. Hofmann. Crelle XCVIII, 264.
15. Zur Gleichung von Kegel und Cylinder. A. Thaer. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 59. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 9.]
16. Sur l'herpoloide. Barbarin. N. ann. math. XLIV, 538.
17. Wann besitzt eine kubische Parabel eine Directrix? O. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 345.

Vergl. Complanation. Ellipsoid. Krümmung. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Tetraeder.

B.

Bestimmte Integrale.

18. Sur le second théorème de la moyenne. P. Mansion. Mathesis V, 97. — L. Kronecker ibid. 99.
19. Quelques formules générales relatives aux intégrales définies et indéfinies. L. A. Mony. N. ann. math. XLIV, 176.
20. Évaluation géométrique de l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{\sin\alpha . dx}{1-2x.\cos\alpha+x^2} = f(\alpha)$. N. Goffart. N. ann. math. XLIV, 171.

Binomialcoefficienten.

21. Eine Verallgemeinerung des binomischen Satzes. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 191.
22. Sur la loi de succession des coefficients dans la formule du binome. G. Fouret. N. ann. math. XLIV, 337.

C.

Cissoide.

23. Sur la cissoide de Diocles. L. Mirman. N. ann. math. XLIV, 372.

Combinatorik.

24. Propriété des combinaisons de $2n$ éléments, n étant de la forme $8m+1$. E. Césaro. Mathesis V, 118.
25. Divisibilité du nombre des combinaisons de n éléments pris p à p par certains facteurs. E. Cesaro. Mathesis V, 84.
26. Sauts du cavalier sur un rectangle de pq cases. J. Neuberg. Mathesis V, 35. Vergl. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Complanation.

27. Aire décrite par un arc de chainette. H. Brocard. Mathesis V, 54. — P. Mansion ibid. 55.
Vergl. Näherungswerthe 148.

Cubatur.

28. Volume d'un prismatoide. Halsted. Mathesis V, 9. — G. J. Latars ibid. 74. Vergl. Näherungswerthe 148. Quadratur 190. Tetraeder 219.

D.

Determinanten.

29. Zur Resultantenbildung. C. Reuschle. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 106, 304.
30. Sur un théorème de Mr. Mansion. E. Cesaro. Mathesis V, 248.
31. Sur le développement d'un déterminant. E. Humbert. N. ann. math. XLIV, 289.

Differentialgleichungen.

32. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. E. Grünfeld. Crelle XCVIII, 333.
33. Ueber die Integration linearer nicht homogener Differentialgleichungen. Wold. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 27, 79.
34. Ueber Integrale transcendenter Functionen. L. Königsberger. Crelle XCVIII, 97.
35. Ueber die Bedingungen, unter denen zwei lineare homogene Differentialgleichungen mehrere partikuläre Integrale gemeinsam haben. E. Grünfeld. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 210.
36. Sur l'équation de Riccati et sa double généralisation. J. de Tilly. Mathesis V, Supplément.
37. Intégration de diverses équations différentielles. H. Brocard. Mathesis V, 130, 156, 169, 224.
38. Intégrer l'équation $(a^2y^2+a^2c^2-c^2x^2)y'^2-2a^2xyy'+(a^2-c^2)x^2=0$. Bastin. Mathesis V, 255. — Radicke ibid. 256.
39. Zur Differentialgleichung $(a_3+b_3x+c_3x^2+d_3x^3)\frac{d^3y}{dx^3}+(a_2+b_2x+c_2x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dx}+a_0y=0$. Wold. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 127.

40. Sur une équation aux différences mêlées. E. Cesaro. N. ann. math. XLIV, 36.
41. Zwei Sätze über die Integrale simultaner Differentialgleichungen. Wold. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 302.
42. Ueber eine Transformation bei linearen simultanen Differentialgleichungen. W. Heymann. Crelle XCVIII, 241.
43. Ueber n simultane Differentialgleichungen der Form $\sum_{\mu=1}^{n+m} X_\mu\, dx_\mu = 0$. O. Biermann. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 234.
44. Sur les équations différentielles linéaires simultanées. De Tilly. Mathesis V, 121. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 559.]
45. Ueber Supplementintegrale. W. Heymann. Crelle XCVIII, 231.

Differentialquotient.

46. Dérivées des fonctions de fonctions. E. Cesaro. N. ann. math. XLIV, 41.

E.

Elektricität.

47. Ueber die Vertheilung der inducirten Elektricität auf einem unbegrenzten elliptischen Cylinder. R. Besser. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 257, 305.

Ellipse.

48. Construction der von einem beliebigen Punkte der Ebene ausgehenden Normalen einer Ellipse. K. Lauermann. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 52. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 64.]
49. Mener dans une ellipse une normale de longueur donnée. Lemoine. Mathesis V, 16. — Gob ibid. 16. — Pisani ibid. 17. — Falisse ibid. 17. — Thiry ibid. 18.
50. Sur les normales à une ellipse. E. Barisien. N. ann. math. XLIV, 476.
51. Sur les projections sur le grand axe d'une ellipse des pieds des quatre normales menées d'un même point à cette ellipse. H. Bassani. N. ann. math. XLIV, 530.
52. Produit des distances des foyers d'une ellipse à une normale à cette courbe. Juhel-Rénoy. N. ann. math. XLIV, 528.
53. Construction du centre de courbure en un point d'une ellipse. A. La Chesnais. N. ann. math. XLIV, 247. — De Saint-Germain ibid. 510.
54. Remarques sur le cercle osculateur à l'ellipse. E. Cesaro. Mathesis V, 7. — J. Neuberg ibid. 8.
55. Théorèmes sur l'ellipse et l'hyperbole équilatère. Juhel-Rénoy. N. ann. math. XLIV, 460.
56. Circonférences coupant en quatre points réels une ellipse par les foyers de laquelle elles passent. N. ann. math. XLIV, 345. — Juhel-Renoy ibid. 498.
57. Théorèmes sur l'ellipse par les foyers de laquelle on fait passer une circonférence variable. G. Boubals. Mathesis V, 157.
58. Propriété d'une certaine corde d'une ellipse. G. Drouod & H. Bagard. N. ann. math. XLIV, 480.
59. Théorème sur deux points situés sur les prolongements de deux diamètres conjugués d'une ellipse. Juhel-Rénoy. N. ann. math. XLIV, 381.

Ellipsoid.

60. Trouver un plan sur lequel la projection orthogonale d'un ellipsoïde donné soit circulaire. V. Jamet. Mathesis V, 187. — Verstraeten ibid. 188.
61. Sur les normales à un ellipsoide partant d'un point. P. Giat. N. ann. math. XLIV, 265.

Vergl. Geometrie (descriptive) 67. Potential.

F.

Formen.

62. Ueber die Classenanzahl derjenigen ternären quadratischen Formen, durch welche die Null rational darstellbar ist. A. Meyer. Crelle XCVIII, 177.

Functionen.

63. Ueber die Lage der Verschwindungspunkte einer ganzen Function. A. Witting. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 274.
64. Zur Theorie der symmetrischen Functionen. A. H. Anglin. Crelle XCVIII, 175.

Vergl. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Formen. Interpolation. Oberflächen 151. Reihen. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten.

G.

Geometrie (descriptive).

65. Sur une lacune qui semble exister au début de la Géométrie descriptive. J. de Tilly. Mathesis V, Supplément.
66. Faire un changement de plan de projection tel que les nouvelles traces d'un plan se confondent sur l'épure en une même droite. Renson & Henrard. Mathesis V, 235.
67. Contour apparent d'un ellipsoïde de révolution allongé par rapport à un plan quelconque. Barbelenet. Mathesis V, 63. — H. Brocard ibid. 64.

Geometrie (höhere).

68. Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme. G. Hauck. Crelle XCVIII, 304. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 641.]
69. Conjugirte Reciprocitäten. Goldschmidt. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 182.
70. Sur les figures semblablement variables. J. Neuberg. Mathesis V, Supplément.
71. Théorèmes de géométrie sur le centre des moyennes distances. X. Antomari. N. ann. math. XLIV, 98.
72. Sur les anticaustiques par réfraction de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe. E. Laguerre. N. ann. math. XLIV, 5.
73. Ueber die Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels. J. Weingarten. Crelle XCVIII, 281.
74. Propriétés élémentaires des faisceaux en involution et leur application à quelques problèmes relatifs aux courbes du second et du troisième degré. J. B. Pomey. N. ann. math. XLIV, 489.
75. Weitere Bemerkungen über den Zusammenhang einer Steiner'schen Aufgabe mit der Hexaederconfiguration. C. Hossfeld. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 116. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 203.]
76. Ueber collineare räumliche Systeme. C. Rodenberg. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 112.
77. Der Doppelpunkt symmetrischer räumlicher Gebilde. R. Heger. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 245.
78. Sur les complexes de droites du premier degré et sur leurs congruences. E. Jaggi. N. ann. math. XLIV, 80, 334.
79. Ueber die Hauptarten der allgemeinen quadratischen Strahlencomplexe und Complexengewebe. Th. Reye. Crelle XCVIII, 284.

Vergl. Kegelschnitte. Kinematik. Singularitäten.

Geschichte der Mathematik.

80. Die von Diophant überlieferten Methoden der Berechnung irrationaler Quadratwurzeln. W. Schönborn. Zeitschr. Math. Phys. XXX, hist.-lit. Abth. 81.
81. Die Ferrari-Cardanische Auflösung der reducirten Gleichung 4. Grades. K. Hunrath. Zeitschr. Math. Phys. XXX, hist.-lit. Abth. 41.
82. Die mathematischen Instrumente des Brescianer Grafen Giambattista Suardi. E. Gelcich. Zeitschr. Math. Phys. XXX, hist.-lit. Abth. 1.
83. Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz. O. Baumgart. Zeitschr. Math. Phys. XXX, hist.-lit. Abth. 169, 241.
84. Sur les travaux mathématiques de Mr. E. Catalan. P. Mansion. Mathesis V, Supplément.
85. Mort de Mr. Lionnet. N. ann. math. XLIV, 56.

Vergl. Reihen 202. Zahlentheorie 242.

Gleichungen.

86. Formules d'algèbre. Résolution des équations du troisième et du quatrième degré. G. H. Halphen. N. ann. math. XLIV, 17.
87. Sur les fonctions homogènes de deux polynomes U et V, premiers entre eux et de même degré en x. L. Mirman. N. ann. math. XLIV, 173.
88. Généralisation d'un théorème démontré dans la théorie du plus grand commun diviseur algébrique. X. Antomari. N. ann. math. XLIV, 194.
89. Équations du 3. et du 4. degré dont on trouve les racines en n'opérant que sur des grandeurs commensurables. Fauquembergue. Mathesis V, 204.
90. Équation du 4. degré n'admettant pas de racine entière. Fauquembergue. N. ann. math. XLIV, 427. — S. Réalis ibid. 429.
91. Sur quelques équations qui n'admettent pas de racines entières. S. Realis. N. ann. math. XLIV, 377.

92. Limites d'une racine de l'équation $f'(x)=0$ située entre les racines α, β de l'équation du degré n: $f(x)=0$. E. Cesaro. N. ann. math. XLIV, 328.
93. Équation ayant toutes ses racines imaginaires déduite d'une autre équation qui n'admet que des racines réelles et simples. E. Cesaro. N. ann. math. XLIV, 321.
94. Démonstration directe d'une identité. Ch. Brisse. N. ann. math. XLIV, 537.
95. Équation pouvant se transformer en $(x-1)(x-2)\ldots(x-n)=0$. Cesaro. Mathesis V, 259.
96. Quatre polynômes entiers satisfaisant à l'identité $X^2Y+Y^2Z+Z^2U+U^2X=0$. Weill. N. ann. math. XLIV, 184.
97. Résolution d'un système d'équations avec 6 inconnues. Falisse & Gob. Mathesis V, 278.
98. Solution d'un système d'équations quadratiques. Gob. Mathesis V, 41. — J. Neuberg ibid. 42.

Vergl. Determinanten. Functionen 63. Geschichte der Mathematik 81. Näherungswerthe 150.

H.

Hyperbel.

99. Engendrement d'une hyperbole. E. Barisien. N. ann. math. XLIV, 502.
100. Déterminer une hyperbole équilatère une asymptote, une tangente et un point de la courbe étant donnés. N. ann. math. XLIV, 532.
101. Projections d'un point quelconque d'une hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit. H. Brocard. N. ann. math. XLIV, 524.
102. Triangle équilatéral inscrit dans une hyperbole équilatère. Moret-Blanc. N. ann. math. XLIV, 382.
103. Théorème sur un triangle rectangle inscrit dans une hyperbole équilatère. N. Goffart. N. ann. math. XLIV, 380.
104. Sécante à deux hyperboles équilatères menée par un de leurs points d'intersection. N. ann. math. XLIV, 434.

Vergl. Ellipse 55.

I.

Integration (unbestimmte).

105 Sur l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$. J. B. Pomey. N. ann. math. XLIV, 193.
106. Trouver l'intégrale $\int \frac{[(x-1)^2-(a+b+1)]\,dx}{(x^2+ax+b)\sqrt{x^2+bx+a}\,(\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+bx+a})}$. E. Cesaro. Mathesis V, 133.

Vergl. Bestimmte Integrale 19.

Interpolation.

107. Sur l'interpolation au moyen des fonctions circulaires. G. Teixeira. N. ann. math. XLIV, 351.

Irrationalzahl.

108. Définition d'un nombre incommensurable. R. Dedekind. Mathesis V, 49.

Vergl. Geschichte der Mathematik 80.

K.

Kegelschnitte.

109. Bemerkungen zum Pascal'schen Satze über Kegelschnittsechsecke. R. Heger. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 279.
110. Sur la théorie des foyers. E. Humbert. N. ann. math. XLIV, 138.
111. Note sur la symédiane. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLIV, 360. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 834.]
112. Sur une généralisation des propriétés relatives au cercle de Brocard et au point de Lemoine. É Lemoine. N. ann. math. XLIV, 201.
113. Construction nouvelle des points d'intersection d'une droite et d'une conique. E. Lebon. N. ann. math XLIV, 338.
114. Conique coupant les trois côtés d'un triangle donné. Droz. N. ann. math. XLIV, 432.

115. Coniques se coupant dans le point de Steiner d'un triangle. H. Brocard. Mathesis V, 208.
116. Sur l'enveloppe des droites qui coupent deux cercles harmoniquement. H. Picquet. N. ann. math. XLIV, 183.
117. Tangentes tirées d'un point fixe à une série de coniques homofocales. V. Jamet. Mathesis V, 37. — Gob & Roersch ibid. 39.
118. Sur des coniques homothétiques. P. Bastin. Mathesis V, 180.
Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Oberflächen 154, 157. Parabel.

Kettenbrüche.

119. Sur certaines fractions de dénominateur ne dépassant pas une limite donnée. J. Neuberg. Mathesis V, 12, 57. — Van den Broeck ibid. 56. — H. Brocard ibid. 76.

Kinematik.

120. Theorie der Bewegung starrer räumlicher Systeme. A. Schoenflies. Crelle XCVIII, 265.
121. Théorèmes de géométrie et de cinématique. E. Dewulf. N. ann. math. XLIV, 79.
122. Ueber die Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme. P. Somoff. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 193.
123. Ueber einen Satz von Burmester. P. Somoff. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 248.
124. Eine Ebene als bewegtes Element. J. F. Wittenbauer. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 216.
125. Ueber die relative Bewegung eines Punktes in einem in continuirlicher Deformation begriffenen Medium. Bobylew. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 336.

Kreis.

126. Propriétés du cercle et de la droite de Brocard. E. Lemoine. Mathesis V, 103.
127. Segment d'un diamètre vu sous un angle droit d'un point donné. E. Chrétien. N. ann. math. XLIV, 519.
128. On donne 3 points en ligne droite A, B, C. Trouver géométriquement le lieu du point d'intersection de deux cercles égaux décrits respectivement sur AB, BC. Henrard etc. Mathesis V, 261.
129. Théorème sur deux circonférences par le point d'intersection desquelles on tire deux sécantes. Gob, Deprez etc. Mathesis V, 262.
130. Sur les droites passant par les deux centres de similitude de deux circonférences données. N. ann. math. XLIV, 105.
131. Second point d'intersection de deux circonférences touchant chacune un autre côté d'un triangle donné et passant par le même point du troisième côté de ce triangle. Blondeel etc. Mathesis V, 189.
132. Trois circonférences dérivant d'un triangle qui se coupent en un même point. Lambert etc. Mathesis V, 233.
133. Trois circonférences dérivant d'un triangle qui se coupent aux deux mêmes points. Lambert etc. Mathesis V, 234.
134. Étant données trois circonférences quelconques dans l'espace, construire une quatrième circonférence s'appuyant sur chacune des premières en deux points. Schoute. Mathesis V, 161.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 9. Cissoide. Ellipse 56, 57.

Krümmung.

135. Beziehungen zwischen den Krümmungen reciproker räumlicher Gebilde. L. Geisenheimer. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 129. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 72.]

L.

Logarithmen.

136. Deux inégalités pour $log\frac{n+1}{n}$. Minoliti. Mathesis V, 35.

M.

Magnetismus.

137. Zur Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus. Th. Häbler. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 119. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 47.]

Maxima und Minima.

138. Reciproke Maxima und Minima. F. Haluschka. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 57.
139. Trouver à l'intérieur d'un triangle ABC, le point M tel que le triangle $A'B'C'$, ayant pour sommets les points de rencontre des côtés de ABC par les droites AM, BM, CM soit Maximum. Bastin. Mathesis V, 87. — J. Neuberg ibid. 88. — De Rocquigny ibid. 89.
140. Droite passant par un point donné d'un plan pour laquelle la somme des carrés des perpendiculaires menées des sommets d'un rectangle donné dans le même plan soit un maximum ou un minimum. Moret-Blanc. N. ann. math. XLIV, 454.
141. Sur le minimum d'un angle duquel on fait tourner une spirale logarithmique autour de son pôle. Timmerhans. Mathesis V, 136.
Vergl. Mechanik 144. Optik.

Mechanik.

142. Ueber die Eigenschaften monocyklischer und anderer damit verwandter Systeme. L. Boltzmann. Crelle XCVIII, 68.
143. Sur l'axe central et l'axe instantané glissant. De Tilly. Mathesis V, 145.
144. Si la somme des carrés des distances d'un point à n droites données est un minimum ces distances représentent un système de forces en équilibre. J. Neuberg. Mathesis V, 277.
145. Sur le coefficient de stabilité des massifs. E. Cesaro. N. ann. math. XLIV, 196.
146. Sur la courbe de Watt. E. Catalan. Mathesis V, 154, 222.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 16. Elektricität. Kinematik. Magnetismus. Mehrdimensionale Geometrie. Optik. Potential. Schwerpunkt.

Mehrdimensionale Geometrie.

147. Die Mechanik in den nicht-Euklidischen Raumformen. W. Killing. Crelle XCVIII, 1.

N.

Näherungswerthe.

148. Näherungsformeln für Inhalt und Oberfläche niedriger Flächenabschnitte. L. Geisenheimer. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 325.
149. Sur l'évaluation approchée des aires planes. G. Petit-Bois. Mathesis V, 5, 27.
150. $x^3 - 2 = (x - \frac{1}{18}z^4)(x + \frac{1}{2}z + \frac{1}{36}z^4)(x - \frac{1}{2}z + \frac{1}{36}z^4)$ à un multiple près de $z^6 + 108$. L. Kronecker. Mathesis V, 102.
Vergl. Geschichte der Mathematik 80.

O.

Oberflächen.

151. Allgemeine Eigenschaften von Flächen, deren Coordinaten sich durch die reellen Theile dreier analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen darstellen lassen. v. Lilienthal. Crelle XCVIII, 131.
152. Flächenerzeugung durch Krümmungslinien. J. N. Hazzidakis. Crelle XCVIII, 49.
153. Sur les ombilics des surfaces. Catalan. Mathesis V, 73.
154. Ueber einige Flächen, welche Schaaren von Kegelschnitten enthalten. A. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 159.
155. Nouvelle propriété d'un système triple de surfaces quartiques homofocales, comprenant comme cas particulier la surface des ondes. A. Legoux. N. ann. math. XLIV, 393.
156. Sur les courbes de tangentes principales des surfaces de Kummer. C. Segre. Crelle XCVIII, 301.
157. Ueber Flächen 4. Ordnung mit Doppel- und mit Cuspidalkegelschnitt. A. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 170.
Vergl. Complanation.

Oberflächen zweiter Ordnung.

158. Ueber einen von Steiner entdeckten Satz und einige verwandte Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. G. Loria. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 291.
Vergl. Ellipsoid.

Optik.

159. Geometrische Beweise des Satzes von der Minimalablenkung im Prisma. H. Vogt. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 111.

P.

Parabel.

160. Théorèmes sur la parabole. C. Bergmans. Mathesis V, 71, 95, 175.
161. Sur la longueur des 3 normales menées d'un point à une parabole. Boubals. Mathesis V, 131.
162. Sur les raccordements paraboliques. M. d'Ocagne. Mathesis V, 25.
163. Parabole tangente à une droite coupant un angle fixe droit en deux points dont les distances à deux points fixes sur les jambes de l'angle sont proportionelles à deux nombres donnés. P. Ruex. Mathesis V, 85. — Pisani ibid. 86.
164. Dans la parabole les segments déterminés sur deux tangentes issues d'un même point de l'axe par deux tangentes quelconques sont égaux. G. Russe. N. ann. math. XLIV, 484.
165. Enveloppe de la polaire du sommet d'une parabole par rapport à une certaine circonférence. Moret-Blanc. N. ann. math. XLIV, 533.
166. Chercher l'enveloppe de la droite qui joint les projections d'un point quelconque de la parabole sur l'axe et sur la tangente au sommet. Ph Gilbert. Mathesis V, 212. — V. Jamet ibid. 214.
167. Trouver l'enveloppe d'une parabole dont le foyer et un point de la directrice sont fixes. J. Richard. N. ann. math. XLIV, 384.
168. Sur trois paraboles enveloppées par les côtés d'un triangle. Minoliti. Mathesis V, 163. — Pisani ibid. 165. — Brocard ibid. 166. — Fr. Falisse 166.
169. Sur un système de paraboles. E. Barisien. N. ann. math. XLIV, 422.
    Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 9.

Planimetrie.

170. Sur les constructions dans le plan et dans l'espace avec la droite seule. De Tilly. Mathesis V, 124.
171. Ueber einen aus der Potentialtheorie hergeleiteten geometrischen Satz. Niemöller. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 251. — Schlömilch ibid. 252.
172. Construction d'un triangle d'après des données dépendant de la division soit d'un angle, soit d'un ou de deux côtés en parties dont on connait la proportion. Blondeel etc. Mathesis V, 189.
173. Construire un triangle connaissant la hauteur, la médiane et le rapport de la base à la différence des deux autres côtés. Thiry. Mathesis V, 18. — Pisani ibid. 19. — Van den Broeck ibid. 19. — Gob ibid. 19. — Sum ibid. 162.
174. Construire un triangle connaissant la hauteur AH, la médiane AM et le rapport $\frac{c-b}{a}=\frac{m}{n}$. Sum. Mathesis V, 162.
175. Projections orthogonales de deux sommets d'un triangle sur une droite passant par le troisième sommet. Leboulleux. N. ann. math. XLIV, 389. — Gerono ibid. 389.
176. Si dans un triangle deux médianes antiparallèles sont égales, le triangle est isoscèle. Gillet. Mathesis V, 34.
177. Théorème sur les points milieux des côtés de deux triangles. F. Pisani. N. ann. math. XLIV, 474.
178. Propriété des bissectrices de deux angles d'un triangle dont les angles sont proportionnels aux nombres 1, 2, 4. H. Brocard. Mathesis V, 92.
179. Sur deux triangles semblables dont l'un est inscrit à l'autre. Cesaro. Mathesis V, 128. — Gob, Henrard, Falisse ibid. 134. — Gob ibid. 135. — Jeřábek ibid. 135.
180. Transversales d'un triangle et d'un tétraèdre se coupant dans un même point. Lez. N. ann. math. XLIV, 385.
181. Propriété du triangle et du cercle circonscrit. Blondeel etc. Mathesis V, 142.
182. Propriétés du triangle et du cercle inscrit. Boedt etc. Mathesis V, 141.
183. Aire du triangle dont les sommets sont les centres des trois cercles exinscrits à un triangle. N. ann. math. XLIV, 485.

184. Sur le quadrilatère harmonique. J. Neuberg. Mathesis V, 202, 217, 241, 265.
185. Construire un quadrilatère, connaissant un angle et les distances du point d'intersection des diagonales aux quatre côtés. Fr. Falisse. Mathesis V, 21.
186. Construire un quadrilatère connaissant les projections du point de rencontre des diagonales sur les côtés. Boedt etc. Mathesis V, 191.
187. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les distances des 4 côtés au point de rencontre des diagonales. Meurice. Mathesis V, 65. — Gob ibid. 69.

Potential.

188. Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids. F. Grube. Crelle XCVIII, 126.

Vergl. Elektricität. Planimetrie 171.

Q.

Quadratur.

189. Quadrature d'une certaine courbe dérivant d'une circonférence donnée. H. Brocard. Mathesis V, 227. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 409.]
190. Généralisation de trois propriétés de la cycloïde. Keelhoff. Mathesis V, 185. — Brocard ibid. 185. — Neuberg ibid. 186.
191. Aire de la courbe $\frac{\varrho}{a}=\frac{r.\cos\omega-a}{r-a.\cos\omega}$. Boubals & Gillet. Mathesis V, 110. — Dewulf ibid. 113. — Neuberg ibid. 115.

Vergl. Bestimmte Integrale 20. Näherungswerth 149.

R.

Reihen.

192. Principe fondamental de la méthode des limites. P. Mansion. Mathesis V, 193.
193. Caractère général de convergence. P. Mansion. Mathesis V, 270.
194. Sur un théorème d'Abel relatif aux séries et sur un développement en série souvent utile en astronomie. A. de Saint-Germain. N. ann. math. XLIV, 159.
195. Sur la discontinuité de certaines séries. A. de Saint-Germain. N. ann. math. XLIV, 331.
196. Généralisation de la série de Lagrange. E. Cesaro. N. ann. math. XLIV, 316.
197. Notes sur le calcul isobarique. E. Cesaro. N. ann. math. XLIV, 59.
198. Sur la série harmonique. E. Cesaro. N. ann. math. XLIV, 295.
199. Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers. E. Cesaro. Mathesis V, 55.
200. Sur une loi symbolique remarquable. E. Cesaro. Mathesis V, 81.
201. Remarque concernant la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. Escary. N. ann. math. XLIV, 101.
202. Limite de $\frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^p+\left(a+\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^p\right]$ pour n croissant indéfiniment. Van den Broeck. Mathesis V, 43. — Fermat ibid. 44.
203. Vérifier que $\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}+\frac{3x^2}{1-x^3}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{x}{(1-x^2)^2}+\frac{x^2}{(1-x^3)^2}+\cdots$ E. Cesaro. Mathesis V, 182. — Radicke ibid. 184. — Catalan ibid. 224.

Vergl. Binomialcoefficienten. Combinatorik 24. Logarithmen.

S.

Schwerpunkt.

204. Transformation des propriétés barycentriques au moyen de la méthode des polaires réciproques. M. d'Ocagne. Mathesis V, 170.
205. Centres de gravité de certaines surfaces planes. Cl. Servais. Mathesis V, 137.
206. Propriétés des centres de gravité de deux triangles. Liénard. Mathesis V, 58.
207. Sur deux triangles ayant le même centre de gravité. Minoliti. Mathesis V, 44.

Vergl. Tetraeder 216.

Singularitäten.

208. Sur la construction des courbes dont l'équation est donnée en coordonnées polaires. Ch. Biehler. N. ann. math. XLIV, 153, 228, 249. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 859.]
209. Quelques réflexions sur l'étude géométrique des courbes géométriques et théorèmes pouvant y être utiles. J. E. Estienne. N. ann. math. XLIV, 87, 131, 297.
210. Sur les points d'inflexion des courbes du troisième et du quatrième degré. J. B. Pomey. N. ann. math. XLIV, 169.
211. Die Curven 4. Ordnung mit 3 doppelten Inflexionsknoten. C. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 1, 65.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 4.

Sphärik.

212. Soient r, r' les rayons sphériques de deux petits cercles tracés sur une même sphère et tangents extérieurement, et soit t la longueur de l'arc de grand cercle qui les touche, démontrer la relation $\sin\frac{t}{2}=\sqrt{tg\,r.tg\,r'}$. E. Césaro. Mathesis V, 117. — Henrard ibid. 118.

Stereometrie.

213. Condition sous laquelle on peut inscrire une sphère dans un tronc de cône. P. Giat. N. ann. math. XLIV, 271.

Vergl. Cubatur. Tetraeder.

T.

Tetraeder.

214. Mémoire sur le tétraèdre. J. Neuberg. Mathesis V, Supplément.
215. Die Ortsfläche der Spitzen gleichseitiger Tetraeder zu gegebener Geraden der Zeichenebene. F. Graberg. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 349. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 447.]
216. Théorème sur les droites menées des sommets d'un tétraèdre aux centres de gravité des faces opposées. Van den Broeck. Mathesis V, 279.
217. Propriété de certains points des arêtes d'une face d'un tétraèdre. A. Geneix-Martin. N. ann. math. XLIV, 481.
218. Les centres des sphères exinscrites à un tétraèdre régulier sont situés sur la sphère circonscrite. Van den Broeck & Liénard. Mathesis V, 117.
219. Volumes de certains tétraèdres. Bénézech. N. ann. math. XLIV, 272.

Vergl. Planimetrie 180.

Thetafunctionen.

220. Ueber die constanten Factoren der Thetareihen. G. Frobenius. Crelle XCVIII, 244.
221. Sur une identité trigonométrique. Hermite. N. ann. math. XLIV, 57.

Trigonometrie.

222. Relations trigonométriques entre les angles d'un triangle. Mathesis V, 23.
223. Relation entre les fonctions trigonométriques des angles d'un triangle. Gillet & d'Hondt. Mathesis V, 236.
224. ABC étant un triangle rectangle en A, et φ étant l'angle compris entre la médiane et la bissectrice menée par B, on a $tg\,\varphi=\left(tg\,\frac{B}{2}\right)^3$. Blondeel. Mathesis V, 139.
225. Expression pour l'aire d'un triangle. Pisani & Gob. Mathesis V, 191, 223.
226. Théorème sur un point O du triangle ABC donnant lieu à l'équation angulaire $BOC-BAC=90^0$. E. Barisien. N. ann. math. XLIV, 386.
227. Sur les projections des sommets d'un triangle sur la bissectrice d'un angle. Colette. Mathesis V, 230.
228. Théorèmes sur les bissectrices d'un triangle et les points dans lequels elles coupent la circonférence circonscrite. P. Giat. N. ann. math. XLIV, 267.
229. Ueber gewisse Schaaren von Dreieckskreisen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 301.
230. Relation entre les rayons de 4 circonférences dérivant d'un triangle. Servais etc. Mathesis V, 257.
231. Relation entre les tangentes des angles sous lesquels on voit d'un point intérieur les côtés d'un carré. Gelin etc. Mathesis V, 237.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 7. Sphärik.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

232. Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. M. Krause. Crelle XCVIII, 148.
233. Note in connexion with the hyperelliptic integrals of the first order. A. Cayley. Crelle XCVIII, 95.

Ungleichungen.

234. Ueber geometrische Ungleichungen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXX, 351.

W.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

235. Quelques problèmes élémentaires relatifs en jeu de dés. Weill. Mathesis V, 152.
236. Loi de probabilité des écarts. Peticol. N. ann. math. XLIV, 441.

Z.

Zahlentheorie.

237. Sur l'interversion des facteurs dans un produit. J. Saurel. Mathesis V, 180.
238. Questions d'arithmologie. De Rocquigny. Mathesis V, 78. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 498.]
239. Généralisation de l'identité de Mrs. Tchebychew et de Polignac. E. Cesaro. N. ann. math. XLIV, 418.
240. De la partition des nombres. J. B. Pomey. N. ann. math. XLIV, 408.
241. Scolies pour un théorème de Fermat. S. Realis. N. ann. math. XLIV, 367.
242. Sur un théorème inexacte de Sophie Germain. A. Genocchi. N. ann. math. XLIV, 148.
243. Sur les puissances des nombres. W. Th. Lewy. N. ann. math. XLIV, 235.
244. Sur les restes d'un nombre divisé par chacun des nombres qui le précèdent. L. M. N. ann. math. XLIV, 473.
245. Si x est compris entre 0 et 1 on a $[E(x)]^p + \left[E\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]^p + \cdots + \left[E\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\right]^p = E(nx)$. Van den Broeck. Mathesis V, 65. — E. Cesaro ibid. 65.
246. n et p étant deux nombres entiers positifs $a^{2(n+p)+1} + (a^2-1)(a^2-a-1)n - a^{2p+1}$ est divisible par $(a^2-1)^2$. J. Romero. N. ann. math. XLIV, 483.
247. $p^{8n} + 3p^{4n} - 4 = M.25$ si p est premier avec 5. Lemoine. Mathesis V, 67. — Jamet ibid. 68.
248. Sur quelques équations indéterminées. Weill. N. ann. math. XLIV, 189.
249. Sur une identité algébrique contenant un nombre premier p et sur la valeur $p=7$ qui seule la vérifie. Catalan. N. ann. math. XLIV, 520.
250. Décomposer $2(a^4 + a^3b + 4a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ en trois et en quatre carrés. Gob. Mathesis V, 20. — Henrard ibid. 21.
251. Le nombre des solutions entières non négatives de $p^2x + (p+1)^2y = [(p+1)^2 - p^2]n - p^2$ où $p = 1, 2, \ldots$ est égal à n. Gillet. Mathesis V, 59.
252. Solutions en nombres entiers de l'équation $\frac{x^2+2}{5^2} = y$ ou l'on suppose x impair. N. ann. math. XLIV, 431.
253. Condition sous laquelle $x^3 + k = y^2$ admet toujours une solution entière. Fauquembergue. N. ann. math. XLIV, 379.
254. Déterminer α, β, γ par l'équation $\alpha^2(\alpha+\beta)^2 - \alpha^4 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - (\alpha+\beta)^2$. Van den Broeck. Mathesis V, 20. — Cesaro ibid. 228.

Vergl. Combinatorik 24, 25. Geschichte der Mathematik 83. Kettenbrüche.

INHALT.

Seite

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ueber die Entdeckung der Variation und der jährlichen Gleichung des Mondes.

Von

C. Anschütz, S. J.

(Fortsetzung.)

3. Kepler ist der Entdecker der jährlichen Gleichung des Mondes.

Wir kommen jetzt zu dem interessantesten Ergebniss unserer Nachforschungen[1]), interessant besonders deshalb, weil Kepler zu dieser Entdeckung nicht auf rein empirischem Wege gelangte, sondern sozusagen *a priori*, und daher einer jener merkwürdigen Fälle vorliegt, in denen Kepler's Genie fast instinctiv das Richtige ahnte. Es wird daher das Beste sein, hier der historischen Entwicklung zu folgen.

Das erste Aufleuchten dieses Gedankens finden wir schon im Briefwechsel mit Mästlin[2]), den Kepler, veranlasst durch die Sonnenfinsterniss vom 7. März 1598, über die grossen Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung mit diesem führte. Zu Kepler's Obliegenheiten als Landschaftsmathematiker von Steiermark gehörte auch die Abfassung von Kalendern. Im Kalender für 1598[3]) schrieb Kepler im zweiten Capitel: „Von Finsternussen", unter anderem wie folgt[4]): „Zum andern begibt sich ein sehr grosse Finsernuss an der Sonnen, den 7. Martij im 16. grad der ♓ bey dem Drachenhaupt[5]), nämlich bey dem Creützweg, da der Mond vber die Sonnenstrass gegen Mitternacht herauffwertz, vnd vns vnter das liecht laufft. Solle sich anfahen ein viertl vor neün Vhr, vnd ein kleins nach

1) Frisch scheint dies ganz entgangen zu sein, was bei der Masse des von ihm verarbeiteten Materials begreiflich ist. Auch sind die Stellen in den von mir aufgefundenen Briefen auffälliger als alle übrigen.

2) O. O. II, 16 flg.

3) „Schreib Calender auff das Jahr nach dess Herrn Christi vnsers Erlösers Geburt MDXCVIII. Gestelt durch M. Joannem Kheplerum, Einer Ersamen Landschafft dess Herzogthumbs Steyr Mathematicum."

4) O. O. I, 396 flg.

5) Aufsteigender Knoten der Mondbahn.

eilff vhr widerumb verschwinden. Die Astronomische raittung[1]) gibt sie so gross, dass nicht mehr als der 24. theil von der Son, das ist ein sehr kleines hörnl, hervor bleiben solte. Derowegen so es müglich wäre, dass ein Mensch etwa an einem ort im Himmel stünde, vnd auff die Erd herabschawet: würde er dieselbe mit einem schwartzen runden Fleck verfinstert sehen, wölcher Fleck in wenig stunden durch die *Canarias Africam* vnd *Hispaniam* Sardinien Sicilien Griechenland Aegypten Jerusalem Babylon vnd Persien in einem strich durchschweiffen würde: da dan an allen erzelten orten sinckende nacht erfolgen muess. Sol doch abermahl den verstand haben, dass die Astronomische Calculation also beschaffen, dass wie die Monds Finsternuss speter, also die fürhabunde ☉ Finsternuss auch wol vmb 1 halbe stund früer[2]) vnd kleiner, oder villeicht gar bedeckt erscheinen mag. Dem sey nun wie jm wölle, so ist einmal gewiss, dass in vnsern Landen mehr dan in fünfftzig jaren kein grossere verfinsterung an der ☉ gesehen worden: derowegen dan alle die kunst erfahrne ein schön, die vnwissende aber ein schröcklich spectakel haben, vnd an hohem tag die stern am Himel, sonderlich *Venerem* vnd *Mercurium* nach der Son, vnd *Jovem* im auffgang sehen werden. Wo es sich aber begäbe, das (wie gehört) die Sonnen gantz bedeckhet, oder nur der Himmel mit wolcken vberzogen würde, so geben vnss etliche vmbstände gewisse anzeigungen, das kein finsterere nacht im gantzen Jahr gewest, also finster derselbige Tag werden solle. Doch weret solche dicke Finsternuss nicht vber ein viertl stund, wiewol sich die ganze verdunckelung vor vnd nach in die zwo stund vnd ein viertl verziehet."

Kepler hatte also zwar einige kleine Clauseln angebracht, da er von der Unzuverlässigkeit der damaligen Mondtafeln bereits Proben kannte; aber er hatte doch die Erwartungen und theilweise die Befürchtungen seines Publikums auf's höchste gespannt. Er selbst verfehlte nicht, rechtzeitig sich in Bereitschaft zu setzen, um die Beobachtung möglichst genau anzustellen. Letzteres gelang nun nicht ganz nach Wunsch, weil der Himmel stark bewölkt war[3]); aber ein um so „schröcklicheres spectakel" und eine um so „finsterere nacht" musste er erwarten. Es kam aber ganz anders. „Ein viertl vor neün Vhr" sollte die Finsterniss anfangen, sie begann in Wirklichkeit etwas vor $10^1/_4$ Uhr[4]); ihre Dauer hatte Kepler zu etwas über

1) Kepler bediente sich für diesen Kalender der Tafeln des Magini.

2) Welchen Grund Kepler gerade zu dieser Vermuthung hatte, konnte ich nicht finden.

3) „*Coelum turbidissimum fuit, et mane ninxerat. Itaque... rarissimos ex praeterlabentibus nubibus excepi fulgores*". Brief an Mästlin vom 15. März 1598 (O. O. II, 16).

4) L. c.

$2^1/_4$ Stunden veranschlagt, und sie dauerte ungefähr $2^1/_2$ Stunden [1]); er hatte aus Vorsicht bemerkt, die Finsterniss könne vielleicht $^1/_2$ Stunde früher beginnen, und sie trat um etwa $1^1/_2$ Stunden zu spät ein. Das waren schlimme Vorzeichen, und es ist natürlich, auch wenn Kepler uns dies nicht ausdrücklich sagte [2]), dass er in höchster Spannung die „grosse Finsternuss" erwartete und erhoffte. Auch das schlug fehl. Die ganze Verfinsterung beschränkte sich auf eine kaum wahrnehmbare Abnahme des Tageslichtes [3]). Dazu hatte Kepler dieselbe durch die Angabe der Totalitätszone als südlich bezeichnet, und sie war nördlich [4]).

Dieses gewaltige Missgeschick machte Kepler höchst bestürzt. Seine Reputation stand auf dem Spiele, und dies am Anfange seiner Laufbahn! Er musste sich, wenn er nicht allen Credit verlieren wollte, im nächsten Kalender rechtfertigen. Die Zeit war kurz gemessen, und er sollte den Grund angeben, warum die bisherigen Mondtafeln so mangelhaft seien, also die Mondtheorie umgestalten. Rathlos wendet er sich an seinen Lehrer Mästlin und bittet ihn dringend, ihm aus der Verlegenheit zu helfen [5]). Mästlin war jedoch selbst sehr unglücklich in der Beobachtung gewesen, da er die Sonne nicht einmal zu sehen bekommen hatte [6]). Er machte aber Kepler darauf aufmerksam, dass die starke Verspätung der Finsterniss das Wichtigste sei, und dass durch Erklärung dieser sich das Uebrige von selbst ergebe; aber wie diese Erklärung zu lauten habe, das kann er nicht angeben [7]). Er bemerkt nur, dass die Erklärung aus Kepler's

---

1) So glaubte wenigstens damals Kepler (L. c. S. 18: „*Desiit paulo post 12¾*". O. O. II, 364 schreibt er jedoch schon [in der „Optik"]: „*Sane cum desiisset, paulo post sonuit tertium quadrantem post duodecimam*"); O. O. II, 441, Note 102 heisst es aber: „*In Tabulis Rudolphinis* (S 110) *Keplerus hanc eclipsin eligit, ex qua rationem ostenderet computandi eclipsin Solis ad certum locum. Durationis tempus exhibet hic* = $2^h\,21^m$, *addens: Durationem quidem in Opticis prodidi longiorem, at manifesta hallucinatione, dum principium non observatum legitime, fini comparavi minime comparandum*". Damit ist auch die Schwierigkeit beseitigt, wie eine längere Dauer und eine kleinere Phase sich vereinigen lassen.

2) L. c. S. 17: „*Cum ego multum anxius optabam tenebras, quae sequi nolebant*".

3) L. c.: „*Vix enim exigua illarum* [*tenebrarum*] *in observatorum oculos incurrerat animadversio. Sic autem erat diminuta lux, ut cum pluvia aliqua (non tamen ut in magna tempestate) instat, cum tamen nubes non essent undique crassae, quae hoc causari potuissent.*"

4) L. c.: „*borealis fuit, cum australem dixerit calculus*".

5) L. c. S. 16: „*Literas tuas, Clarissime D. Praeceptor accepi ea hora, qua redii ab observatione eclipsis Solaris. Itaque ab illa incipiam, et majorem in modum te rogo, si nullum aliud verbum, saltem de hoc mihi nonnihil respondere digneris. Etenim ex illa me simpliciter expedire non possum*".

6) O. O. II, 20.

7) L. c.: „*Quae vero hujus tardioris apparitionis causa sit, scire non possum*".

Ansichten über die Ursache der Planetenbewegung[1]) nicht möglich sei, und der Grund in den fehlerhaften Sonnentafeln gesucht werden müsse. Kepler war anfangs hocherfreut über letztere Bemerkung, er glaubte so die Verantwortung von sich abwälzen zu können, aber auch dies, wie es scheint, nur im ersten Augenblick[2]). Die Verantwortung für Kepler's Erklärung zu übernehmen, lehnte zudem Mästlin im folgenden Brief ab, indem er seine vielen Beschäftigungen vorschützte[3]). Kepler war daher auf sich selbst angewiesen, und durfte auch keine Zeit mehr verlieren, da der Kalender für 1599 fertig gestellt werden musste[4]). Ein rascher Entschluss that noth. So gab er denn dem Kalender für 1599 als Anhang einen „Bericht an den günstigen Leser“ bei, in dem er sich folgendermassen äussert[5]): „Von der grossen Sonnen-Finsternuss vnd besorgten verkherung des Tags in die Nacht, so den 7. Martji des 98isten Jahrs geschehen sollen, hab ich wol ein besonder bericht und tractätl geschriben. Weil aber dasselbig etwas lang, vnd nit jedermann angenäm zu lesen sein möchte, hab ich hie allein einen auszug desselbigen einbringen wöllen. Nämblich ist dieselbige, wie auch die vorhergehende Monds-Finsternuss im Februario, und der nachfolgende volmond auffn Ostertag mehr dan ein gantze stund später: hingegen aber die Monds-Finsternuss im Augusto früer erschinen, dero wegen notwendig folgen müssen[6]), das die Sonne nicht zwölfft-halb puncten, sondern nur neun oder zehenthalb verfinstert werde, vnd die schmelerung des tagliechts gleichwohl gespürt, aber doch keinner nacht zu vergleichen gewest: Auch nicht im Mittelländischen, sondern im gefrornen Meer hinter Schotland, Norwegen, Moschau etc. am grössisten erschinen sey[7]) ... Die Vrsach aber, warumb ich mit der Zeit vil verfehlet, ist nicht bey mir oder einem andern Astrologo, die wir miteinander vbereingestimmet, sondern bey unsern Patriarchen Copernico vnd der noch mangelhafften Astronomia zu suechen[8]) ... Der nächste weg aber zur

---

1) Der Anfang dieser Kepler'schen Hypothese, die später von ihm in einer Weise ausgebildet wurde, die einige Aehnlichkeit mit der Gravitationstheorie zeigt, fällt in das Jahr 1595. Vergl. Brief an Mästlin vom 3. October 1595 (O. O. I, 13).

2) „*Enim vero ego discurro, tuum est statuere: scribo enim impraemeditatus*“. Brief an Mästlin vom 11. Juni 1598 (O. O. II, 23).

3) „*Plura de his jam cogitandi et scribendi me brevitas temporis et occupationes impediunt, praesertim examen candidatorum* etc.“ Brief vom 14. Juli 1598 (O. O. II, 24).

4) Die Vorrede ist vom 1. September 1598 datirt (O. O. I, 403). Dies und die gleich folgende Erwähnung der Mondsfinsterniss vom 16. August weisen auf die zweite Hälfte August als die Entstehungszeit der Hypothese hin.

5) O. O. I, 408 flg.

6) Vergl. oben den Rath Mästlin's.

7) Hier folgt astrologisches.

8) Die ausgelassene Stelle kann man am kürzesten als „*Keplerus pro domo sua*“ bezeichnen.

verbesserung, dardurch die Finsternussen in künfftiger zeit gewisser ausgeraitet werden möchten, ist meines Beduunckhens diser, das man setze vnd lehre, **dass ein Natürlicher Monat oder lauff des Monds von der Sonnen bis wider zu derselben, zu winters zeitten caeteris paribus ein wenig länger vnd langsamer seye, dan zu Sommers zeitten,** vnd also dem Mondslauff die schuld geben werd, vnd nicht der Sonnen, an deren man ohne grosse zerrüttung nichts hierzu Dienstliches reformiren khan.

Ob aber die vngleichheit an des Monds Himmel selbsten, oder an der veränderten Mensur vnd Tagleng[1]), *ita ut dies naturalis hybernus aestivo sit brevior:* vnd was dise gantze vngleichheit in der natur vnd Copernici Philosophia für grund habe[2]), lesst sich mit so kurtzen worten nicht entdeckhen."

Kepler führt eine sehr sichere Sprache, so dass man versucht wäre zu glauben, er sei wirklich schon mit der angekündigten Reform der Mondtheorie im Reinen gewesen. Ein Brief an Mästlin[3]) zerstört gründlich jede solche Illusion. Was zunächst den „langen Tractat" betrifft, den Kepler geschrieben haben will, so sah es damit nach seinem eigenen Geständnisse schlecht genug aus: der Tractat existirte gar nicht.[4]) Auch die Lösung, die er gab, war nur aus dem Grunde gewählt, weil er glaubte, dieselbe leichter gegen allfallsige Angriffe vertheidigen zu können, als eine Aenderung in den Elementen der Sonnen- (resp. Erd-) Bahn; andererseits wollte er vor allem die Folgen abwenden, die sein Missgeschick für seine Stellung, also zuletzt für seinen Geldbeutel, haben konnte. Angriffe besorgte er überhaupt nicht, da er es nicht für wahrscheinlich hielt, dass ein Exemplar des neuen Kalenders seinen Weg nach Deutschland finden werde. Die Sache klingt so abenteuerlich, dass ich mich durch Vorlegen des Textes rechtfertigen will. Kepler schreibt[5]): „Es steht Vieles darin [im Kalender],

---

1) Hier sind schon beide Wege angegeben, deren erster uns zunächst, deren letzter uns am Schlusse beschäftigen wird.

2) Vermuthlich wusste ihn Kepler, als er dieses schrieb, selbst noch nicht, und fand ihn erst später aus Noth.

3) Vom 8. Dec. 1598 (O O. I, 409 flg.).

4) „*Magna sum usus immodestia, si prodeat hoc prognosticum in Germaniam. Audacter polliceor, ostendere me posse tractatum integrum de ea* [*de eclipsi*], *qualis rero tractatus? Nullus adhuc, si verum fatear. Sed tamen, si quis peteret, Maestlini literae pro me loquerentur, ubi maxime necesse esset. Nam statim mense Martio scripsi ad tres paginas, petentibus ita quibusdam Abbatibus, sed populariter sine computo seriem explicavi natae paulatim artis* [also eine populäre Geschichte der Astronomie] *ex observationibus, hypothesibus, tabulis, ephemeridibus usque ad prognostica* [welch' eine Gradation!]: *addidi descriptionem meae observationis, omnia ad meum commodum meique officii fundationem direxi. Nemo tamen id quod scripsi vidit*". L. c. S. 410. Also auch „*Keplerus pro domo sua*".

5) L. c. S. 409 flg. (Bei dieser Stelle vermied ich absichtlich jede Unterstreichung, da ich nicht weiss, welchem Satz ich den Vorzug geben soll): „*Multa sunt in eo, quae aut excusanda sunt diligenter, aut meae nocebunt existimationi apud*

wegen dessen ich mich dringend entschuldigen muss, wenn es nicht meinem Rufe bei dir schaden soll. Kurz gesagt: Ich schreibe nicht für das Volk, auch nicht für Gelehrte (mit wenigen Ausnahmen), sondern für Adelige und Prälaten, die sich einbilden Kenntnisse zu haben, die ihnen abgehen. Mehr als 400 bis 600 Exemplare werden nicht ausgegeben, keines davon wird die Grenze dieses Landes überschreiten. Ich brauche also vor dem Urtheil der Gelehrten in Deutschland nicht bange zu sein. Meine einzige Absicht ist, die Wahrheit zu meinem Vortheil zu verwenden. In allen Kalendern verfolge ich nur den einen Zweck, durch die mir gerade kommenden Gedanken, die mir wahr zu sein scheinen, meinen oben charakterisirten Lesern den Genuss der Schönheit und Erhabenheit der Natur zu vermitteln, in der Hoffnung, sie würden so geneigter, mir einen grösseren Gehalt zu gewähren. Diese Entschuldigung muss ich auch auf den Anhang über die Sonnenfinsterniss ausdehnen." [1])

Nach solchen Geständnissen glaube ich Kepler nicht Unrecht zu thun, wenn ich die Behauptung aufstelle, dass sein gutes Glück und sein unvergleichliches Talent ihn unbewusst zu einer Entdeckung hindrängten; jedenfalls war er sich damals nicht über die Tragweite seines kühnen Griffes klar. Er hatte aus ein paar Beobachtungen, die ihm gerade zur Hand waren, eine Verspätung der Finsternisse im Winter, eine Verfrühung im Sommer gefunden, und war beim Nachdenken über die mögliche Ursache auf drei verschiedene Hypothesen gekommen: Entweder lag die Schuld an der unrichtig bestimmten Excentricität der Erdbahn; oder die tägliche Bewegung der Erde (um ihre Achse) ist im Winter schneller als im Sommer; oder der Mondlauf musste im Winter langsamer sein. Kepler entschied sich für letzteres, und damit für das Richtige; aber ausser einer einzigen Beobachtung, die auf diese Wahl hinwies, hatte er nur Opportunitätsrücksichten.[2]) Hätte sich Kepler's Hoffnung erfüllt, und wäre sein Kalender wirklich nicht über die Grenze gekommen, wer weiss, ob Kepler den Gedanken nicht als Nothbehelf nach Beseitigung der Gefahr vergessen hätte. Aber sein Glück, das er allerdings zuerst für ein Unglück ansah, war für ihn thätig. Der bayerische Kanzler Herwart von Hohenburg, ein

te. Summa haec est: scribo ego non vulgo, neque doctis [nisi paucissimis], sed nobilibus et praelatis, qui scientiam aliquam sibi arrogant rerum, quas nesciunt. Ultra 400 vel 600 exemplaria non distrahuntur. nullum extra limites harum provinciarum effertur. Itaque mihi, ... a doctis per Germaniam non est metuendum. Id unum ago, ut veritatem ego ... ad meum commodum dirigam. In omnibus prognosticis id ago, ut de promptis sententiis, quae mihi verae videntur, gustum aliquem jucundidatis et majestatis naturae praebeam illis supra definitis meis lectoribus: si forte per hoc excitentur ad me tanto majori cum salario alendum ... Eadem excusatio pertinet etiam ad appendicem de eclipsi".

1) Das Vorhergehende bezieht sich nämlich zunächst auf die astrologischen Prophezeihungen.

2) Um mich nicht zu wiederholen, verweise ich auf den folg. Brief Kepler's.

Gönner Kepler's und ein Freund und Beförderer der Wissenschaften, hatte sich ein Exemplar des Kalenders zu verschaffen gewusst, und hatte nichts Eiligeres zu thun, als sich an Kepler um weitere Aufklärung zu wenden; Kepler hatte ja schon einen „langen Tractat" fertig! Den 2. Januar 1599 schreibt Herwart an Kepler[1]): „Was der Herr in seiner Practica[2]) zu End derselben *de tempore et quantitate, ☌ et ☍ luminarium et eclipsium* discuriert, hab ich gern gelesen, und vernimme, dass etliche Mathematici in Saxen, alda man die bedeutte jüngst beschehene grosse Finsternuss *coelo sereno* wol gesehen, *id ipsum* observiert haben sollen, das nemlich die Sonn dermahlen nicht von unden, sondern von oben her bei $\frac{3}{4}$ verfinstert worden. Bitt um Erleuterung dieser ***anomalia,*** wie sie ***ad hypothesin Copernici*** zu accommodiren." Hier war kein Ausweichen mehr möglich. Kepler versuchte also, auch bestärkt durch die von Herwart mitgetheilte Bestätigung, seine Position zu halten, und fand in seinem reichen Geiste Mittel genug, dies zu unternehmen. Sein Brief, vom 29. Januar[3]), zeigt bereits eine grössere Klarheit und consequente Durchführung seines Gedankens. Im Eingange dankt er für die mitgetheilte Beobachtung, und bittet Herwart, ihm alle Beobachtungen zukommen zu lassen, die er auftreiben könne, denn nur so lasse sich eine Reform gründlich durchführen. Dann fährt er fort[4]): „Es ist zwar nicht möglich, über diese jährliche Ungleichheit in den Finsternissen sich endgiltig auszusprechen, ohne jahrelange Vorarbeiten gemacht, Alles genau erwogen, alle Elemente der Berechnung der Finsternisse eingehend untersucht, sämmtliche Finsternisse aller Zeiten mit den Prutenischen Tafeln verglichen zu haben; aber ein Vorpostengefecht kann ich doch der Geistesübung halber annehmen."

Das Folgende werde ich für den Anhang verwenden, wohin es gehört. Kepler fährt dann fort[5]): „Wir wollen jetzt die Ursache dieser Ungleichheit aufsuchen. Es giebt drei Himmelskörper, deren Bewegungen für die Messung der Zeit des Eintrittes der Finsternisse dienen, nämlich: Sonne, Mond und das Erste Bewegliche (um mich der Ausdrücke der gebräuch-

1) O. O. I, 412.

2) Im Kalender nämlich.

3) O. O. I, 412 flg.

4) „*De annua hac eclipsium anomalia, etsi non est [ante multorum annorum labores continuatos, omnia probe perspecta, omnia calculi ecliptici fundamenta ad amussim revocata, omnes omnium temporum eclipses ad calculum Prutenicum reductas] quicquam pronunciandum, ingenii tamen gratia licebit serio certamini praeludere*".

5) „*Et propositum nobis esto, causam reperire hujus anomaliae. Cum ergo tria sint corpora, tres motus ad noviluniorum tempora dimetienda concurrentes, puta Solis, Lunae et primi mobilis [ut terminis usitatarum hypothesium utamur], singula singulas nobis praebeant suspiciones. Nam dum vernalia novilunia aut plenilunia tardius revera veniant, quam in calculo praedicuntur, autumnalia citius: si causa in Solis motu est, oportet Solem verno tempore longius in consequentia distare, quam a calculo proditur, autumnali brevius*".

lichen Hypothese zu bedienen)[1]; jeder von diesen giebt zu einer andern Conjectur Veranlassung. Denn da die Syzygien im Frühjahr später eintreten, als die Berechnung sie angiebt, im Herbst früher[2]), so muss, wenn der Lauf der Sonne die Ursache sein soll, die Sonne im Frühjahr dem von den Tafeln angegebenen Orte der Ekliptik vorausgeeilt, im Herbst zurückgeblieben sein.“ Dies wird an einer Figur erläutert und gezeigt, dass diese Conjectur eine fast doppelt so grosse Excentricität der Sonnenbahn zur Voraussetzung habe, als sie bisher angenommen wurde[3]). Dafür kann sich Kepler nicht entscheiden; denn dann müsste das Kreissegment der Sonnenbahn für die Wintermonate noch kleiner und für die Sommermonate noch grösser ausfallen, als die Beobachtung der Aequinoctien ergiebt; ein Fehler in dieser sei jedoch nicht wahrscheinlich. Oder aber man müsste zugeben, dass der Sonnenlauf nicht gleichförmig, sondern ungleichförmig sei[4]). Wer etwa geneigt wäre, dies nicht für absurd zu halten[5]), dem bringe er ein anderes Argument, das beweise, dass die Sonne nicht die Schuld trage. Der Ostervollmond sei zugleich mit Saturn durch den Meridian gegangen, während er nach den Tafeln vor Saturn den Meridian passiren musste. Hier könne von einem Einflusse des Sonnenlaufes nicht die Rede sein[6]). Endlich weist Kepler noch hin auf die Consequenzen, die eine solche Veränderung im Sonnenlaufe habe, und die er nicht tragen wolle.

„Wir kommen jetzt zum Mond selbst[7]), den die Beobachtung des Ostervollmondes offenbar als den Schuldigen verräth. Ich nehme daher an,

---

1) Der Ptolemäischen. Copernicus setzte an Stelle der täglichen Umdrehung der Fixsternsphäre die Achsendrehung der Erde.

2) Man beachte, dass Kepler hier bereits richtiger Frühjahr und Herbst setzt, während im Kalender noch „Winterszeit“ und „Sommerszeit“ steht, ohne Unterscheidung der Ursache von der Wirkung.

3) Genau so gross ist die Wirkung der elliptischen ungleichförmigen Bewegung (in Bezug auf Kreisbewegung). Dieselbe würde somit den Fehler der Berechnung ausgleichen. Hätte also Kepler damals sein I. und II. Gesetz bereits gekannt, so hätte er diese Mondgleichung wohl nie gefunden!

4) Diese sehr richtige Annahme wurde leider von Kepler nicht verfolgt; sonst hätte sie ihn wohl zu sehr wichtigen Consequenzen geführt, und auch für diesen Fall mehr genützt als die neue Mondgleichung, welche er allein verfolgt.

5) Die „Vollkommenheit“ der Kreisbewegung war noch unbestrittenes Axiom, dem auch Copernicus und Tycho Brahe huldigten. Auch dieses Hinderniss der Entwicklung der Astronomie wurde erst von Kepler später weggeräumt.

6) Doch wohl. Das beweist höchstens, dass die Sonne nicht allein die Schuld trage.

7) L. c. S. 413: *„Sequitur Luna ipsa, quam hujus culpae ream manifeste tenet observatio paschalis. Assumo itaque mensem hibernum, Sole circa principium ♑ versante, [ceteris paribus] circiter quatuor horas longiorem esse quam aestivum, Sole circa Solstitium versante, ceterorum mensium, ut quilibet aequinoctio, sic mediocri [quantum calculus prodit] propiorem. Hoc pacto certum est, negotio satisfactum iri. Nam cum a cancro ad libram tres breves menses sequantur, sunt breviores duabus horis quam tres menses mediocres. Citius igitur Luna pervenit ad Solem, quam si [remota consideratione ejus anomaliae] aequaliter semper moveretur. Contra a*

dass eine Lunation zur Winterszeit, wenn die Sonne am Anfange des ♑ steht, bei sonst gleichen Umständen um etwa 4 Stunden[1]) länger ist als eine Lunation zur Sommerszeit, wenn die Sonne beim Solstitium angekommen ist, und dass die übrigen Lunationen, je nachdem sie dem Aequinoctium näher sind, auch dem Mittelwerth (wie ihn die Tafeln angeben) sich nähern. Auf diese Weise wird den Anforderungen sicher Genüge geleistet. Denn da vom ♋ bis zur ♎ drei kürzere Lunationen auf einander folgen, so werden diese um 2 Stunden kürzer sein als drei mittlere Lunationen. Der Mond erreicht die Sonne also früher, als wenn er (ohne Berücksichtigung dieser Ungleichheit) seine mittlere Geschwindigkeit beibehielte. Vom ♑ bis zum ♈ folgen sich dagegen 3 lange Lunationen, der Mond wird also später, als erwartet, vor die Sonne oder in den entgegengesetzten Schattenkegel treten. Vom ♈ aber bis zum ♋ und von der ♎ bis zum ♑ wird aus den entgegengesetzten Gründen der Ueberschuss oder das Fehlende ausgeglichen, so dass diese Ungleichheit im ♑ und ♋ verschwindet, im ♈ und ♎ das Maximum erreicht."

„Wie nun[2]) diese Hypothese mit dem Copernicanischen System harmonire, das lässt sich mit kurzen Worten nicht klarlegen (wie ich auch im Prognosticum bemerkte[3]), ja nicht einmal in nicht ferner Zeit.

Capricorno ad Arietem tres tardi sequuntur menses, tardius igitur opinione Luna vel sub Solem aut in ei oppositam umbram incurrit. Ab Ariete vero in ♋, et a ♎ in ♑ oppositis rationibus defectus vel excessus compensatur, ita ut evanescat anomalia in ♑, ♋; in ♈, ♎ sit maxima."

1) Steht so da. An genaue Zeitbestimmungen darf man hier nicht denken, Kepler zeichnet den Plan erst mit grossen Strichen. Später wird es schon anders.

2) *„Quomodo vero haec hypothesis cum Copernico concilietur, hoc brevibus verbis explicari nequit [quod in meo prognostico dixi], sed neque brevi tempore. Oportet enim omnia probe excutere. Nam neque ipse dum mihi satisfacio. Dicam autem speculationis meae fundamentum. In ♑ versante Terra, videtur ⊙ in ♋, estque ibi ejus apogaeum, in opposito perigaeum. Cum ergo secundum Copernicum motus omnis et virtus omnis motoria ex Sole ceu centro sive corde in circumpositos orbes ingeratur, dimensis ad propinquitatem modulis, ambiat vero Terram orbis Lunam vehens: ergo is una cum Terra hieme prope Solem accedit et in fortiorem virtutem motoriam ingreditur, aestate in imbecilliorem, cum a Sole longissime discedit. Hic jam fingenda est quaedam virtutum motoriarum contrarietas, qualem Aristoteles primum mobile inter et secunda confinxit. Nam Luna propria virtute vehitur, non ut sex ceteri virtute Solis communi. Nam hi Solem circumambulant, Luna Terram, [et] cum ad Solem tendit viam ceteris plane contrariam conficit. Quare probabile est, impediri illam a virtute Solari, magis a fortiori, minus ab imbecilliori. Hieme igitur, cum propinqua Soli est, multum impeditur et fit tarda, aestate liberior in majori spatio celerior evadit."*

3) Aber, wie wir gesehen haben, aus ganz andern Gründen. Es ist interessant zu sehen, wie Kepler sich bemüht, die Entstehungsgeschichte seiner Verlegenheitserklärung vor Herwart zu verhüllen, und letztere als von Anfang an wohlüberlegt darzustellen, während er seinem Lehrer Mästlin gegenüber kein Hehl hat!

Denn hierbei will Alles wohl erwogen sein, und ich bin selbst noch nicht mit mir zufrieden. Ich will aber das Princip, worauf sich meine Speculation stützt, mittheilen. Wenn die Erde sich im ♑ befindet, erscheint die Sonne in den ♋ projicirt, wo ihr Apogaeum liegt, während das Perigaeum auf der entgegengesetzten Seite sich befindet. Da nun nach Copernicus jede Bewegung und jede bewegende Kraft[1]) von der Sonne als Mittelpunkt, wie von dem Herzen, den sie umgebenden Sphären mitgetheilt wird, nach Massgabe der grösseren oder geringeren Nähe, und da die Sphäre, welche den Mond trägt, die Erde umkreist: so nähert sich der Mond zugleich mit der Erde im Winter der Sonne, sodass die bewegende Kraft einen grösseren Einfluss auf ihn gewinnt, während im Sommer der Einfluss geringer wird, da er sich weit von der Sonne entfernt. Hier muss ich nun die Annahme irgend einer Gegensätzlichkeit zwischen den bewegenden Kräften zu Hilfe nehmen, wie sie Aristoteles zwischen dem ersten Beweglichen und den secundären annahm. Denn der Mond verdankt seine Bewegung einer besonderen Kraft, nicht wie die sechs übrigen der gemeinsamen von der Sonne ausgehenden. Diese nämlich bewegen sich um die Sonne, der Mond um die Erde, und bewegt sich auf der der Sonne zugekehrten Seite seiner Bahn in entgegengesetzter Richtung wie die übrigen[2]). Daher ist es nicht unwahrscheinlich, dass derselbe [der Mond] von der bewegenden Kraft der Sonne in seinem Laufe gehemmt wird, mehr von einer stärkeren, weniger von einer schwächeren. Im Winter also, wenn der Mond in Sonnennähe ist, ist die Retardation gross, und er verspätet sich, im Sommer, wenn er sich ungehinderter in grösserer Entfernung bewegt, äussert sich dies als Beschleunigung."[3])

Nach Besprechung einer andern Ungleichheit des Mondlaufes geht dann Kepler zur dritten möglichen Annahme über[4]): „Da vorzüglich

1) Man beachte im Folgenden die zahlreichen Anklänge an die Gravitationstheorie.

2) Ich glaube, es hiesse Eulen nach Athen tragen, wenn ich mich bemühen wollte, einen Astronomen von so hervorragendem Talent wie Kepler gegen den Vorwurf zu vertheidigen, er habe den Mond wirklich für retrograd gehalten; dass dies nicht der Fall ist, kann ja jeder wissen, der Augen hat. Kepler will hervorheben, dass der Mond, wenn man von seiner Bewegung um die Sonne absieht, und nur seine Bewegung um die Erde berücksichtigt, auf der innern Seite seiner Bahn eine der Richtung der andern Planeten (heliocentrisch) entgegengesetzte Richtung einschlägt, dass somit eine Gegensätzlichkeit und eine Hemmung durch die Sonne denkbar sei. Wie dies näher zu verstehen ist, wird später erklärt; ich verweise besonders auf S. 46 Anm. 1.

3) Eine so überraschend richtige Auffassung der mechanischen Ursache der jährlichen Gleichung, dass man an eine Divinationsgabe Kepler's glauben könnte. Was hätte ein solches Genie wohl geleistet, hätte es die modernen Beobachtungs- und Berechnungsmittel zur Verfügung gehabt!

4) L. c. S. 414.

die Behauptung ungereimt erscheint, dass der Mond durch die bewegende Kraft der Sonne gehemmt wird, indem eher zu erwarten wäre, dass dieselbe fördernd und beschleunigend wirke, welches immer das Centrum der Bewegung sei, richtete ich meine Aufmerksamkeit noch auf eine andere Ursache: ob nämlich das Zeitmaass der übrigen Bewegungen, d. h. die Bewegung des ersten Beweglichen (oder nach Copernicus die tägliche Bewegung der Erde) die Schuld trage." Kepler erklärt dies ebenfalls durch eine Abhängigkeit der täglichen Axendrehung von der grösseren oder geringeren Entfernung von der Sonne, sodass die Rotation im Sommer langsamer, im Winter schneller erfolge, und daher im Winter der Mond sich scheinbar verspäte, im Sommer scheinbar verfrühe[1]). Er gesteht zu, dass auch bei den übrigen Planeten sich so eine Ungleichheit zeigen müsste, weist aber darauf hin, dass die Beobachtungsfehler sie verdecken. Die einzige Möglichkeit, diese Frage zu entscheiden, sieht er in einer möglichst genauen Abmessung des Sommer- und Wintertages mittelst Sanduhren[2]).

„Dies", schliesst er,[3]) „wollte ich auf den Brief deiner Herrlichkeit erwidern, bitte aber recht sehr, mir die Unklarheit, die mir sozusagen angeboren ist, zu Gute zu halten".

Diese Entschuldigung erklärt sich aus Kepler's Lage; allein der Fortschritt in der Klärung seiner nothgedrungen aufgestellten Theorie ist so bedeutend, dass man über der Bewunderung für seinen Scharfsinn einige Unklarheiten gern vergisst. So sicher er sich auch stellt, es sind in den folgenden Briefen Anzeichen[4]) vorhanden, dass er keineswegs ein fertiges Urtheil sich gebildet hatte, sondern seinen ersten glücklichen Gedanken nur von Fall zu Fall im Drange der Umstände erweiterte. Kepler mochte meinen, mit dieser Erklärung Herwart befriedigt zu haben; dies war jedoch Herwarts Art nicht. Hatte derselbe einmal einen Gedanken aufgegriffen, so verfolgte er ihn mit unglaublicher Zähigkeit[5]). So auch diesmal. Herwart hatte in solchen Fällen die Gewohnheit, einen Gelehrten gegen den andern auszuspielen, indem er die Ansichten, die er von einem erforscht hatte, andern mittheilte ohne Nennung des Namens.[6]) Auch

---

1) Auf diesen sonderbaren Einfall Kepler's muss ich später noch zurückkommen.

2) Ein Zeugniss für den damaligen Stand der Uhrmacherkunst.

3) L. c. S. 415: *Haec ad Dig. T. literas respondere volui, vehementer autem oro, uti obscuritatem hanc, quae mihi quodammodo connata est ..., boni consulat."*

4) Besonders im Eingang des Briefes vom 9. und 10. April 1599 (U. W. C S. 10flg. Vergl. S. 77, Anm z Z. 40).

5) Als Beispiel kann vorzüglich die Frage nach der Sonnenfinsterniss des Jahres 38 v. Chr. gelten, mit der Herwart von 1597—1606 Kepler bedrängte, obwohl derselbe alle möglichen Anstrengungen machte, um Herwart von dem ihm unangenehmen Thema abzubringen.

6) Einen neuen Fall bieten auch die von mir herausgegebenen Briefe; Kepler erhielt das Gutachten eines Jesuiten zur Beurtheilung zugesandt (U. W. C. S. 100, Anm. zu Z. 1556).

Kepler's „nicht für die Gelehrten geschriebene" Hypothese machte so die Runde. Einige von Herwart's Correspondenten scheinen schnell damit fertig gewesen zu sein. So schrieb der sonst tüchtige Johann Georg Brengkher[1]) am 18. Februar 1599 aus Kaufbeuren:[2]) „Betreffend des, *quod Luna in hyeme tardius moveatur quam aestate*, das ist bei mir gar ein *paradoxum absurdissimum*; hab Nichts davon gehört oder gelesen." Herwart liess sich aber durch solche Urtheile nicht irre machen. Er suchte an Beobachtungsmaterial zusammen, so viel er konnte, und verglich. Am 10. März 1599 theilte er einige Beobachtungen, die gegen Kepler's Ansicht zu sprechen schienen, diesem mit.[3]) Die grossen Mängel dieser Beobachtungen, die grösstentheils „mit dem Bauernschuh gemessen" sein dürften, einzeln durchzugehen, würde zu weit führen; aus den mitgetheilten Daten ergeben sie sich von selbst. Ja es erscheinen solche Differenzen unter den Beobachtungen selbst, dass man auch Fehler in der Berechnung annehmen muss,

---

1) Auch Brengger, Prencker. Brengkher hat er sich hier selbst unterzeichnet. Er war Arzt in Kaufbeuren, von seinem Leben ist fast nichts bekannt. Später war er ein eifriger Correspondent Kepler's (O. O. II, 37 flg.).

2) Münchner Hof- und Staatsbibliothek. Clm. 1607, fol. 96.

3) Dieser Theil des Herwart'schen Briefes findet sich mit den Randglossen Kepler's hinreichend genau abgedruckt: O. O. I, 415. Das Fehlende habe ich in U. W. C. (S. 78 oben) nachgetragen nach dem Pulkowaer Original. Ich will hier noch zusammenstellen, was sich sonst noch für die einzelnen Fälle an Beobachtungsmaterial findet, soweit es damals Kepler bekannt war, damit Jeder, den dies interessiren sollte, sich überzeugen könne, wie für unsere Begriffe entsetzlich schlecht und unbrauchbar das Material war, welches Kepler zur Grundlage eines genialen Gedankens diente.

☽ Finsterniss vom 29. Decbr. 1591: Ausser dem an d. a. O. O. abgedruckten (NB! dies ist bei allen zu ergänzen), nichts. — ☽ Finsterniss vom 20. Febr. 1598: Brief Kepler's vom 9. und 10. April 1599 (U. W. C., Z. 57—62; 806—814). O. O. I, 396; 408. II, 358. III, 582. Beobachtung Tycho Brahe's im Brief Kepler's vom 9. und 10. April 1599 (U. W. C., Z. 765—773. Vergl. die Anm. S. 88 zu dieser Stelle). — ☽ Finsterniss vom 9. Febr. 1599: Brief Kepler's vom 9. und 10. April 1599 (U. W. C., Z. 63—65). O. O. II, 286. Vergl. O. O. III, 589. — ☽ Finsterniss vom 23. April 1595: Brief Kepler's vom 9. und 10. April 1599 (U. W. C., Z 66 bis 69). O. O. III, 578. — ⊙ Finsterniss vom 7. März 1598: Brief Kepler's vom 9. und 10. April 1599 (U. W. C., Z. 70—73; 815—821). O. O. I, 396; 408. II, 16; 363 flg.; 388. Vergl. O. O. II, 441, nota 102. III, 538. Beobachtungen Tycho Brahe's im Brief Kepler's vom 9. und 10. April 1599 (U. W. C., Z. 773—779). Vergl. die Correctur, welche Tycho im Briefe vom 9. Decbr. 1599 anbringt (O. O. I, 225). — ⊙ Finsterniss vom 21. Juli 1590: Brief Kepler's vom 9. und 10. April 1599 (U W. C., Z. 74—76). O. O. II, 374 flg. Vergl. III, 538 — Auch die Meridianbestimmung Herwart's (Meridian von München O. O. I, 415) ist derart, dass sie eine grosse Unsicherheit in der Berechnung bedingt. Nach der einen Angabe (Distanz von Toledo) wäre München unter 36° 20′ 20″ Oestl. L. v. F , nach der andern (Distanz von Königsberg) unter 24° 9′ 45″ Oestl. L. v. F. gelegen. In der That ist 29° 16′ 2″ Oestl. L. v F. richtig.

was bei Herwart nach seinen eigenen Geständnissen[1]) nicht unwahrscheinlich ist. Jedenfalls sind die Beobachtungen derart, dass sogar das Maximum der jährlichen Gleichung von den Beobachtungsfehlern mehr als verdeckt wird, und dass man mir Recht geben wird, wenn ich im Eingange sagte, Kepler sei zu dieser Entdeckung mehr a priori gelangt. Er hat es jedenfalls nur seinem Glücksstern zu danken, dass zufällig der Sinn der Differenzen sich so herausstellt, wie die Theorie ihn fordert, und dass er daher in seiner Ansicht bestärkt wurde, wenn er auch vorläufig (jedenfalls verführt durch diese Beobachtungen) einen viel zu grossen Betrag dieser Ungleichheit annahm. So kam Kepler dazu, im Brief vom 9. und 10. April 1599 das Princip bereits wieder viel klarer und präciser zu formuliren. Die Stelle lautet:[2]) „Wer die Prutenischen Tafeln nach meiner Anweisung verbessert, wird gegen Ende Juni und December gar keine Aenderung an denselben vornehmen, da dann die Sonne sich im Apogaeum oder Perigaeum befindet. Die Bewegung des Mondes im December ist zwar am stärksten verschieden von der im Juni, ebenso die im Januar von der im Juli (unter sonst gleichen Umständen), aber die Wirkung dieser Verschiedenheit zeigt sich am stärksten in den Quadranten, dem Widder und der Waage. Ich will ein Beispiel anführen. Die tägliche Bewegung der Sonne ist zwar am grössten im Steinbock, am kleinsten im Krebs, aber die Differenz zwischen wahrer und mittlerer Länge ist im Steinbock und Krebs gleich Null, im Widder und der Waage am grössten. Gerade so verhält es sich auch mit meiner Conjectur.“ Stellen wir diese Worte ein klein wenig um, so zeigt sich klar die Definition der jährlichen Gleichung. Um zu erklären, dass zu Ende Juni und December an einer aus den Prutenischen Tafeln erhaltenen Berechnung nichts geändert werden dürfe, bedient sich Kepler eines Beispiels: Die tägliche Bewegung der Sonne (natürlich in Länge, nicht in Rectascension) ist am grössten im Steinbock (Ende December, im Perihel der Erde), am kleinsten im Krebs (Ende Juni, im Aphel der Erde); aber dessenungeachtet ist die Differenz

---

1) Z. B.: O. O. I, 61: „Dann die *diversitas occupationum* macht mich im *calculo* yeweilen irren“. III, 691: „Wann mir der Herr mit diesem *calculo* eine oder andere *demonstration* oder auch *delineationes geometricas* mit zukommen lassen wollte, wäre mir um so viel mehr gedient, *cum, ut fatear quod res est, Davus potius quam Oedipus in hoc genere calculi esse videar.*“ u. s. w.

2) U. W. C., S. 11: „*Si quis eo modo, quem admonitiuncula mea praeivi, calculum Prutenicum corrigat, is circa finem Junii et Decembris nihil in Prutenicis mutabit, dum scilicet Sol in apogaeo vel perigaeo est Nam etsi maxima differentia est inter Lunam Decembrem et Juniam, vel Januariam et Juliam* [*caeteris paribus*], *ejus tamen differentiae effectus potissimum in quadrantes Arietem et Libram aggeratur. Exemplum hoc cape. Motus diurnus Solis etsi maximus est in Capricorno, minimus in Cancro, differentia tamen motus veri a medio in ♑ ♋ nulla est, in ♈ ♎ maxima. Eadem ratio est in mea etiam de Lunae motu suspicione.*“

zwischen wahrer und mittlerer Länge, die „Mittelpunktsgleichung“, gleich Null an eben diesen Punkten, dagegen in den Quadranten, im Widder und in der Wage, ein Maximum. Dasselbe Verhältniss, sagt Kepler, finde bei seiner neuen Mondgleichung statt. Es sei zwar die Ungleichheit in der Bewegung des Mondes am grössten im December und Juni, oder im Januar und Juli, da der Mond im December und Januar (Umgebung des Perihels der Erde) die stärkste Retardation, im Juni und Juli (Umgebung des Aphels der Erde) die kleinste Retardation erleidet, die in Bezug auf den mittleren Lauf einer Acceleration gleich kommt;[1]) aber trotzdem zeige sich die Wirkung dieser Ungleichheit, die Differenz der wahren und berechneten Mondörter, am stärksten dann, wenn die Sonne in den Quadranten, dem Widder und der Wage, steht. Damit ist diese Ungleichheit als eine Function der mittleren Anomalie der Sonne charakterisirt.[2])

Herwart antwortete den 16. Mai[3]): „Hab seine Antwort auf die von mir allegierte vngefehrliche *Obseruationes* sonders gern vernommen“. Kepler hatte ihn auch darauf aufmerksam gemacht, dass diese Ungleichheit sich nicht nur in den Finsternissen, sondern überhaupt bei allen Mondpositionen äussern müsse[4]), ebenso darauf, dass die Beobachtungen Tycho Brahe's[5]) wegen ihrer viel grösseren Genauigkeit die Frage zur Entscheidung bringen könnten. Daher verglich Herwart die Mondpositionen, wie sie Tycho in den „Epistolae astronomicae“[6]) und „De mundi

1) Vergl. die S. 210, oben, mitgetheilte Erklärung Kepler's.

2) Diese Stelle gab mir den ersten Anstoss zur genaueren Verfolgung der Sache.

3) Diese und die folgenden Stellen aus Herwart's Briefen sind hier zum ersten Male publicirt, und zwar nach den Originalen von Pulkowa. Ich verdanke dieselben der ausserordentlichen Zuvorkommenheit des Herrn Geheimrath Otto von Struve.

4) Brief vom 9. und 10. April 1599 (U. W. C., S. 13, Z. 117 flg): „*Eadem aberratio Lunae cernitur etiam cum ad fixas aut planetas, non tantum cum ad Solem et umbram refertur.*“

5) Ich will bei dieser Gelegenheit bemerken, dass Kepler damals die Werke Tycho Brahe's, die bereits erschienen waren, nicht hatte, dass also auch die Conjectur ausgeschlossen ist, er sei etwa durch den von Brahe probeweise eingeführten „*circellus annuae variationis*“ (vergl. den I. Theil S. 164) auf diese Idee gekommen. Dieselbe ist vielmehr ganz sein Eigenthum. Es lässt sich positiv nachweisen, dass Kepler erst 1600 zwei von Brahe geschriebene Werke erhielt, und zwar von diesem selbst. Vergl. U. W. C., S. 76 und 108.

6) Von Tycho Brahe 1596 herausgegeben Es erschien nur ein Band. Der zweite lag halbvollendet vor, als Tycho starb, wurde aber nie herausgegeben, obwohl der Druck bereits begonnen hatte (vergl. O. O. I, 191. VII, 225). Frisch glaubt das Manuscript in Basel entdeckt zu haben (O. O. VIII, 715).

aetherei recentioribus phaenomenis"[1]) nach der Beobachtung angab, mit den aus den Prutenischen Tafeln berechneten, um die Uebereinstimmung mit Kepler's Theorie zu erforschen. Er giebt letzterem hievon Nachricht in seinem Brief vom 20. Juli[2]): „Als ich neulich sah, in welchen Punkten seiner Bahn Tycho Brahe den Mond (nach seinem Bericht in den „Briefen" S. 56, und „Ueber die Kometen" S. 36) beobachtet hat, und diese Angaben mit den Resultaten der Berechnung nach den Prutenischen Tafeln verglich, kam ich vollständig zur Ueberzeugung, dass Tycho Brahe, ganz deiner Vermuthung entsprechend, die Mondörter zu Anfang der Zeichen ♋ und ♑ nahezu übereinstimmend mit den Prutenischen Tafeln bezeichne; zu Anfang des ♈ aber zurück, und zu Anfang der ♎ voraus verlege. Denn im Jahre 1587 setzt er den wahren Ort des Mondes zu Anfang der ♊ um 44′ zurück; aber zu Anfang des ♌ um 33′, und zu Ende des ♌ um 56′ voraus. Und im Jahre 1577 fällt der Mondort im ♑ fast mit dem der Prutenischen Tafeln zusammen." Das wäre für Kepler eine kräftige Aufmunterung gewesen, seine Theorie beizubehalten und zu vervollkommnen; allein die nun folgenden Detailangaben Herwart's, welche sein Urtheil motiviren und erklären sollten, sind derart, dass Kepler durch sie ganz verwirrt werden musste. Herwart fährt fort:[3]) „Dass der Grund dieser Differenzen im Laufe des Mondes (nicht der Sonne) zu suchen sei, erhellt nicht nur daraus, dass die wahren Sonnenörter, nach Tycho und nach Copernicus, eine immer constant bleibende Differenz zeigen, sondern auch aus dem Umstande, dass das Argument der Breite des Mondes, nach Tycho und Copernicus, in einer Weise differirt, welche der von dir aufgestellten Correctur proportional ist." Den letzten Satz, der im lateinischen Text im höchsten Grade unklar ist, fasste Kepler auch in der That im folgenden Briefe im nächstliegenden Sinne auf.[4]) Ich glaube jedoch, dass er so aufgefasst werden muss, wie

1) Der zweite Theil dieses Buches ist eben das von Herwart unten citierte Werk „De Cometis" (vergl. O. O. I, 119). Das Buch erschien 1588 (O. O I, 190flg.).

2) „*Cum nuper aminaduerterem, in quibus locis Tycho Brahe Lunam obseruavit [ut ipse in Epistolis pag. 56, et de Cometis pag. 36 refert], atque ea loca cum calculo Prutenico conferrem, plane descendebam in eam sententiam, ut putarem, a Tychone Brahe, omnino juxta tuam opinionem, Lunae loca circa initia ♋ et ♑ fere ita, ut calculus Prutenicus exhibet, poni. At uero circa initia ♈ tardius; et circa initia ♎ cituis locari. Siquidem A⁰ Christi 1587 locum Lunae circa initium ♊ 44′ retro collocat; et circa initia ♌ 33′, atque circa finem ♌ 56′ porro. Et A⁰ 1577 in ♑ fere coincidere facit in locum, quem tabulae Prutenicae ostendunt.*"

3) „*Has uero differentias potissimum ex cursu Lunae [non Solis] causari, non modo inde patet, quia uera loca Solis Tychonis et Copernici constanter aequali spatio inter se distent, uerum etiam ob id, quod uerus motus latitudinis Lunae Tychonis et Copernici eadem fere proportione inter se differat.*"

4) Brief vom 6. August 1599 (U. W. C., S. 74, Z. 2346 flg): „*Differe illum ais aequali et constanti differentia a Copernico in motu latitudinis. Num*

ich ihn übersetzt habe. Herwart will sagen: dass der Mond die Ursache der Differenzen sei, gehe daraus hervor, dass bei den Sonnenörtern, wie sie Tycho und die Prutenischen Tafeln geben, eine constante Differenz, dagegen bei den Mondörtern, nach Tycho und den Prutenischen Tafeln, eine variable, aber der durch Kepler's Conjectur aufgestellten Gleichung proportionale Differenz sich ergebe. Abgesehen davon, dass nur so ein vernünftiger Sinn und ein Zusammenhang in die Ausführungen Herwarts zu bringen ist, geht dies auch daraus hervor, dass die Beispiele, welche Herwart sogleich beifügt, und welche er mit „*nam*“ einleitet, absolut sinnlos und nichts beweisend wären, wenn nicht Herwart seine Worte so aufgefasst wissen wollte. Ich habe diese Beispiele der Raumersparniss und Uebersicht wegen in tabellarische Form gebracht:

1587. Januar.	Tageszeit (p. merid.).	Argument der Breite nach:		Differenz.	Beobachtete Breite des Mondes.	Differenz der ☽ Oerter in Länge.
		Prutenische Tafeln.	Tycho's Beobachtungen.			
9.	$6^h\ 58^m$	$50^0\ 1'\ 49''$	$49^0\ 23'\ 31''$	$-38'\ 18''$	$3^0\ 59'$	$-44'$
14.	$13^h\ 40^m$	$3^s\ 28^0\ 42'\ 1''$ ($118^0\ 42'\ 1''$)	$3^s\ 29^0\ 9'\ 19''$ ($119^0\ 9'\ 19''$)	$+27'\ 18''$	$4^0\ 35'$	$+33'$
15.	$15^h\ 5^m$	$4^s\ 13^0\ 22'\ 22''$ ($133^0\ 22'\ 22''$)	$4^s\ 14^0\ 6'\ 53''$ ($134^0\ 6'\ 53''$)	$+44'\ 31''$	$3^0\ 46'$	$+56'$

Die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik beobachtete Tycho zu $5^0\ 15'$; der Beobachtungsort wird von Herwart als $36^0\ 45'$ ö. L. (wohl nach Mercator) angegeben[1]).

Aus der letzten Columne sieht man, dass dies dieselben Beobachtungen sind, welche Herwart vorher bezeichnet hatte mit den Worten: „*A° 1587 locum Lunae circa initium ♊ 44′ retro collocat; et circa initia ♌ 33′, atque circa finem ♌ 56′ porro*“.

Hieraus ergiebt sich unter der Annahme, dass Herwart das Gesetz Kepler's richtig aufgefasst habe, sofort ein Widerspruch zwischen dem Datum der Beobachtungen und der Bezeichnung des Sternbildes. Den Verdacht, ob ich vielleicht beim Copiren der Briefe Herwart's aus Versehen falsch geschrieben hätte, benahm mir die gütige Mittheilung des Herrn Geheimrath von Struve, der diese Stelle mit dem Original übereinstimmend

---

hoc propter anomaliam Lunae, an propter luxationem anomaliae latitudinis? Sane propter hanc, si constans toto anno differentia est.“

1) Zu bemerken ist, dass das Argument der Breite („*motus latitudinis*“) nicht von Tycho direct beobachtet, sondern von Herwart aus Tycho's sonstigen Angaben berechnet ist. Genauer die Zahlen zu discutiren hat keinen Zweck, da es hier nicht darauf ankommt festzustellen, ob in Berechnung oder Beobachtung ein kleiner Fehler liege, oder nicht.

fand. Ich ging nun an die Quelle, die von **Herwart** citirten „Epistolae astronomicae“, und fand da S. 56 folgende Beobachtungen des Mondes von 1587:

Jan.	Hora.	Min.	Observatio Tychonica				Copernicaea			
			Longitudo		Latitudo		Longitudo		Latitudo	
			P.	M.	P.	M.	P.	M.	P.	M.
9.	6	58	1	0½ ♊	4	28 A	1	45 ♊	3	50 A
14.	13	40	10	39 ♌	5	5 A	10	6 ♌	4	23½ A
15.	15	5	25	38½ ♌	4	19 A	24	42 ♌	3	28 A

Unten ist noch eine Tafel angebracht mit Correcturen der beobachteten Breiten wegen Parallaxe; dieselbe enthält folgende berichtigte Werthe: Am 9. Januar: $3^{\circ}59'$; am 14. Januar: $4^{\circ}35'$; am 15. Januar: $3^{\circ}46'$.

Diese letzte Tabelle giebt sonach, in uns geläufigere Form gebracht:

Januar.	Tageszeit.	Beobachtete		Berechnete		Differenz der Längen.
		Länge.	Breite.	Länge.	Breite.	
9.	$6^h\,58^m$	$61^{\circ}\ 0'\,30''$	$-3^{\circ}59'$	$61^{\circ}45'$	$-3^{\circ}50'$	$-44'\,30''$
14.	$13^h\,40^m$	$130^{\circ}\,39'$	$-4^{\circ}35'$	$130^{\circ}\,6'$	$-4^{\circ}\,23'\,30''$	$+33'$
15.	$15^h\,5^m$	$145^{\circ}\,38'\,30''$	$-3^{\circ}46'$	$144^{\circ}\,42'$	$-3^{\circ}28'$	$+56'\,30''$

Hiermit ist das Räthsel gelöst: **Herwart hat Kepler gar nicht verstanden**; er hat zweideutige Ausdrücke, wie etwa: „*Lunae motus circa initia ♋ celerior est*“, deren sich **Kepler** der Kürze halber bediente, **statt auf den Ort der Sonne** (resp. Erde) **unter den Ekliptikzeichen, auf den Ort des Mondes unter den Ekliptikzeichen bezogen**, und eine sonderbare Laune des Schicksals fügte es, dass die Beobachtungen, die er in **Tycho's** Buch fand, gerade **für ihn** eine scheinbare Bestätigung der missverstandenen Ansicht **Kepler's** bildeten, während sie in der That mit der wirklichen Ansicht **Kepler's** sich nicht zusammenreimen liessen.

Herwart schliesst deshalb[1]): „Nach diesen Angaben schien mir der allgemeine Schluss berechtigt, dass der Mond zu Anfang von ♑ und ♋ sich ungefähr an den Orten befinde, welche die Prutenischen Tafeln angeben, zu Anfang des ♈ jedoch, um nur ungefähr die Sache zu bezeichnen, zurückbleibt, und um die ♎ herum voraus ist, sodass er hier scheinbar seinen Lauf beschleunigt, dort verlangsamt.“ Hier ist in lauter zweideutigen

1) „*Quae cum ita sint, uniuersaliter exinde inferendum esse uidebatur, Lunam circa principia ♑ et ♋ incidere fere in ea loca, quae calculus Prutenicus demonstrat. Sed ἐν πλάτει circa initia ♈ uersantem Lunam tardius, et circa ♎ citius progredi, ita ut hîc cursum suum uideatur accelerare, et ibi retardare.*“

Ausdrücken die Ansicht Kepler's so schön definirt, dass eine beabsichtigte Komik das Missverständniss kaum feiner hätte ausspinnen können. Vermuthlich war Herwart an den oft wiederholten Worten Keplers, die Ursache sei im Laufe des Mondes und nicht der Sonne zu suchen, hängen geblieben, und hatte darüber die Pointe nicht erfasst.

Für Kepler lag die Sache schlimm. Er hatte die „Epistolae astronomicae“ nicht, konnte also auch das Chaos nicht entwirren. Kein Wunder, dass er ganz confus wurde, und in seiner Antwort an drei Stellen es entschieden ablehnt, ein Urtheil über Tycho Brahe's Beobachtungen und Ansichten abzugeben, bevor er das Original gesehen habe[1]). Indess scheint Kepler den wahren Sachverhalt doch geahnt zu haben[2]). Wahrscheinlich weil er nicht weiss, was er mit den Ausführungen Herwart's anfangen solle, thut er dergleichen, als entsinne er sich nicht mehr genau, ob er Herwart seine Ansicht auseinandergesetzt habe, und als fasse er Herwart's Aeusserungen als eine Weiterentwicklung seiner ersten Andeutung im Kalender für 1599 auf, die allerdings nicht genau gewesen sei und zu Missverständnissen habe Anlass geben können, da er nur beabsichtigt habe, populär zu schreiben[3]). So hat er Anlass, seine Hypothese aufs Neue und wiederum schärfer zu formuliren, ohne Herwart wegen seiner Confusion interpelliren zu müssen. „Meine Vermuthungen“, schreibt er[4]), „gingen nach zwei Rich-

1) Brief vom 6. August 1599. U. W. C., S. 72 flg.: Z. 2279 2281; 2330 bis 2335; 2351—2353.

2) L. c., S. 72, Z. 2288 flg.: „*Conjectura vero mea non respicit ipsa principia cardinalium* [zu ergänzen „*signorum*“; nämlich ♑ ♈ ♋ ♎] *propter se* [wie Herwart es in der That auffasste], *sed vere propter vicinum apogaeum etc.*“

3) L. c., S. 72, Z. 2279 flg.: „*Judicium vero aliud, non viso libello epistolarum addere nequeo, nisi ut, quae in prognostico hujus anni scripsi, cum illis* [den Beobachtungen und Ansichten Tycho's] *conferam. Assumis ex illa mea ad prognosticum appendice, circa principia cardinalium signorum mediocritates et excessus maximos motus Lunae veri supra Copernicanos a me reponi. Etsi vero meminisse videor, me tibi rationes meas edisserere, tamen quia id incertum est, repetam. Quia Solis apogaeum est in Cancro, sive paulo post ejus principium, ideo sufficere in germanica et populari lingua sum arbitratus, sententiam meam explicare vocibus aestatis et hyemis.*“ Dass Kepler in einer Sache, die ihm so viele Sorgen machte, so vergesslich gewesen sei, ist nicht recht glaublich.

4) L. c., S. 72 flg., Z. 2290 flg.: „*Et gemina fuit mea speculatio, ut aut prosthaphaeresis Solis augeretur, quod scribis facere Tychonem* [*de eo igitur judicium, quod petis, vides me jam pridem tulisse*]; *aut inaequalis fieret motus Lunae et tardior hyeme propterea, quia tum Terra in perigaeo prope fontem virtutis moventis Lunae caelum secum devehat, cujus cum sit diversum motus principium a Sole, accidere, ut impediatur minus a majori, et quo propius accedat caelum Lunae ad Solem, hoc majus esse impedimentum; vel etiam contraria ratione, ut Lunae quidem motu semper aequali motus Terrae diurnus ipse quoque ex Sole fluat, ideoque fortior sit et celerior Terrae conversio, si Terra sit in perigaeo prope Solem; quo pacto eveniret, ut plures horae, quales homines computant causâ conversionis

tungen: entweder sei die Mittelpunktsgleichung der Sonne zu vergrössern, was, wie du schreibst[1]), Tycho thut; ... oder es sei anzunehmen, dass der Lauf des Mondes ungleichförmig und zwar im Winter langsamer sei aus dem Grunde, weil dann die Erde im Perihel[2]) die Sphäre des Mondes mit sich in die Nähe der Quelle der bewegenden Kraft führt, und, da infolge des Gegensatzes der den Mond bewegenden Kraft zu der der Sonne die kleinere Kraft durch die grössere gehemmt wird, diese Hemmung um so stärker werde, je mehr sich die Sphäre des Mondes der Sonne nähere; oder umgekehrt, es sei die Bewegung des Mondes als gleichförmig zu betrachten, dagegen anzunehmen, dass auch die tägliche Umdrehung der Erde von der Sonne bewirkt werde, und dieselbe daher stärker und rascher erfolge, wenn die Erde im Perihel in Sonnennähe sei; denn so würde eine grössere Anzahl Stunden, welche die Menschen ja nach der Umdrehung der Erde bemessen, im Winter verfliessen, bis der Mond einen Umlauf vollendet hat, als im Sommer, obgleich man bei Anwendung eines wirklich gleichförmigen Zeitmaasses eine Lunation im Winter eben so lang wie eine im Sommer finden würde.“ Kepler wiederholt dann die Gründe, die ihn bestimmt hätten, an der Mittelpunktsgleichung der Sonne nichts zu ändern[3]); sagt aber, er trete gern Tycho bei, wenn dieser eine solche Aenderung für thunlich halte, da derselbe im Stande sei, die entstehenden Schwierigkeiten zu lösen, was er ohne Instrumente[4]) und Beobachtungen nicht wagen dürfe.

Terrae, numerentur, donec Luna mensem hieme efficiat, quam aestate, quamvis revera, si adhiberetur aequalis mensura, lunatio aestiva hibernae causâ temporis aequalis esset futura.“ — Das Wort *„prosthaphaeresis“* wird im mathematischen Lexicon von Vitalis (1668) so erklärt: *„Prosthaphaeresis Graece, Latine idem sonat ac impletio seu adaequatio; estque pars illa Eclipticae, quae addenda est, vel minuenda a motu medio planetarum, ut habeatur verus, aut a vero, ut habeatur medius.“* Dies ist genau die Definition der „Mittelpunktsgleichung“.

1) Herwart hatte nämlich in seinem Brief vom 20. Juli noch viele andere Aenderungen der Theorie aus Tycho's Beobachtungen nachzuweisen versucht, die dieser vorgenommen habe; da dieselben nicht unmittelbar mit dem uns beschäftigenden Gegenstande zusammenhängen, und Kepler auf ihre Discussion sich auch nicht einliess, übergehe ich dieselben.

2) Ich erlaube mir diese Aenderung, weil sie consequenter ist; Kepler spricht bald im Sinne des Ptolemäischen, bald in dem des Copernicanischen Systems.

3) Als Gründe nennt er: Die Excentricität der Sonnenbahn würde consequent grösser angenommen werden müssen, während Copernicus das Gegentheil bewiesen habe; ebenso folge eine längere Dauer des Sommers, was mit den Beobachtungen im Widerspruch stehe (U. W. C., S 73, Z. 2306—2311); endlich die Consequenzen, die dies für die Präcession habe, woran ohne genauere Beobachtungen nicht zu rütteln sei (U. W. C., S. 73, Z. 2321—2325).

4) Dies ist buchstäblich zu nehmen; Kepler klagt oft darüber.

(Schluss folgt.)

Recensionen.

W. Killing, **Die Nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung.** Leipzig. Teubner. 1885. (XII und 264 S.)

Auf zwei verschiedenen Wegen hat die geometrische Forschung das Gebiet des krümmungslosen dreidimensionalen Raumes verlassen. Einmal hat sie die Fessel der Dimensionenzahl durchbrochen und die Geometrie des n-dimensionalen Raumes geschaffen, sodann hat sie, zuerst mit Beschränkung auf die Gebiete von zwei und drei Dimensionen, nachher aber allgemein, ideale Raumformen mit positivem oder negativem Krümmungsmaass aufgestellt und die in diesen Gebieten möglichen Gebilde und deren Eigenschaften in analoger Weise zu ermitteln gesucht, wie dies die gewöhnliche Geometrie in den ihrigen thut.* Da von jedem Punkte der euklidischen Geometrie Verallgemeinerungen nach beiden Richtungen hin begonnen werden können, so zeigt die historische Entwickelung der „transcendentalen“ Geometrie (so genannt im Gegensatz zur gewöhnlichen euklidischen) im Allgemeinen keine gesetzmässige Ausbildung dieser Disciplin, sondern in der buntesten Weise wechseln die Gegenstände und Methoden der Untersuchung mit einander ab, und nur in den Arbeiten jedes einzelnen Forschers ist, soweit dieselben überhaupt bei dem Gegenstande länger verweilen, jene stetige Entwickelung wahrzunehmen, die sonst charakteristisch für die Geschichte der ganzen Disciplin zu sein pflegt. — Nachdem nun die beständig zunehmende Menge von Arbeitskräften auf diesem transcendentalen Gebiet eine Fülle sachlich, methodisch und räumlich zerstreuten Materials geschaffen,

* Die vielfach angefochtene Berechtigung solcher Untersuchungen gegenüber den mit der Erfahrung übereinstimmenden Resultaten der euklidischen Geometrie ist in dem vorliegenden Buche S. 13 so vortrefflich dargelegt, dass wir uns die Wiedergabe dieses Passus nicht versagen können. Nachdem gezeigt ist, wie dem positiven, negativen und unendlichen Werthe einer Grösse k^2 resp. eine positiv oder negativ gekrümmte oder ebene (euklidische) Raumform entspricht, heisst es weiter: „Da alle unsere Messungen nur ein kleines Gebiet umfassen und mit Ungenauigkeiten verbunden sind, auch keine Thatsache, welche zwischen den verschiedenen Möglichkeiten eine Entscheidung träfe, bekannt ist, so muss es zweifelhaft bleiben, welchem Werthe von k^2 unsere Erfahrung mit vollkommener Genauigkeit entspricht. Da aber andrerseits keine Erfahrung vorliegt, für welche die einfachste Annahme $k = \infty$ nicht genügt, so ist es am natürlichsten, für die Praxis diesen Werth festzuhalten; das theoretische Interesse für die anderen Raumformen bleibt daneben bestehen.“

war es sicher an der Zeit, eine Zusammenfassung desselben vorzunehmen, und wenn, wie wir aus der Vorrede obigen Werkes entnehmen, Herrn Frischauf der Dank dafür gebührt, diesen Gedanken angeregt und nachdrücklich empfohlen zu haben, so war Herr Killing einerseits vermöge des allgemeinen und umfassenden Charakters seiner eigenen Forschungen auf dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie, andrerseits vermöge der von ihm gehandhabten analytischen Methode, die hier allein in Frage kommen konnte, gerade die rechte Kraft dazu, diesen Gedanken wirklich auszuführen. So ist das vorliegende Werk entstanden, welches sich allerdings, wie schon der Titel sagt, im Wesentlichen auf die nichteuklidischen Raumformen beschränkt. Man kann vielleicht bedauern, dass nicht ein die Ergebnisse der n-dimensionalen euklidischen Geometrie zusammenfassendes Werk aus irgend welcher berufenen Feder vorher erschienen ist; ein solches würde, schon seines elementaren Charakters wegen, zum Vorstudium für das vorliegende Werk gedient haben; indessen darf uns dieser Umstand die Genugthuung über das hier Gebotene um so weniger verkümmern, da der Verfasser in umsichtiger Weise dafür gesorgt hat, durch möglichst elementare und ausführliche Darstellung, wie durch Mittheilung aller zum Verständnisse nothwendigen Vorkenntnisse aus der n-dimensionalen euklidischen Geometrie solche Vorstudien entbehrlich zu machen. Auch werden Resultate der letztern verschiedentlich in der Weise berücksichtigt, dass der Verfasser sie selbständig auf nichteuklidische Raumformen ausdehnt, wie denn überhaupt die Herstellung einer zusammenhängenden Theorie den Verfasser vielfältig zur Ausfüllung noch vorhandener Lücken veranlasst hat, abgesehen von Umarbeitungen vorgefundenen Stoffes im Sinne einer einheitlichen analytischen Darstellung. Diese Darstellung ist nun ermöglicht worden durch principielle Verwendung des Weierstrass'schen Coordinatensystems, welches nicht nur den leitenden Faden für eine gemeinsame Darstellung der Geometrie aller vier Raumformen darbietet (der Euklidischen, Riemann'schen, Lobatschewsky'schen und der vom Verfasser zuerst untersuchten Polarform des Riemann'schen Raumes), sondern auch als das für diesen Zweck thatsächlich einfachste und brauchbarste nachgewiesen wird. Die Gründe, aus denen der Verfasser die endliche Riemann'sche Raumform überall voranstellt und vorzugsweise berücksichtigt, sind durchaus zu billigen.

Der Stoff gliedert sich zunächst naturgemäss in drei- und mehrdimensionale Geometrie. Hierdurch wird es möglich, die beiden Fortschritte, nämlich den in die gekrümmten Gebiete und den ins Mehrdimensionale, getrennt vorzunehmen. Der erste Abschnitt zeigt, an Bekanntes anknüpfend, zunächst, dass in einem unendlich kleinen Gebiete die Sätze der euklidischen Geometrie für jede Raumform, d. h. ohne Voraussetzung des Parallelen-Axioms gelten, leitet dann eine Function k^2 einer Dreieckseite ab, die als unabhängig von der Länge der letzteren erkannt wird und die Krümmung der betreffenden Raumform darstellt, und führt sogleich zu den die Grösse

k^2 enthaltenden Formeln der sphärischen Trigonometrie, die für $k=\infty$ in die der Euklidischen, für negatives k^2 in diejenigen der Lobatschewsky'schen Trigonometrie übergehen. Analoges findet für die nunmehr eingeführten Weierstrass'schen Coordinaten statt ($p=\cos\frac{r}{k}$, $x=k\,.\sin\frac{r}{k}\cdot\sin\varphi$, $y=k\,.\sin\frac{r}{k}\cdot\cos\varphi$). Hier gehen für $k=\infty$ x und y in die ebenen rechtwinkligen, r und φ in die Polarcoordinaten eines Punktes über, während $p=1$ wird. Vermöge ihrer Homogenität gestatten diese Coordinaten eine ganz ähnliche Behandlung der Geometrie aller Raumformen, wie sie durch Hesse für die euklidische mittelst der homogenen Dreieckscoordinaten durchgeführt ist. Diese Analogie tritt denn auch in den weiteren Ausführungen, welche die Geometrie der Geraden (im allgemeinen Sinne!), des Kreises, der Kegelschnitte und der Elementargebilde des dreidimensionalen Raumes umfassen, deutlich hervor. Während die specielle Bestimmung von k^2 bei jedem Resultat ermöglicht, dasselbe gesondert für die drei Hauptraumformen auszusprechen, ergiebt sich der Ausdruck für die Polarform des Riemann-schen Raumes einfach durch Vertauschung der Begriffe Pol und Polare. Diese aus dem vom Verfasser Gesagten sich leicht ergebende Bemerkung hätten wir gleichwohl ihrer principiellen Bedeutung halber am Schluss des Art. 16 gern nachdrücklicher hervorgehoben gesehen. — Im zweiten, ungleich umfangreicheren Abschnitte wird das Weierstrass'sche Coordinatensystem für den n-dimensionalen Raum verallgemeinert. In der Geometrie desselben treten uns sodann als einfachste Gebilde Ebenen und Kugelflächen (von je $n-1$ Dimensionen) entgegen, und an der Hand der verallgemeinerten Formeln gelangen wir auch zu einer Verallgemeinerung anderer Gebilde und Beziehungen, wie Mitte von Punkten, Pol und Polare, Abstand, auf das n-dimensionale Gebiet. Als allgemeinstes Resultat ergeben sich die verschiedenen Fälle des Vorkommens einer Raumform in der anderen. Während hierbei gelegentlich auch metrische Beziehungen auftreten, ist eine weitere besondere Untersuchung den projectivischen Eigenschaften des n-dimensionalen Raumes gewidmet. Hier werden ausser den Begriffen Abstand und Doppelverhältniss die quadratischen Gebilde mit ihrer Eintheilung ausführlich erörtert, während für höhere Gebilde die Entstehungsweise angegeben, und hinsichtlich der Details auf die schon ziemlich beträchtliche Literatur verwiesen wird. Hieran schliesst sich naturgemäss die Ableitung der metrischen Beziehungen in den nichteuklidischen Raumformen aus der projectivischen Geometrie, wie sie durch Klein gegeben worden ist. Indem nun für die Zwecke der metrischen Geometrie dem hier zu Grunde gelegten allgemeinen projectivischen Coordinatensystem die geeignetste specielle Gestalt gegeben wird, ergiebt sich als Resultat wieder das Weierstrass'sche System, dessen Bedeutung erst hierdurch in das rechte Licht gesetzt wird. Unter den fundamentalen Voraussetzungen der nichteuklidischen Geometrie kann nun die projectivische Geometrie, sofern sie für sich

allein begründet werden soll, diejenigen entbehren, welche die Begriffe des Kreises, der Bewegung und der Gleichheit enthalten. Diese Art der Begründung bildet den Gegenstand einer weiteren Untersuchung. Hierauf werden im Einzelnen die quadratischen Gebilde der Riemann'schen und Lobatschewsky'schen Raumformen betrachtet, woran sich Sätze über die gegenseitige Lage zweier Ebenen schliessen. Es folgt endlich in fünf weiteren Paragraphen eine, die besonders umfangreiche Literatur auf diesem Gebiete ausführlich repräsentirende Darstellung der Krümmungstheorie. Es genügt, die Namen Jordan, Kronecker, Lipschitz, Beez, Christoffel zu nennen, um zu zeigen, welche Fülle schwierigen Materials hier zu bewältigen war. Unter den vom Verfasser auf diesem Gebiete selbständig ausgeführten Untersuchungen ist namentlich diejenige, den Schluss des Werkes bildende, hervorzuheben, welche den Begriff des Krümmungsmaasses erweitert. — Der angehängte Literatur-Nachweis dürfte auf dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie kaum etwas Wesentliches vermissen lassen. Hier haben auch verschiedene orientirende Bemerkungen eine Stelle gefunden. — Das Ganze überblickend, können wir der umsichtigen Auswahl und Anordnung des weitschichtigen Stoffes ebenso rückhaltslose Anerkennung zollen, wie dem Erfolge der mühsamen, diesen Stoff überall geistig durchdringenden Arbeit, welche zur einheitlichen Darstellung der von so vielen verschiedenen Forschern angestellten Untersuchungen erforderlich war. Das Werk dürfte nicht nur dem zahlreichen Kreise der auf dem Gebiete der transcendentalen Geometrie arbeitenden Forscher eine willkommene Gabe, sondern auch wohl geeignet sein, der behandelten Disciplin neue Freunde zu gewinnen.

Waren, April 1886. V. Schlegel.

H. Wiener, **Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf einer Geraden.** Darmstadt. Brill 1885. (83 S.)

Die Methoden der Formentheorie haben sich bisher zur systematischen Aufsuchung projectiver Beziehungen allen anderen überlegen gezeigt, aus Gründen, die neuerdings in sehr klarer und übersichtlicher Weise von Study (Habilitationsschrift. Leipzig. S. 12) zusammengestellt worden sind. — Wenn es aber dem Geometer ein Gefühl der Nichtbefriedigung verursachen muss, erst am Ende eines analytischen Verfahrens aus gegebenen geometrischen Vorbedingungen ein geometrisches Resultat zu Stande kommen zu sehen, ohne dass man während der Rechnung die allmälige Bildung dieses Resultates durch geometrische Anschauung verfolgen kann, und wenn es demgemäss als ein anzustrebendes Ideal analytisch-geometrischer Methoden angesehen werden muss, dass jeder Fortschritt der Rechnung auch geometrischer Deutung und Anschauung fähig sei, so muss zugestanden werden, dass auch die Formentheorie in ihrer bisherigen äusseren Gestalt trotz aller sonstigen Vorzüge diesem Ideal noch nicht entspricht, ein Mangel, der auch a. a. O.

anerkannt wird. Freilich wird dieser Mangel weniger dem Analytiker zum Bewusstsein kommen, der sich durch den inneren ununterbrochenen Zusammenhang seiner Arbeit befriedigt fühlt, als dem Geometer, der die zwischen den gegebenen Bedingungen und dem Resultate klaffende Lücke der Anschauung störend empfinden und nach Ausfüllung derselben streben wird. Für diesen Mangel der Formentheorie kann nun auf zwei Wegen Abhilfe gesucht werden. Entweder sucht man ihre Symbolik zweckentsprechend umzugestalten, wozu die Ausdehnungslehre mit ihren einfachen geometrischen Rechnungsoperationen das geeignete Mittel bietet, oder man sucht, unter vollständigem Verzicht auf die von der Formentheorie gebotenen Mittel, eine rein geometrische Darstellung der durch Gleichungen gegebenen Gebilde zu finden, um dann weiter, ebenfalls rein geometrisch und systematisch, zu den durch Covarianten und Invarianten ausgedrückten Gebilden und Eigenschaften zu gelangen.

Letzteren Weg hat der Verfasser obiger Abhandlung (deren erster Theil als Habilitationsschrift geschrieben wurde) betreten. Formell sucht er seinen Zweck zu erreichen durch Verallgemeinerung der von v. Staudt für die rein geometrische Behandlung der Gebilde zweiter Ordnung benutzten Betrachtungsweisen, inhaltlich beschränkt er sich auf das Gebiet binärer Formen. Der Gedankengang jener Verallgemeinerung ist einfach folgender. Wie v. Staudt an Stelle des Punktepaars die durch dasselbe bestimmte Schaar harmonischer Punktepaare (Involution, hier: Polarsystem zweiter Ordnung) setzt, so kann zunächst für ein gegebenes Punktetripel eine analog gebildete Doppelschaar von Punktetripeln gesucht werden, und allgemein zu einer n-gliedrigen Punktgruppe eine $(n-1)$-fache Schaar von Punktgruppen. Ein derartiges „Polarsystem" dritter resp. n^{ter} Ordnung lässt sich dann nach den für die Involution massgebenden Gesichtspunkten untersuchen. Die hier stets reellen Punkte der gegebenen Gruppe (Ordnungspunkte) geben durch Zusammenfallen Anlass zur Entstehung besonderer Systeme. Für den Uebergang vom System zweiter zu dem dritter Ordnung, wie für alle weiteren Uebergänge und die ganze Behandlungsweise der Polarsysteme sind charakteristisch die beiden neben einander gebrauchten Bezeichnungsweisen für die Involution zweier Punktepaare $A_1 A_2$, $A_{11} A_{20}$, nämlich:

$$A_1 A_2 \overline{\wedge} A_{20} A_{11} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{matrix} A_{20} A_1 \\ A_2 \; A_{11} \end{matrix} \right\}.$$

Aus den Symbolen zweier Polarsysteme zweiter Ordnung

$$\left\{ \begin{matrix} A_{20} A_1 \\ A_2 \; A_{11} \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{matrix} A_{11} A_1 \\ A_2 \; A_{02} \end{matrix} \right\}$$

entsteht nun durch „Zuordnung" des Punktes A_1 zu jeder Gruppe des ersten und des Punktes A_2 zu jeder Gruppe des zweiten Systems das Polarsystem dritter Ordnung:

$$\left\{ \begin{matrix} A_{20} A_1 \; A_1 \\ A_2 \; A_{11} A_1 \\ A_2 \; A_2 \; A_{02} \end{matrix} \right\}.$$

Wie jene durch zwei, so ist dieses durch drei seiner Punktgruppen (z. B. die hier angeschriebenen) vollkommen bestimmt. Es ist ferner $\left\{\begin{matrix} A_{20} A_1 \\ A_2\ A_{11} \end{matrix}\right\}$ die erste Polare von A_1; A_{11} die „gemischte“ Polare der Punkte A_2 und A_1; A_{20} die zweite Polare von A_1. Da die gegenseitige Beziehung der fünf Punkte $A_1 A_2 A_{20} A_{11} A_{02}$ durch ihre Stellung in den beiden durch sie gebildeten Involutionen bestimmt ist, so ist auch die geometrische Bedeutung ihrer Zusammenstellung im System dritter Ordnung, und dadurch der Sinn obiger Zuordnung vollständig festgestellt. Die Analogie dieses Systems mit der Involution besteht nun darin, dass, wie dort jeder Punkt einer Gruppe (Horizontalreihe) durch den andern, so auch hier jeder Punkt einer Gruppe durch die beiden andern eindeutig bestimmt ist. Die oben gegebene Darstellung des Systems dritter Ordnung ist insofern eine specielle, da die Punkte A_1 und A_2 darin als Doppelpunkte („Ausgangspunkte“ der Darstellung) erscheinen. Wird nun in entsprechender Weise das Polarsystem n^{ter} Ordnung aufgestellt, so zeigt sich, dass überhaupt $(n+2)$ Punkte zur Bestimmung des Systems genügen, während im Allgemeinen zur Bestimmung jeder der n-gliedrigen Gruppen $(n-1)$ Punkte erforderlich sind.

Wenden wir uns nach dieser Darlegung der leitenden Gedanken zu einer kurzen Uebersicht des Ganzen der Darstellung, so ist voraus zu bemerken, dass dieselbe streng systematisch gegliedert ist. Nach einer über Richtung, Voraussetzungen und Inhalt der Arbeit sich äussernden Einleitung wird zuerst die Theorie projectiver Punktreihen vorgetragen. Die Begriffe der harmonischen und cyklischen Reihen, als deren Grenzpunkte die Doppelpunkte erscheinen, geben Veranlassung, diese reellen Doppelpunkte in analoger Weise nach dem „Sinn“ der Reihe zu unterscheiden, wie dies von v. Staudt und Lüroth hinsichtlich der imaginären Doppelpunkte geschehen ist. Dann folgen die Polarsysteme zweiter Ordnung, zunächst einzeln betrachtet, dann zu zweien in Verbindung mit der durch sie bestimmten Projectivität und ihrer Jakobi'schen Covariante, sowie in harmonischer Beziehung zu einander; endlich als Büschel, welches die Gesammtheit aller zu einem System harmonischer Systeme repräsentirt und zuletzt projectivisch auf eine Punktreihe bezogen wird. Analog gestaltet sich die Eintheilung des Stoffes bei den Systemen dritter und allgemein n^{ter} Ordnung. Die Aufstellung der letzteren wird in strenger Weise durch den Schluss von n auf $n+1$ begründet. Der letzte Theil der Arbeit behandelt die besonderen Eigenschaften der cyklischen Polarsysteme dritter und n^{ter} Ordnung, die mit der cyklischen Reihe in naher Beziehung stehen. Hier findet auch die Theorie der Invarianten und Covarianten des Polarsystems dritter Ordnung ihre einfachste Erledigung.

Die vorstehend skizzirten Untersuchungen gewähren den Ausblick auf ein weitausgedehntes Forschungsgebiet, namentlich wenn man bedenkt, wie das Uebertragungsprincip die Darstellung der hier vorkommenden Punkt-

gebilde auf Curven ermöglicht. In der hier begonnenen Weise weitergeführt, dürften diese Methoden wohl geeignet sein, dem vom Verfasser bezeichneten Ziele einer rein geometrischen Behandlung der Formentheorie näher zu führen. Doch möchten wir betonen, dass die in der vorliegenden Arbeit geflissentlich ausser Acht gelassenen Vortheile geometrischer Anschauung bei einer definitiven Gestaltung des Stoffes eine werthvolle Ergänzung der Darstellung bilden und gleichzeitig geeignet sein dürften, den Vorzug zu ersetzen, den die analytische Behandlung vermöge der Kürze ihrer Operationen sich stets bewahren wird.

Waren, März 1886. V. Schlegel.

Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Punktes, der geraden Linie, des Kreises und der Kegelschnitte. Für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen bearbeitet von Dr. Fr. Graefe, Professor. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner 1885. gr. 8°, 136 Seiten.

Das Buch enthält die stattliche Zahl von 1207 Aufgabennummern. Unter der Ueberschrift „Punkt“ finden wir die rechtwinkligen und schiefwinkligen Parallel-, sowie die Polarcoordinaten. Auch wird der Anfänger schon bei Nr. 19 in die Transformationsaufgaben eingewiesen. Dann folgt die Gleichung der geraden Linie, deren Normalform (Aufg. 45), die Plücker-schen Liniencoordinaten (Aufg. 103), es folgen geometrische Oerter, deren Gleichungen aufgestellt, aber nicht discutirt werden sollen. Eine solche Uebung ist für den Anfänger sehr zweckmässig und kann in der That nicht früh genug begonnen werden. Meines Erachtens hätte dieselbe der Coordinatentransformation vorausgehen sollen. Mit Aufg. 176 beginnen Discussionen, welche projectivischen Eigenschaften gewidmet sind. Es treten daher die Symbole $A_n = A_n x + B_n y + C_n$ in den Vordergrund. Man erhält das Princip der Dualität und behandelt die bekannten Sechsecke, wobei der Anfänger auf zwei Seiten bis zum Kirkmann'schen Punkte vorrückt. Die folgenden Nummern bis 307 behandeln Gleichungen höheren Grades, welche zerlegbar sind, in ansprechender Auswahl. Hierauf wird der Kreis behandelt. Die Definition der Polare wird aus dem harmonischen Pole gewonnen. Es erscheint etwas verfrüht, wenn als dritte Aufgabe bezüglich der Liniencoordinaten diejenige auftritt, welche (Aufg. 343) nach der Bedingung fragt, unter welcher die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Liniencoordinaten einen Kreis darstellt. Da früher (Aufg. 166) das Paskal'sche Sechseck unabhängig vom Kegelschnitt definirt ist, wird hier (Aufg. 348) der Beweis verlangt, dass das dem Kreise einbeschriebene Sechseck ein Paskal'sches Sechseck ist. Es folgen Aufgaben über geometrische Oerter, welche im Ganzen recht zweckmässig sind. Gleiches kann über die Behandlung der Systeme von Kreisen gesagt werden. Mit Aufgabe 464 kommen wir zu

den Kegelschnitten, wobei von der allgemeinen Gleichung ausgegangen wird. Die bekannten Specialgleichungen finden wir in Aufg. 536 zusammengestellt. Mit Aufg. 643 tritt man in Behandlung der Brennpunktseigenschaften ein, mit 698 in die der Systeme von Kegelschnitten. Die hier gegebenen Aufgaben bis 735 enthalten recht schätzbares Material und zeigen durch ihre Auswahl eine glückliche Hand. Die übrigen Aufgaben bis 1025 behandeln die speciellen drei Formen der Kegelschnitte, wobei die Parabel, nach dem vom Verfasser verfolgten Plane mit Recht, zuletzt kommt. Die Schlussaufgaben enthalten vermischte Fragen und Sätze aus dem Gebiete der Kegelschnitte und bieten viel Interessantes.

Es sind dem Referenten einige wenige Druckfehler und sprachliche Härten aufgefallen. Auch hofft er, dass der Verfasser bei Veröffentlichung der Antworten und Andeutung der Lösungen, welche er im Vorworte in Aussicht stellt, ein Sachregister beizufügen nicht versäumen wird.

Uebrigens sei das Buch als wissenschaftlich correct, als reich an Inhalt und didaktisch im Ganzen anerkennenswerth hiermit empfohlen.

Coesfeld, Januar 1886. K. Schwering.

Grundriss der Differential- und Integralrechnung. II. Theil: Integralrechnung. Mit besonderer Rücksicht auf das wissenschaftliche Bedürfniss technischer Hochschulen. Von M. Stegemann, Dr. phil., weil. Professor an der königl. technischen Hochschule zu Hannover. 4. vollständig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage mit 86 Figuren im Texte herausgegeben von ***. Hannover, 1886. Helwing'sche Verlagsbuchhandlung. XII, 446 S.

Dem an sich schon nicht allzukurzen Titel hat die Verlagshandlung auf dem Deckblatte noch ganz oben beigefügt: Zum Selbststudium und als Leitfaden für Vorträge. Am Fusse ist des Weiteren bemerkt: Der Leser wird auf die Formeltabelle, S. 429, besonders aufmerksam gemacht. Referent bekennt offen, dass ihn nicht leicht ein zweites mathematisches Werk von vornherein so misstrauisch fand als dieses. Der Ruf geringer Zuverlässigkeit und durchaus mangelnder Strenge, der den früheren Auflagen anhaftete, die Anonymität, in welche der neue Herausgeber sich hüllt, die erwähnte, dem Mathematiker ungewohnte Empfehlung durch Hinweis auf eine Formeltabelle, das Alles brachte keinen günstigen Eindruck hervor. Referent hätte aber dieses Bekenntniss nicht in so grellen Tönen ausgesprochen, wenn er nicht hinzusetzen dürfte, dass beim Lesen des Buches jenes Misstrauen, jener unangenehme Eindruck von Seite zu Seite schwand, so dass er vielmehr sich berechtigt fühlt, das Buch als wirklich empfehlenswerth zu bezeichnen. Natürlich will ja jedes Buch nach den Zwecken beurtheilt sein, denen es zu dienen beabsichtigt. Man würde nur mit Unrecht Vergleiche anstellen mit Werken ganz anderer Bestimmung, wenn auch

ähnlichen Titels. So heisst auch der II. und III. Theil des durch Herrn Harnack übersetzten Serret'schen Lehrbuches: Integralrechnung, aber mit dem heute uns vorliegenden Bande haben sie nur wenig gemein. Am liebsten möchten wir ihn zu der Dölp'schen Aufgabensammlung in Parallele stellen. Dort sind dem Leser mannigfache Aufgaben zur Uebung in den Lehren des Infinitesimalcalculs geboten, und damit diese Lehren nicht erst aus anderen Quellen beigeschafft werden müssen, sind dieselben eingeschalteter Weise kurz, fasslich und doch verhältnissmässig streng abgeleitet. In der „Integralrechnung" bilden freilich die Aufgaben die Einschaltungen, aber es ist auf deren Auswahl ein solches Gewicht gelegt, die Auflösung ist meistens so weitläufig ausgesponnen, dass es uns zweifelhaft ist, ob sie nicht räumlich die grösste Bogenanzahl erfüllen. Den Ableitungen kann man mit Recht nachsagen, dass sie, ohne der Strenge zuviel zu vergeben, fasslich dargestellt sind. Wer also von der Lehre des Complexen Nichts zu wissen braucht, wer die Feinheiten moderner Betrachtungen entbehren kann, wem es dagegen darauf ankommt, integriren und auch mit Differentialgleichungen umgehen zu lernen, wer zugleich wünscht, nicht gerade Falsches mit in den Kauf nehmen zu müssen, der wird dieses Buch mit Nutzen gebrauchen und sich auch der Formeltabelle vielleicht erfreuen, wenngleich auf dieselbe besonders aufmerksam zu machen nicht unentbehrlich war.

CANTOR.

Bibliographie

vom 15. September bis 31. October 1886.

Periodische Schriften.

Berichte über d. Verhandl. d. k. S. Gesellschaft d. Wissensch. Math.-phys. Cl., 1886, I—IV. Leipzig, Hirzel. 4 Mk.

Sitzungsberichte der kais. Akademie d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Cl., Abth. II. Bd. 93, Heft 1 u. 2. Wien, Gerold. 6 Mk.

Astronomische Beobachtungen auf d. königl. Universitätssternwarte zu Bonn. 8. Bd. Bonner Sternverzeichniss, 4. Sect., herausgeg. v. E. SCHÖNFELD. Bonn, Marcus. 20 Mk.

Veröffentlichungen der Grossherzogl. Sternwarte in Karlsruhe, herausgeg. v. W. VALENTINER. 2. Heft. Beobachtungen am Meridiankreis. Karlsruhe, Braun. 16 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft, herausgeg. von E. SCHÖNFELD und H. SEELIGER. 21. Jahrg. 3. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Mathematische Annalen, herausgeg. v. F. KLEIN und A. MAYER. 28. Bd., 1. Heft. Leipzig, Teubner. compl. 20 Mk.

Tageblatt der 59. Naturforscherversammlung zu Berlin, 1886. Berlin, Enslin. compl. 9 Mk.

Reine Mathematik.

Krause, M., Die Transformation der hyperelliptischen Functionen I. Ordn. nebst Anwendungen. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Ameseder, A., Z. Theorie d. Thetacharakteristiken. (Ak.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Mandl, J., Ueber eine Classe algebraisch auflösbarer Gleichungen 5., 6. und 7. Grades. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

Mertens, F., Ueber die bestimmenden Eigenschaften der Resultante von n Formen mit n Veränderlichen. (Akad.) Ebendas. 60 Pf.

Kapteyn, C. und W., Die höheren Sinus. (Akad.) Ebendas. 1 Mk.

Gegenbauer, L., Arithmetische Notiz. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

Blater, J., Napiertafel, enth. die 9 Vielfachen aller Zahlen verm. Zusammensetzung d. zugehörigen Stäbchen etc. Mainz, Frey. 1 Mk.

Bobek, K., Ueb. d. verallgemein. Correspondenzprincip. (Ak.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Feil, M., Ueber Euler'sche Polyeder. (Akad.) Ebendas. 50 Pf.

Mandl, J., Der Pohlke'sche Satz der Axonometrie und seine Erweiterung. (Akad.) Ebendas. 60 Pf.

Bobek, K., Ueber hyperelliptische Curven. (Akad.) Ebendas. 40 Pf.

Reye, Th., D. Geometrie d. Lage. 1. Abth. 3. Aufl. Leipzig, Baumgärtner. 9 Mk.

Wöckel, L, Die Geometrie der Alten in 856 Aufgaben. Neu bearb. u. verb. v. Th. E. Schröder. 13. Aufl. Nürnberg, Korn. 1 Mk. 80 Pf.

Zeuthen, G., Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum, deutsch v. R. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen, Höst. 13 Kr. 50 Oe.

Wallentin, F., Auflösungen zu den Maturitätsfragen aus der Mathematik. Wien, Gerold. 3 Mk. 60 Pf.

Gallien, K., Lehrbuch der Mathematik f. höh. Schulen. I. Thl. Arithm. u. Alg. 2. Thl. Geom. Berlin, Weidmann. 2 Mk.

Halphen, H., Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. I. partie. Paris, Gauthier-Villars. 15 Frcs.

Angewandte Mathematik.

Meitzen, A., Gesch., Theorie u. Technik d. Statistik. Berlin, Besser. 4 Mk. 60 Pf.

Kihm, C., Die Gewinnsysteme mit steigenden Dividenden bei Lebensversicherungen. Zürich, Orell Füssli & Co. 3 Mk.

Castigliano, A., Theorie des Gleichgewichts elastischer Systeme und deren Anwendung. Aus d. Franz. v. E. Hauff. Wien, Gerold. 20 Mk.

Henneberg, L. u. O. Smreker, Lehrbuch der technischen Mechanik. 1. Thl. Statik der starren Systeme. Darmstadt, Bergsträsser. 9 Mk.

Korteweg, J., Ueb. d. Stabilität period. eb. Bahnen. (Ak.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Loschmidt, J., Schwingungszahlen ein. elast. Hohlkugel. (Ak.) Ebendas. 30 Pf.

Toepler, E., Zur Ermittelung des Luftwiderstands nach der kinetischen Theorie. (Akad.) Ebendas. 1 Mk.

Lange, L., Die geschichtliche Entwickelung des Bewegungsbegriffs und ihr voraussichtliches Endergebniss. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Fennel, O., Die Wagner-Fennel'schen Tachymeter. Berlin, Springer. 2 Mk.

Schurig, R., Himmelsatlas aller mit blossen Augen sichtbaren Sterne beider Hemisphären. Leipzig, Gaebler's geogr. Inst. 3 Mk.

Schönfeld, E., Bonner Sternkarten, 2. Serie. Atlas der Himmelszone zwischen 1° u. 23° südl. Declin. f. d Anf. v. 1855. Bonn, Marcus. 12 Mk.

Bidschof, F., Ueber die Bahn des Planeten Stephania (220). (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Oppolzer, Th. v., Bahnbestimmung des Planeten Cölestina (237). (Akad.) Ebendas. 30 Pf.

Weiss, E., Ueber d. Berechnung d. Präcession m. bes. Rücks. auf d. Reduction ein. Sterncatalogs auf eine and. Epoche. (Akad.) Ebendas. 1 Mk. 50 Pf.

Oppolzer, Th. v., Ueber die astronomische Refraction. (Akad.) Ebendas. 2 Mk. 60 Pf.

Birkenmajer, L., Ueber die durch die Fortpflanzung d. Lichts hervorgerufenen Ungleichheiten in d. Bewegung physischer Doppelsterne. Analyse d. Bahn v. ξ Ursae majoris. (Akad.) Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

Seeliger, H., Ueber den Einfluss dioptrischer Fehler des Auges auf das Resultat astronom. Messungen. (Akad.) München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Meisel, F., Geomet. Optik (d. einfachst. Erscheinungen). Halle, Schmidt. 6 Mk.

Henrich, F., Lehrbuch der Kystallberechnung. Stuttgart, Enke. 8 Mk.

Mascart, E., Handbuch der statischen Elektricität. Deutsch v. G. Wallentin. 2. Bd. 1. Abth. Wien, Pichler. 9 Mk.

Physik und Meteorologie.

Kelling, J., Ueber die Zustandsbedingungen der Flüssigkeiten und Gase sowie über den Aether. Karlsruhe, Braun. 1 Mk. 50 Pf.

Lommel, E., Die Beugungserscheinungen geradliniger begrenzter Schirme. München, Franz (J. Roth). 4 Mk. 50 Pf.

Hering, E., Ueber Newton's Gesetz der Farbenmischung. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 50 Pf.

Pscheidl, W., Bestimmung der Brennweite einer Concavlinse mittelst des zusammengesetzten Mikroskops. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Lang, V. v., Bestimmung der Tonhöhe einer Stimmgabel mittelst des Hipp'schen Chronoskops. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

Klemenčič, J., Ueber das Verhältniss zwischen dem elektrostatischen und elektromagnetischen Maasssystem. II. (Akad.) Ebendas. 50 Pf.

Hann, J., Bemerkungen z. tägl. Oscillation d. Barometers. (Ak.) Ebendas. 30 Pf.

Fournier, G., Terminologie électrique. Vocabulaire français-anglais-allemand. Paris, Tignol. 1 Frcs. 50 C.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1885.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abbildung.

255. Die Abbildung des Aeussern eines Kreisbogenpolygons auf eine Kreisfläche. Th. Sanio. Grun. Archiv 2. R. III, 1.
256 Zur Theorie der Abbildung mittels gebrochener rationaler Functionen. O. Biermann. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 84.
257. Ein einfacher Beweis für die Erhaltung des Doppelverhältnisses von 4 Punkten der Ebene bei linealer Abbildung. Fr. Hofmann. Grun. Archiv 2. R. III, 446.
258. Sur une méthode pour traiter les transformations périodiques univoques. S. Kantor. Compt. Rend. C, 42, 95, 343.
259. Zur Theorie der Berührungstransformationen. Fr. Engel. Math. Annal. XXIII, 1.
260. Ueber parallel geordnete Orthogonalsysteme. A. Voss. Math. Annal. XXIV, 48.
Vergl. Mannigfaltigkeiten 550.

Abel'sche Transcendenten.

261. Sur une classe de fonctions abéliennes et sur un groupe hyperfuchsien. E. Picard. Compt. Rend. XCVIII, 289.
262. Sur une nouvelle généralisation des fonctions abéliennes. E. Picard. Compt. Rend. XCVIII, 665.
263. Sur la réduction des intégrales abéliennes. H. Poincaré. Compt. Rend. XCIX, 853.
264. Sur les fonctions abéliennes. H. Poincaré. Compt. Rend. C, 785.
265. Sur l'inversion des intégrales abéliennes. Appell. Compt. Rend. XCIX, 1010.
Vergl. Zahlentheorie 728.

Aerodynamik.

266. Sur la propagation d'un ébranlement uniforme dans un gaz renfermé dans un tuyau cylindrique. Sebert & Hugoniot. Compt Rend. XCVIII, 507.

Analytische Geometrie der Ebene.

267. Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 28. Grades, von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung abhängen. H. Weber. Math. Annal. XXIII, 489.
268. Ueber gewisse mechanisch erzeugbare Curven und Flächen höherer Ordnung. A. Puchta. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 571.
269. Sur le limaçon de Pascal. A. Genocchi. Compt. Rend. XCVIII, 81.
270. Ueber complementäre Punkte E Hain. Grun. Archiv 2. R. III, 214.
271. Ein Dreiecksatz. E. Hain. Grun. Archiv 2. R. II, 435.
Vergl. Elliptische Transcendenten 385, 386. Kegelschnitte.

Analytische Geometrie des Raumes.

272. Einige allgemeine Sätze über Raumcurven. A. Hurwitz. Math. Annal. XXV, 287.
273. Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme. A. Voss. Math. Annal. XXIII, 45.
274. Theorie der rationalen algebraischen Punktebenensysteme. A. Voss. Math. Annal. XXIII, 359.
275. Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form. F. Klein. Math. Annal. XXIII, 539.

276. Sur les différentes espèces de complexes du 2e degré des droites qui coupent harmoniquemend deux surfaces du second ordre. C. Segre & G. Loria. Math. Annal. XXIII, 213.
277. Sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du 2e degré double. C Segre. Math. Annal. XXIII, 235.
278. Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten. S. Lie & F. Klein. Mathem. Annal. XXIII, 579.
279. Erweiterung des Aoust'schen Problems der Curventheorie. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. II, 129. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 23.]
280. Zum Molins'schen Problem. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. II, 269.
281. Neue Relationen innerhalb eines Orthogonalcoefficientensystems. R. Hoppe. Grun. Archiv. 2. R. II, 413.
282. Rein analytische Consequenzen der Curventheorie. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. II, 417.
283. Distance d'un point d'une courbe gauche à la sphère osculatrice au point infiniment voisin. L. Lecornu. Compt. Rend. C, 1207.
Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiten Grades.

Astronomie.

284. Harmonic motion in stellar systems. Pl. E. Chase. Phil. Mag. Ser. 5, XVIII, 200; XIX, 190.
285. Sur un théorème de Lambert. E. Vicaire. Compt. Rend. C, 842.
286. Sur la détermination des orbites par trois observations. R. Radau. Compt. Rend. XCIX, 643.
287. De l'influence des perturbations dans la détermination des orbites. E. Vicaire. Compt. Rend. C, 778.
288. Die intermediäre Bahn des Mondes. H. Gyldén. Acta math. VII, 125.
289. Methode der directen Rechnung einer wahren Monddistanz aus einer beobachteten. F. Zehden. Wien. Akad. Ber. XC, 534.
290. Ueber die Schweifaxe des Kometen 1874, III (Coggia). J. v. Hepperger. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 1053.
291. Ueber Lage und Gestalt von Isochronen in Kometenschweifen. J. v. Hepperger. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 741.
292. Sur les distances moyennes des planètes dans l'état primordial du système solaire. H. Gyldén. Compt. Rend. XCVIII, 1363.
293. Sur le changement des excentricités des orbites planétaires, dû à la concentration de la matière dans l'espace. H. Gyldén. Compt. Rend. XCIX, 219.
294. Quelques remarques au sujet de la théorie de la figure des planètes. F. Tisserand. Compt. Rend. XCIX, 399, 518, 577.
295. Procédés d'observations des polaires à une grande distance du méridien. Loewy. Compt. Rend. C, 682.
296. Sur la limite d'exactitude des formules différentielles employées dans la réduction des observations méridiennes. M. Loewy. Compt. Rend. C, 141, 201.
297. Inexactitudes commises par l'emploi des formules usuelles dans la réduction des étoiles polaires et dans la détermination de la collimation astronomique. M. Loewy. Compt. Rend. C, 401.
298. Sur l'effet des erreurs instrumentales dans la détermination du tour de vis. M. Loewy. Compt. Rend. C, 1269.
299. Sur les constantes du grand miroir du sextant. Gruey. Compt. Rend. C, 898, 969.
300. Sur un mode d'emploi du sextant, pour obtenir, par une seule observation, les hauteurs ou les angles horaires simultanés de deux astres. Gruey. Compt. Rend. C, 1448.
301. Sur un instrument pouvant donner, dans la même lunette, les images de deux astres au moment où ils ont la même hauteur, et, de plus, permettant de déterminer, par une seule observation, l'heure sidérale du lieu, la latitude et l'orientation exacte, pour le tour d'horizon. Ch. Rouget. Compt. Rend. XCVIII, 283.
Vergl. Geodäsie. Geschichte der Mathematik 455. 456. 457. 471. 472. Gnomonik. Meteorologie. Nautik. Reihen 675.

B.

Bestimmte Integrale.

302. Sur les intégrales de différentielles totales algébriques. E. Picard. Compt. Rend. XCIX, 961, 1147. C, 843.
303. Sur les intégrales de différentielles totales. H. Poincaré. Compt. Rend. XCIX, 1145.

304. Sur une généralisation de la théorie des quadratures mécaniques. T. J. Stieltjes. Compt. Rend. XCIX, 850.
305. Ermittelung von Grenzen für die Werthe bestimmter Integrale. A. Winckler. Wien. Akad. Ber. XC, 528.
306. Démonstration de certaines inégalités de M. Tchébychef. A. Markoff. Math. Annal. XXIV, 172.
307. Sur une intégrale définie. Laguerre. Compt. Rend. C, 624.
308. Sur une intégrale définie. S. Pincherle. Acta math. VII, 381.
309. Ueber $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$ und verwandte Integrale. L. Schläfli. Acta math. VII, 187.

Vergl. Functionen 391. Interpolation 522. Quadratur. Rectification.

C.

Capillarität.

310. Sur l'accord de l'expérience et de la théorie dans l'élévation de l'eau entre des plaques verticales, parallèles et mouillées. Quet. Compt. Rend. XCVIII, 87.
311. On the surface forces in fluids. A M. Worthington. Phil. Mag. Ser. 5. XVIII, 334.

Vergl. Elektricität 374.

Chronologie.

312. Darlegung der in den Hilfstafeln für Chronologie zur Tabulirung der jüdischen Zeitrechnung angewandten Methode. R. Schram. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 158.

Vergl. Geschichte der Mathematik 455.

Combinatorik.

313. Die Umkehrung des Grundgedankens von Hindenburg's combinatorischer Analysis. Fr. Roth. Grun. Archiv 2. R. II, 82. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 538.]

Vergl. Differentialquotient. Zahlentheorie 717.

Crystallographie.

314. Sur les répétitions et la symétrie. P. Curie. Compt. Rend C, 1393.

Cubatur.

315. Zur Cubatur der Malus'schen Wellenflächen. W. Ruchhöft. Grun. Archiv 2. R. III, 225.
316. Körper zwischen zwei Rotationsellipsoiden. A. Bieler. Grun. Archiv 2. R. II, 439.

Cylinderfunctionen.

317. Ueber die Bessel'schen Functionen. S. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 975.

D.

Determinanten.

318. Ueber Functionaldeterminanten. L. Kraus. Wien. Akad Ber. XC, 813.
319. Un théorème d'algèbre. T. J. Stieltjes Acta math. VI, 319.
320. Ein Satz über Determinanten. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. II, 106.

Vergl. Astronomie 285. Geschichte der Mathematik 477.

Differentialgleichungen.

321. Sur un théorème de M. Fuchs. H. Poincaré. Compt. Rend. XCIX, 75. — Acta math. VII, I.
322. Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche, endliche Gruppe gestatten. S. Lie. Math. Annal. XXV, 71.
323. Un probleme sulle espressioni differenziali. G. Torelli. Annali math. Ser. 2, XIII, 23. Vergl. Nr. 388.
324. Sur un théorème de M. Darboux reliant l'intégrale générale d'équations du premier ordre à un nombre suffisant de solutions particulières algébriques. E. Picard. Compt. Rend. C, 618.
325. Ueber die singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. O. Biermann. Wien. Akad. Ber. XC, 897.
326. Sopra alcuni sistemi di equazioni differenziali. G. Ricci Annali mat. Ser. 2, XII, 42.
327. Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades. A. Voss. Math. Annal. XXIII, 157.

328. Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires. Halphen. Compt. Rend. XCVIII, 134. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 545.]
329. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. G. Floquet. Compt. Rend. XCVIII, 38, 82.
330. Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XIII, 1.
331. Sur les intégrales algébriques des équations linéaires. E. Goursat. Compt. Rend. C, 1329.
332. Sur certains polynômes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé. T. J. Stieltjes. Acta math. VI, 321.
333. Sur les formes intégrables des équations linéaires du second ordre. R. Liouville. Compt. Rend. C, 235.
334. Sur une équation analogue à l'équation de Kummer. E. Goursat. Compt. Rend. XCIX, 777, 858. Math. Annal. XXIV, 445.
335. Ueber gewisse Differentialgleichungen dritter Ordnung. F. Klein. Math. Annal. XXIII, 587.
336. Sur une équation différentielle du troisième ordre. E. Goursat. Compt. Rend. XCVIII, 419, 609.
337. Sur une équation différentielle linéaire du troisième ordre. Halphen. Math. Annal. XXIV, 461.
338. Sur un cas de réduction des équations linéaires du quatrième ordre. E. Goursat. Compt. Rend. C, 233.
339. Sur une équation linéaire. E. Goursat. Compt. Rend. XCVIII, 1248.
340. Sur une équation différentielle. H. Poincaré. Compt. Rend. XCVIII, 793.
341. Integration von $\left(x-\frac{y}{y'}\right)(x+yy')=const.$ Jos. Sachs. Grun. Archiv 2. R. III, 330.
342. Sul grado e sopra i discriminanti di una equazione algebrico differenziale del primo ordine fra quattro variabili e della sua primitiva completa algebrica. F. A. Arcais. Annali mat. Ser. 2, XII, 1.
343. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. E. Picard. Compt. Rend. C, 231.
344. Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln. Jul. König. Math. Annal. XXIV, 465.
345. Ueber eine neue Methode zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. A. Winckler. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 7.
346. Ueber eine Methode zur Integration der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. A. Winckler. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 614.
347. Zur Integration der Gleichung $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0$. O. Ohnesorge. Grun. Archiv 2. R. II, 53.
348. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, qui contiennent linéairement les dérivées les plus élevées. R. Liouville. Compt. Rend. XCVIII, 216, 569.
349. Sur l'équation $r=q^{2m}t$. R. Liouville. Compt. Rend. XCVIII, 723.
350. Sur quelques transformations nouvelles des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. R. Liouville. Compt. Rend. C, 168.
351. Sur certaines équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. L. Lévy. Compt. Rend. C, 98.
352. Reduction der Bedingungen des Euler'schen Kriteriums der Integrabilität auf eine einzige Gleichung. A. Winckler. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 820.
353. Généralisation du théorème de Jacobi sur les équations de Hamilton. J. Farkas. Compt. Rend. XCVIII, 352.
354. Ueber die Integration der Hamilton'schen Systeme und der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Jul. König. Math. Annal. XXIII, 504.
355. Ueber die Integration simultaner Systeme partieller Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Functionen. Jul. König. Math. Annal. XXIII, 520.

Vergl. Invariantentheorie 526. Kettenrüche 536.

Differentialquotienten.

356. Ueber einen Satz der Zahlentheorie. F. Gomes-Teixeira. Grun. Archiv 2. R. II, 265. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 561.]

Vergl. Functionen 391.

Differenzengleichung.

357. On the general equation of differences of the second order. Th. Muir. Phil. Mag. Ser. 5, XVII, 115.

E.

Elasticität.

358. Sur une courbe élastique. Halphen. Compt. Rend. XCVIII, 422. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 762.]
359. Ueber die Biegung und Drillung eines unendlich dünnen elastischen Stabes, dessen eines Ende von einem Kräftepaar angegriffen wird. W. Hess. Math. Annal. XXIII, 181.
360. Ueber die Biegung und Drillung eines unendlich dünnen elastischen Stabes mit zwei gleichen Widerständen, auf dessen freies Ende eine Kraft und ein um die Hauptaxe ungleichen Widerstandes drehendes Kräftepaar einwirkt. W. Hess. Math. Annal. XXV, 1.

Elektricität.

361. On the structure of mechanical models illustrating some properties of the aether. G. F. Fitzgerald. Phil. Mag. Ser. 5, XIX, 438.
362. Ueber die Energie und den Zwangszustand im elektrostatischen Felde. G. Adler. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 594; XC, 1076.
363. Sur l'action réciproque de deux sphères électrisées. Mascart. Compt. Rend. XCVIII, 222.
364. Conditions d'équilibre d'une lame liquide soumise à des actions électromagnétiques. G. Lippmann. Compt. Rend. XCIX, 747.
365. Généralisation et démonstration rigoureusement mécanique de la formule de Joule. A. Ledieu. Compt. Rend. XCVIII, 69.
366. Sur la détermination de l'ohm par la méthode de l'amortissement. Mascart. Compt. Rend. C, 309, 701.
367. On the theory of dynamo-electrical machines. R. Clausius. Phil. Mag. Ser. 5, XVII, 46, 119, 518.
368. On the electromagnetic wave-surface. Ol. Heaviside. Phil. Mag. Ser. 5, XIX, 397.
369. Sur la théorie de l'induction électrodynamique. P. Duhem. Compt. Rend. C, 44.
370. Electromagnetic induction in conducting sheets and solid bodies. J. Larmor. Phil. Mag. Ser. 5, XVII, 1, 327. – F. Himstedt ibid. 326.
371. Ueber die Berechnung der Inductionscoefficienten von Drahtrollen. J. Stefan. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 1201.
372. Sur la régulation de la vitesse des moteurs électriques. M. Deprez. Compt. Rend. C, 1128, 1162.
373. De l'action de la chaleur sur les piles, et de la loi de Kopp et de Woestyne. G. Lippmann. Compt. Rend. XCIX, 895.
374. Sur les relations électrocapillaires. P. Garbe. Compt. Rend. XCIX, 123.
375. On the quadrant-electrometer. J. Hopkinson. Phil. Mag. Ser. 5, XIX, 291.

Vergl. Differentialgleichungen 347.

Elliptische Transcendenten.

376. Sur la théorie des fonctions elliptiques. K. Weierstrass. Acta math. VI, 169. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 647.]
377. Zur Theorie der elliptischen Functionen. H. Weber. Acta math. VI, 329.
378. Sulla teoria delle funzioni ellittiche. F. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XII, 49.
379. Sur un théorème concernant les fonctions elliptiques. E. Phragmén. Acta math. VII, 33.
380. Beweis eines Satzes aus der Theorie der elliptischen Functionen. M. Falk. Acta math. VII, 197.
381. Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. G. Pick. Math. Annal. XXV, 433.
382. Ueber einige Bildungsgesetze in der Theorie der Theilung und der Transformation der elliptischen Functionen. G. Morera. Math. Annal. XXV, 203.
383. Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale. M Tichomandritzky. Math. Annal. XXV, 197. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 464.]
384. On the expression for the complete elliptic integral of the second kind as a series proceeding by sines of multiples of the modular angle. J. W. L. Glaisher. Phil. Mag. Ser. 5, XIX, 504.

385. Transformationen der elliptischen Integrale und Functionen in Verbindung mit der Theorie der Kettenlinie. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. II, 138.
386. On the quadriquadric curve in connexion with the theory of elliptic functions. A. Cayley. Math. Annal. XXV, 152.

F.

Factorenfolge.

387. Sur une représentation de la fonction exponentielle par un produit infini. R. Lipschitz. Compt. Rend. XCIX, 701.
Vergl. Reihen 669.

Formen.

388. Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche. G. Ricci. Annali mat. Ser. 2, XII, 135. Vergl. Nr. 328.
389. Untersuchungen über quadratische Formen. Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält. H. Minkowski. Acta math. VII, 201.
390. Ueber einige algebraische Formen, welche in der Theorie der Curven vom Geschlechte $p=o$ auftreten. B. Igel. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 218.
Vergl. Invariantentheorie. Oberflächen. Zahlentheorie.

Functionen.

391. Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variabeln mit ihren Ableitungen. Ax. Harnack. Math. Annal. XXIII, 244; XXIV, 217.
392. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. C. Runge. Acta math. VI, 229.
393. Zur Theorie der analytischen Functionen. C. Runge. Acta math. VI, 245.
394. Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate coi medesimi. S. Pincherle. Annali mat. Ser. 2, XII, 11, 107.
395. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen. O. Biermann. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 266.
396. Sur les fonctions holomorphes de genre quelconque. E. Cesaro. Compt. Rend. XCIX, 26. — Hermite ibid. 27.
397. Ueber eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden. O. Rausenberger. Math. Annal. XXV, 222.
398. Sur certaines fonctions doublement périodiques de seconde espèce. E. Goursat. Compt. Rend. XCVIII, 35.
399. Die vierte Rechnungsstufe. E. Schulze. Grun. Archiv 2. R. III, 302.
400. Ueber den Eisenstein'schen Satz. F. Gomes-Teixeira. Grun. Archiv 2. R. III, 315.
401. Sur une généralisation du théorème d'Abel. H. Poincaré. Compt. Rend. C, 40.
402. Sur les valeurs que prend un polynôme entier lorsque la variable varie entre des limites déterminées. Laguerre. Compt. Rend. XCVIII, 136.
403. Sur la composition de polynômes algébriques qui n'admettent que des diviseurs premiers d'une forme déterminée. Lefébure. Compt. Rend. XCVIII, 293, 413, 567, 613.
404. Sur les diviseurs de certains polynômes et l'existence de certains nombres premiers. A. Genocchi. Compt. Rend. XCVIII, 411.
405. Sur les intégrales de certaines équations fonctionelles. G. Koenigs. Compt. Rend. XCIX, 1016.
406. Ueber gewisse durch Functionalgleichungen definirte Functionen. G. Pick. Math. Annal. XXIV, 590.
407. Sur les groupes hyperfuchsiens. H. Poincaré. Compt. Rend. XCVIII, 503.
408. Sur les fonctions hyperfuchsiennes. E. Picard. Compt. Rend. XCVIII, 568. XCIX, 852.
409. Sur les substitutions linéaires. H. Poincaré. Compt. Rend. XCVIII, 349.
410. Sur certaines substitutions linéaires. E. Picard. Compt. Rend. XCVIII, 416.
411. Ueber ganzzahlige lineare Substitutionen. G. Pick. Math. Annal. XXIV, 588.
412. Ueber die Zusammensetzung ganzzahliger linearer Substitutionen von der Determinante 1 aus einer geringsten Anzahl fundamentaler Substitutionen. A. Krazer. Annali mat. Ser. 2, XII, 283.
413. Sur les groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe des substitutions quadratiques. Autonne. Compt. Rend. XCVIII, 565.
414. Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe semi-cubique Cremona. Autonne. Compt. Rend. XCIX, 646.

415. Proof of Prof. Sylvester's third law of motion. A. Buchheim. Phil. Mag. Ser. 5, XVIII, 459.
416. Détermination du genre d'une courbe algébrique. L. Raffy. Math. Annal. XXIII, 527.
417. Sur les courbes définies par les équations différentielles. H. Poincaré. Compt. Rend. XCVIII, 287.
418. Ueber die Begrenzungen von Continua. E. Phragmén. Acta math. VII, 43.
419. Sur les coupures des fonctions. Laguerre. Compt. Rend. XCIX, 1065.
420. Ueber verwandte s-Functionen. E. Papperitz. Math. Annal. XXV, 212.
Vergl. Abbildung. Abel'sche Transcendenten. Bestimmte Integrale. Cylinderfunctionen. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotienten. Differenzengleichungen. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Formen. Gleichungen. Invariantentheorie. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Mannigfaltigkeiten. Quaternionen. Reihen. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten. Zahlentheorie.

G.

Geodäsie.

421. Sur un moyen d'obtenir la longitude d'un lieu, où l'on connaît la latitude et le temps sidéral, par l'observation de la hauteur vraie de la Lune à un moment précis connu d'avance. Ch. Rouget. Compt. Rend. XCVIII, 226.
Vergl. Astronomie 294. Hydrodynamik 516, 517, 518.

Geometrie (abzählende).

422. Ueber Systeme von Plancurven. H. Krey. Acta math. VII, 49.

Geometrie (descriptive).

423. Ueber den Pohlke'schen Satz. Fr. Schur. Math. Annal. XXV, 596.
424. Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie. C. Pelz. Wien. Akad. Ber. XC, 1060.
425. Nota sur le lavis d'une sphère. J. Cottillon. Compt. Rend. XCVIII, 139.
426. Ein Beitrag zur Schattenlehre. J. Prochazka. Grun. Archiv 2. R. II, 101.
Vergl. Geschichte der Mathematik 463.

Geometrie (höhere).

427. Zur Theorie der Collineation und der Reciprocität. M. Pasch. Math. Annal. XXIII, 419.
428. Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte. G. Kohn. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 424.
429. Zur harmonischen Theilung. B. Sporer. Grun. Archiv 2. R. II, 111.
430. Ueber Satellitcurven und Satellitflächen. G. Kohn. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 144.
431. Ueber das Problem der Glanzpunkte. P. H. Schoute. Wien. Akad. Ber. XC, 983.
432. Geometrische Darstellung der Theorie der Polargruppen. E. Waelsch. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 418.
433. Ueber die Bestimmung von Punktgruppen aus ihren Polaren. E. Waelsch. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 1039.
434. Ueber ein Schliessungsproblem. E. Waelsch. Wien. Akad. Ber. XC, 160.
435. Ueber einen Satz von Stephanos. G. Kohn. Wien. Akad. Ber. XC, 226.
436. Sur les courbes algébriques planes de degré quelconque. M. d'Ocagne. Compt. Rend. XCIX, 779.
437. Ueber projectivische Erzeugung von Curven. K. Bobek. Math. Annal. XXV, 448.
438. Ueber die Steiner'schen Polygone auf einer Curve dritter Ordnung C^3 und damit zusammenhängende Sätze aus der Geometrie der Lage. K. Küpper. Math. Annal. XXIV, 1.
439. Metrische Eigenschaften der kubischen Parabel (Raumcurve dritter Ordnung). H. Schroeter. Math. Annal. XXV, 293.
440. Propiétés de 9 points d'une courbe gauche du quatrième ordre, de 7 points d'une cubique gauche, de 8 points associés. A. Petot. Compt. Rend. XCVIII, 1245.
441. Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten. P. H. Schoute. Grun. Archiv 2. R. II, 113. III, 113.
442. Sur les courbes du quatrième ordre. C. Le Paige. Compt. Rend. XCVIII, 353.
443. Eine einfache lineare Construction der ebenen rationalen Curven fünfter Ordnung. K. Rohn. Math. Annal. XXV, 598.

444. Die Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlecht Eins. Em. Weyr. Wien. Akad. Ber. XC, 206.
445. Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlecht Eins. Em. Weyr. Wien Akad. Ber. LXXXVIII, 436.
446. Ueber die Aufgabe, alle Elemente einer q-gliedrigen Gruppe binärer Formen zu construiren, wenn q dieser Formen gegeben sind. H. Thieme. Math. Annal. XXIII, 597.
447. Sur les involutions biquadratiques. C. Le Paige. Compt. Rend. XCVIII, 285.
448. Le involuzioni di 3ª e 4ª classe V. Martinetti. Annali mat. Ser. 2, XII, 73.
449. Sopra alcune trasformazioni involutorie del piano. V. Martinetti. Annali mat. Ser. 2, XIII, 53.
450. Sur l'involution des dimensions supérieures. J. S. Vanecek & M. N. Vanecek. Compt. Rend. XCIX, 742, 856, 909.

Vergl. Elliptische Transcendenten 385, 386. Formen 390. Functionen 416, 417. Invariantentheorie 525. Kinematik. Lemniscate. Mechanik 555. Oberflächen. Oberflächen zweiten Grades.

Geometrie der Lage.

451. Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie. O. Simony. Math. Anal. XXIV, 253. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 939. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 171.]
452. Ueber einige allgemeine auf Knotenverbindungen bezügliche Gesetze. L. Koller. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 250.
453. Listing's Topologie. Tait. Phil. Mag. Ser. 5, XVII, 30.

Geschichte der Mathematik.

454. Ueber den sogenannten Seqt der ägyptischen Mathematiker. M. Cantor. Wien. Akad. Ber. XC, 475.
455. Ueber die Länge des Siriusjahres und der Sothisperiode. Th. v. Oppolzer. Wien. Akad. Ber. XC. 557.
456. Astronomische Untersuchungen über Finsternisse. F. K. Ginzel. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 629. LXXXIX, 491. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 732.]
457. Ueber Kometenerscheinungen in früheren Jahrhunderten. M. Lersch. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 767.
458. Sur le Tractatus de geometria de Petrus de Dacia. G. Eneström. Biblioth. math. 1885, 94. — B. Boncompagni ibid. 196.
459. Die Erfindung des Baculus Geometricus. S. Günther. Biblioth. math. 1885, 137.
460. Di tre manoscritti del Maurolicio che si trovano nella Biblioteca Vittorio Emanuele di Roma. L. de Marchi. Biblioth. math. 1885, 141, 193.
461. Sur un cas singulier de déformation des images dans les lunettes. Govi. Compt. Rend. XCIX, 479.
462. Sur les manuscrits de mathématiques de la Collection Libri — Ashburnham achetée par le gouvernement Italien. A. Favaro. Biblioth. math. 1885, 44.
463. Sur un traité de perspective publié par Desargues en 1636. G. Eneström. Biblioth. math. 1885, 89.
464. Sur l'origine du symbole x employé comme signe d'une quantité inconnue. G. Eneström. Biblioth. math. 1885. 41.
465. Une lettre de Méchain. J. Lefort. Compt. Rend. XCVIII, 607.
466. Sur les premières tables de logarithmes publiées en Suède. G. Eneström. Biblioth. math. 1884, 121.
467. Sur les versions latines des éléments d'Euclide publiées en Suède. G. Eneström. Biblioth. math. 1884, 79.
468. Sur les écrits mathématiques d'auteurs étrangers publiés en Suède ou traduits en suédois. G. Eneström. Biblioth. math. 1885, 46, 92.
469. Sur l'exposition et l'envoi aux Enfants-Trouvés de Jean Le Rond d'Alembert. L. Lallemand. Compt. Rend. C, 1443.
470. Sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718. G. Eneström. Biblioth. math. 1884, 15.
471. Sur un théorème de Kant relatif à la mécanique céleste. Faye. Compt. Rend. XCVIII, 948.
472. Sur l'origine du monde. Faye. Compt. Rend. XCIX, 515.
473. Sur une lettre de Gauss à Olbers. Govi. Compt. Rend. XCIX, 507.
474. Sur la machine analytique de Charles Babbage. L. F. Menabrea. Compt. Rend. XCIX, 179. — L. Lalanne ibid. 267.
475. Inauguration du monument de Fresnel. Jamin. Compt. Rend. XCIX, 451.

476. Sur un écrit de Condorcet intitulé Essais d'analyse. G. Eneström. Biblioth. math. 1885, 191.
477. Ferd. Schwein's discoveries in the theory of determinants. Th. Muir. Phil. Mag. Ser. 5, XVIII, 416.
478. Décès de J. A. Serret. Bouley. Compt. Rend. C, 673. — Jordan ibid. 674. — Ossian Bonnet ibid. 677. — Faye ibid. 680. — Renan ibid. 681.
479. Obsèques de M. Rolland. Phillips. Compt. Rend. C, 947. — Schloesing ibid. 950.
480. Obsèques de M. Desains. Fizeau. Compt. Rend. C, 1257. – Troost ibid. 1259. — Mézières ibid. 1264.
481. Obsèques de M. Tresca. M. Lévy. Compt. Rend. C, 1610. — Haton de la Goupillière ibid. 1614.
482. Nekrolog von Ludwig Scheeffer (1859—1885). G. Cantor. Biblioth. math. 1885, 197.

Vergl. Chronologie. Gleichungen 500. Graphisches Rechnen. Hydrodynamik 519. Zahlentheorie 716.

Gleichungen.

483. Entwickelung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in Summen von rationalen Functionen der Coefficienten. C. Runge. Acta math. VI, 305.
484. Ueber die Factorenzerlegung der Discriminanten algebraischer Gleichungen. E. Netto. Math. Annal. XXIV, 579.
485. Sur les polynômes de Jacobi. Stieltjes. Compt. Rend. C, 620.
486. Sur le théorème de M. Brioschi, relatif aux fonctions symétriques. Sylvester. Compt. Rend. XCVIII, 858.
487. Sur les fonctions symétriques des différences des racines d'une équation. J. Tannery. Compt. Rend. XCVIII, 1420.
488. Sur les équations algébriques. Berloty. Compt. Rend. XCIX, 745.
489. Sur les équations algébriques. De Jonquières. Compt. Rend. XCIX, 345, 469, 483.
490. Théorèmes concernant les polynômes algébriques complets; application à la règle des signes de Descartes. De Jonquières. Compt. Rend. XCIX, 1143.
491. Sur les équations algébriques; observations au sujet d'une communication de M. de Jonquières. L. Lalanne. Compt. Rend. XCIX, 463.
492. Sur une extension de la loi de Harriot. Sylvester. Compt. Rend. XCVIII, 1026.
493. Abaissement des limites fournies par la règle des signes de Descartes. D. André. Compt. Rend. XCVIII, 212, 292, 561. XCIX, 182.
494. Sur la règle de Newton pour trouver le nombre des racines imaginaires des équations algébriques numériqurs. De Jonquières. Compt. Rend. XCIX, 62, 111, 165, 269.
495. Sur une équation du degré m qui n'a jamais plus de deux racines réelles. D. André. Compt. Rend. XCVIII, 417. — Sylvester ibid. 550.
496. Sur le genre de quelques fonctions entières. Laguerre. Compt. Rend. XCVIII, 79.
497. Bemerkungen über Gleichungsauflösungen. Th. Sanio. Grun. Archiv 2. R. II, 332.
498. Ueber eine die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades umfassende Auflösungsmethode. H. am Ende. Grun. Archiv 2. R. III, 103.
499. Zur Theorie der cubischen Gleichungen. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. III, 92.
500. Bemerkung zur Descartes'schen Auflösung der biquadratischen Gleichung. C. Weltzien. Grun. Archiv 2. R. III, 107.
501. Ueber die auflösbaren Gleichungen von der Form $x^5+ux+v=0$. C. Runge. Acta math. VII, 173.
502. Ueber Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. P. Gordan. Math. Annal. XXV, 459. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 435.]
503. Sur la correspondance entre deux espèces différentes de fonctions de deux systèmes de quantités, corrélatifs et également nombreux. Sylvester. Compt. Rend. XCVIII, 779.
504. Sur les équations monothétiques. Sylvester. Compt. Rend. XCIX, 13.
505. Sur l'équation en matrices $px=xq$. Sylvester. Compt. Rend. XCIX, 67, 115.
506. Sur la résolution générale de l'équation linéaire en matrices d'un ordre quelconque. Sylvester. Compt. Rend. XCIX, 409, 432.
507. Sur l'équation linéaire trinôme en matrices d'un ordre quelconque. Sylvester. Compt. Rend. XCIX, 527.
508. Sur la théorie des matrices. Ed. Weyr. Compt. Rend. C, 787, 966.

509. Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen. M. Noether. Math. Annal. XXIII, 311.
510. Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination. J. Molk. Acta math. VI, 1.
511. Zur Theorie der Elimination. E. Netto. Acta math. VI, 101.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 267. Determinanten 319. Geschichte der Mathematik 464. Quaternionen. Reihen 675.

Gnomonik.

512. Zur Theorie der Verticalsonnenuhr. L. Fodor-Mayerhoffer. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 173.

Graphisches Rechnen.

513. Sur un point de l'historie des méthodes graphiques. L. Lalanne.. Compt. Rend. XCVIII, 1466.

H.

Hydrodynamik.

514. On a point in the theory of pendent drops. A. M. Worthington. Phil. Mag. Ser. 5, XIX, 46.
515. Théorème nouveau sur la dynamique de fluides. F. Fournier. Compt. Rend. C, 47.
516. On the ellipticity of planets. L. d'Auria. Phil. Mag. Ser. 5. XVIII, 229.
517. Sur la théorie de la figure des planètes. O. Callandreau. Compt. Rend. XCIX, 1060. C, 37, 163, 1204.
518. Sur l'équilibre d'une masse fluïde animée d'un mouvement de rotation. H. Poincaré. Compt. Rend. C, 346, 1068. Acta math. VII, 259.
519. Sur l'équilibre d'un segment homogène de paraboloïde de révolution flottant sur un liquide. Em. Barbier. Compt. Rend. XCIX, 703.
520. Sur la résistance qu'oppose un liquide indéfini au mouvement d'un corps immergé. J. Boussinesq. Compt. Rend. C, 935, 974.
Vergl. Astronomie 294. Capillarität.

I.

Interpolation.

521. Sur des formules trigonométriques d'interpolation. G. Fouret. Compt. Rend. XCIX, 963, 1011, 1062.
522. Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales. A. Markoff. Math. Annal. XXV, 427.

Invariantentheorie.

523. Ueber das Verschwinden der harmonischen Invariante zweier quadratischer Formen von beliebig vielen Veränderlichen. J. Rosanes. Math. Annal. XXIII, 412.
524. Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques. C. Segre. Math. Annal. XXIV, 152.
525. Ueber die Darstellung binärer Formen und ihrer Covarianten durch geometrische Gebilde im Raum. F. Lindemann. Math. Annal. XXIII, 111.
526. Ueber Differentialinvarianten. S. Lie. Math. Annal. XXIV, 537.
527. On Contrariants, a new species of invariants. J. J. Sylvester. Phil. Mag. Ser. 5, XVIII, 374.
Vergl. Geometrie (höhere) 446. Kegelschnitte 532.

K.

Kegelschnitte.

528. Neue Construction von Kegelschnittslinien aus zwei conjugirten Durchmessern. Fr. Schiffner. Grun. Archiv 2. R. III, 108.
529. Die Construction des Krümmungsmittelpunktes bei Kegelschnitten. C. Schirek. Grun. Archiv 2. R. III, 318.
530. Wann stehen die von einem Punkte an eine Kegelschnittlinie gezogenen zwei Tangenten auf einander senkrecht? Fr. Schiffner. Grun. Archiv 2. R. II, 442.
531. Zur Theorie der Kegelschnitte. Fr. Schiffner. Grun. Archiv 2. R. III, 223.
532. Ueber Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades umschrieben sind. A. Voss. Math. Annal. XXV, 39.

533. Ueber Kegelschnitte, die einem Dreiecke einbeschrieben sind. B. Sporer. Grun. Archiv 2. R. II, 437.
534. Mehrfach collineare Dreiecke bei Kegelschnitten. J. Valyi. Grun. Archiv 2. R. II, 320.
Vergl. Kreis.

Kettenbrüche.

535. Sur la convergence d'une fraction continue algébrique. Halphen. Compt. Rend. C, 1451.
536. Sur la réduction en fraction continue d'une fraction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels. Laguerre. Compt. Rend. XCVIII, 209.
537. Sur un développement en fraction continue. Stieltjes. Compt. Rend. XCIX, 508.
538. Sur une généralisation des fractions continues. H. Poincaré. Compt. Rend. XCIX, 1014.

Kinematik.

539. Représentation plane relative aux déplacements d'une figure de forme invariable assujettie à quatre conditions. A. Mannheim. Compt. Rend. C, 268.
540. Sur le roulement des surfaces. H. Resal. Compt. Rend. C, 260.

Kreis.

541. Ueber drei geometrische Kreisörter. K. Zelbr. Grun. Archiv 2. R. II, 324.
542. Zwei Kreissätze. Ad. Beyssell. Grun. Archiv 2. R. III, 335.

Kugelfunctionen.

543. Sur des développements qui se rapportent à la distance de deux points et sur quelques propriétés des fonctions sphériques. O. Callendreau. Compt. Rend. XCIX, 23.
Vergl. Functionen 394.

L.

Lemniscate.

544. Ueber die Lemniscate. P. H. Schoute. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 1252.

Logikcalcül.

545. The logical spectrum. A. Macfarlane. Phil. Mag. Ser. 5, XIX, 286.

M.

Magnetismus.

546. On a determination of the horizontal component of the earth's magnetisme at Oxford. R. H. M. Bosanquet. Phil. Mag. Ser. 5, XVII, 438.
Vergl. Wärmelehre 702.

Mannigfaltigkeiten.

547. Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. G. Cantor. Math. Annal. XXIII, 453. [Vergl. Bd. XXIX. Nr. 305.]
548. Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem $n$fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. G. Cantor. Acta math. VII, 105.
549. Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth. O. Stolz. Math. Annal. XXIII, 152.
550. Ueber die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige. Ax. Harnack. Math. Annal. XXIII, 285.
551. Ueber den Inhalt von Punktmengen. Ax. Harnack. Math. Annal. XXV, 241.

Maxima und Minima.

552. Eine Gruppe planimetrischer Maxima und Minima. J. Lange. Grun. Archiv 2. R. II, 430.
553. Sur quelques théorèmes d'algèbre. Stieltjes. Compt. Rend. C, 439.

Mechanik.

554. Sur l'erpolodie de Poinsot. De Sparre. Compt. Rend. XCIX, 906. — A. Mannheim ibid. C, 938, 963. — A. de Saint Germain ibid. 1126. — G. Darboux ibid. 1555, 1576. — J. N. Franke ibid. 1573. Vergl. Nr. 16.
555. Sull'equilibrio dei poligoni articolati in connessione col problema delle configurazioni. G. Jung. Annali mat. Ser. 2, XII, 169.
556. Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik. A. Voss. Math. Annal. XXV, 258.

557. Sur la principe de la moindre action. G. Sabinine. Annali mat. Ser. 2, XII, 237.
558. Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hilfe Grassmann'scher Methoden. R. Mehmke. Math. Annal. XXIII, 143.
559. Sur les effets des forces mutuelles. P. Berthot. Compt. Rend. XCVIII, 1570. C, 1070. — De Saint Venaut ibid. XCIX, 5.
560. Sulla teoria dei moti relativi. E. Padova. Annali mat. Ser. 2, XII, 265.
561. Ueber einige neue Formen der Integrale des Zwei- und Dreikörperproblems. A. Seydler. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 851.
562. Sur un théorème de Mr. A Lindstedt concernant le problème des trois corps. F. Tisserand. Compt. Rend. XCVIII, 1207.
563. Bewegung eines senkrecht emporgeworfenen Körpers. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. II, 274.
564. Ueber die Gravitation. A. Jarolinek. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 897. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 819.]
565. Ueber den Mechanismus der Fernwirkung elektrischer Kräfte. J. Odstrčil. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 1212.
566. Ueber den Mechanismus der Gravitation und des Beharrungsvermögens. J. Odstrčil. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 485.
567. Calcul de l'arc de contact d'une bande métallique flexible enroulée suivant certaines conditions données, mais quelconques, sur un cylindre circulaire. H. Léauté. Compt. Rend. XCVIII, 41.
568. Relation entre la puissance et la résistance appliquées aux deux points d'attache d'un frain à lame, lorsqu'on tient compte de l'élasticité de la lame. H. Léanté. Compt. Rend. XCVIII, 219.
569. Sur la position à attribuer à la fibre moyenne dans les pièces courbes. H. Léauté. Compt. Rend. XCVIII, 1483.
570. Sur la concordance de quelques méthodes générales pour déterminer les tensions dans un système de points réunis par des liens élastiques et sollicités par des forces extérieures en équilibre. L. F. Menabrea. Compt. Rend. XCVIII, 714.
571. Étude sur les déformations géométriques, déterminées par l'écrasement d'un cylindre entre deux plans. Tresca. Compt. Rend. XCIX, 104.
572. Sur les escillations à longues périodes dans les machines actionnées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations. H. Léauté. Compt. Rend. C, 154. — Phillips ibid. 726.
573. Ueber die Grenze der Stabilität eines longitudinal comprimirten geraden elastischen Stabes. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. II, 108.
574. Sur la poussée d'une masse de sable, à surface supérieure horizontale, contre une paroi verticale ou inclinée. J. Boussinesq. Compt. Rend. XCVIII, 667, 720, 790.
575. Sur le principe du prisme de plus grande poussée, posé par Coulomb dans la théorie de l'équilibre-limite des terres. J. Boussinesq. Compt. Rend. XCVIII, 901, 975.
576. Sur une évaluation, ou exacte ou d'une très grande approximation, de la poussée des terres sablonneuses contre un mur destiné à les soutenir. De Saint Venant. Compt. Rend. XCVIII, 850.
577. Formules simples et très approchées de la poussée des terres, pour les besoins de la pratique. Flamant. Compt. Rend. XCIX, 1151.
578. Les pôles du gyroscope et des solides de révolution. Henry. Compt. Rend. C, 627.
579. Conditions d'un élément hélicoïdal pour l'effet utile maximum d'un propulseur. Ch. Hauvel. Compt. Rend. XCIX, 755.
580. Sur la loi des densités à l'intérieur de la terre. R. Radau. Compt. Rend. C, 972.

Vergl. Aerodynamik. Astronomie. Capillarität. Elasticität. Elektricität. Hydrodynamik. Kugelfunctionen. Magnetismus. Molekularphysik. Optik. Pendel. Potential. Schwerpunkt. Variationsrechnung 694. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

581. Regelmässiger linear begrenzter Winkel von vier Dimensionen. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. III, 111.
582. Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper im Raume von vier Dimensionen nebst einem allgemeinen Satz aus der Substitutionstheorie. A. Puchta. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 806.

583. Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper in Räumen von beliebiger Dimension. A. Puchta. Wien. Akad. Ber. XC, 168.
584. Ueber die regelmässigen Körper höherer Dimensionen. O. Biermann. Wien. Akad. Ber. XC, 144.
585. Der Cylinder in homogenen Räumen. C. Quensen. Grun. Archiv 2. R. III, 45.
586. Erweiterung einiger Sätze der Flächentheorie auf n Dimensionen. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. III, 277.

Vergl. Oberflächen 610.

Meteorologie.

587. Sur les mesures en astronomie. A. d'Abbadie. Compt. Rend. XCIX, 359.

Molekularphysik.

588. Ueber das Arbeitsquantum, welches bei chemischen Verbindungen gewonnen werden kann. L. Boltzmann. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 861.
589. Sur un énoncé général des lois des équilibres chimiques. H. Le Chatelier. Compt. Rend. XCIX, 786.
590. Sur les lois de la dissolution. H. Le Chatelier. Compt. Rend. C, 50, 441.
591. Théorie générale de la dissociation. Isambert. Compt. Rend. XCVIII, 805.
592. On the chemical combination of gases. J. J. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XVIII, 233.
593. Sur les mouvements atomiques et moléculaires. M. Langlois. Compt. Rend. XCIX, 780.

N.

Nautik.

594. Sur la comparaison des navires au point de vue propulsif. A. Ledieu. Compt. Rend. C, 837.
595. Influence du roulis sur les observations faites à la mer avec le cercle à niveau de mercure de Mr. Renouf. O. Callandreau. Compt. Rend. C, 1284.
596. On a speed-indicator for ships' propellors Arch. Campbell & W. T. Goolden. Phil. Mag. Ser. 5, XVIII, 57.

O.

Oberflächen.

597. Sur le degré des surfaces osculatrices. De Jonquières. Compt. Rend. XCVIII, 1025.
598. Sur un appareil destiné à contrôler la courbure des surfaces et la réfraction des lentilles. L. Laurent. Compt. Rend. C, 903.
599. Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali che contengono un sistema di elicoidi aventi a comune l'asse ed il passo. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 2, XIII, 39.
600. Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 2, XIII, 177
601. Das Verhalten der Hesse'schen Fläche in den vielfachen Punkten und vielfachen Curven einer gegebenen Fläche. K. Rohn. Math. Annal. XXIII, 82.
602. Sur les types canoniques des formes quadratiques ternaires des différentielles à discriminant nul; application à la théorie des surfaces. G. Koenigs. Compt. Rend. C, 789, 847.
603. Sur les groupes de points en involution marqués sur une surface. Le Paige. Compt. Rend. XCIX, 537.
604. Die Cono-Cunei. C. Pabst. Grun. Archiv 2. R. II, 281, 337.
605. Ueber die 27 Geraden der cubischen Fläche. Rud. Sturm. Math. Annal. XXIII, 289, 599.
606. Contribuzione alla teoria delle 27 retta e dei 45 piani tritangenti di una superficie di 3° ordine. E. Bertini. Annali mat. Ser. 2, XII, 301.
607. Sur les surfaces du troisième ordre. C. Le Paige. Compt. Rend. XCVIII, 971.
608. Beweis, dass auf einer algebraischen Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden ausser dieser nicht mehr als 16 Gerade liegen können. A. Leman. Grun. Archiv 2. R. II, 223.
609. Ueber die Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkte. K. Rohn. Math. Annal. XXIV, 55.
610. Étude des différentes surfaces du 4. ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions. C. Segre. Math. Annal. XXIV, 313.
611. Ueber Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte. K. Bobek. Wien. Akad. Ber. XC, 923, 1168.

612. Sulla superficie del quarto ordine avente una conica doppia. L. Berzolari. Annali mat. Ser. 2, XIII, 81.
613. Die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Functionen. P. R. Domsch. Grun. Archiv 2. R. II, 193, 225.
614. Die Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl sie bestimmender Punkte. G. v. Escherich. Wien. Akad. Ber. XC, 1036.
615. Sur quelques propriétés générales des surfaces algébriques de degré quelconque. M. d'Ocagne. Compt. Rend. XCIX, 744.
616. Ueber die Construction der Flächen n^{ter} Ordnung. Fr. Schur. Math. Annal. XXIII, 437.
617. Ueber Variation von Geraden, die an eine Fläche geknüpft sind. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. III, 290.
618. Section faite dans une surface développable par un de ses plans tangents. Jamet. Compt. Rend. C, 1332. — Darboux ibid. 1335.
619. Sur les surfaces à pente uniforme et les réseaux proportionnels. L. Lecornu. Compt. Rend. XCVIII, 972.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 268. Bestimmte Integrale 302. Cubatur. Elektricität 368. Kinematik 540. Optik 633, 634.

Oberflächen zweiten Grades.

620. Ueber Flächen zweiten Grades, welche zu sich selbst polar sind. R. Sturm. Math. Annal. XXV, 236.
621. Sur une extension des théorèmes de Pascal et de Brianchon aux surfaces du second ordre. A. Petot. Compt. Rend. XCVIII, 726.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 276, 277, 278. Cubatur 316. Kegelschnitte 532.

Optik.

622. Der Winkelspiegel. L. Mack. Grun. Archiv 2. R. II, 1. — K. Mack ibid. 220.
623. Geometrical methods in the theory of refraction at one or more spherical surfaces. J. Loudon. Phil. Mag. Ser. 5. XVIII, 485.
624. Théorèmes relatifs à l'actinométrie des plaques mobiles. Haton de la Goupillière. Compt. Rend. C, 953.
625. Beweis der Giltigkeit des Fermat'schen Satzes für die Lichtbewegung in doppeltbrechenden Medien. H. Pitsch. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 459.
626. Ueber die Brechung des Lichts in crystallinischen Mitteln. Soph. Kowalevski. Acta math. VI, 249.
627. Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé. Soph. Kowalevski. Compt. Rend. XCVIII, 356.
628. Ueber den Gang der Lichtstrahlen durch Glasröhren, die mit Flüssigkeit gefüllt sind, und eine darauf sich gründende Methode, den Brechungsexponenten condensirter Gase zu bestimmen. J. Dechant. Wien. Akad. Ber. XC, 539.
629. Ueber die durch zahlreiche, unregelmässig vertheilte Körperchen hervorgebrachten Beugungserscheinungen. C. Exner. Wien. Akad. Ber. XC, 827.
630. On the amonnt of the atmospheric absorption. S. P. Langley. Phil. Mag. Ser. 5, XVIII, 289.
631. Détermination des indices de réfraction par des mesures linéaires. Ch. V. Zenger. Compt. Rend. XCIX, 377.
632. On the propagation of an arbitrary electro-magnetic disturbance, on spherical waves of light and the dynamical theory of diffraction.. Rowland. Phil. Mag. Ser. 5, XVII, 413.
633. Die Deformation der Lichtwellenfläche im magnetischen Felde. E. v. Fleischl. Wien. Akad Ber. XC, 1151.
634. Sur la forme de la surface de l'onde lumineuse dans un milieu isotrope placé dans un champ magnétique uniforme: existence probable d'une double réfraction particulière dans une direction normale aux lignes de force. A. Cornu. Compt. Rend. XCIX, 1045.

Vergl. Geschichte der Mathematik 461, 475. Oberflächen 598.

P.

Pendel.

635. Influence de l'attraction luni-solaire sur la marche des pendules. A. Gaillot. Compt. Rend. XCVIII, 893.
636. Sur le mouvement d'un corps grave, de révolution, suspendu par un point de son axe. Halphen. Compt. Rend. C, 1065.

Planimetrie.

637. The uses of a line-divider. Sarah Marks. Phil. Mag. Ser. 5, XIX, 280.
638. Der Feuerbach'sche Satz. J. Lange. Grun. Archiv 2. R. II, 329.
639. Das Sehnen-Tangentenviereck. J. Schumacher. Grun. Archiv 2. R. II, 383.
Vergl. Maxima und Minima 552.

Potential.

640. La Laplace's equation. John H. Jellett. Phil. Mag. Ser. 5, XVIII, 400.
641. On the identity of energy. Ol. J. Lodge. Phil. Mag. Ser. 5, XIX, 482.
642. Potential einer elliptischen Walze. U. Bigler. Grun. Archiv 2. R. III, 337.
643. Sur la distribution du potentiel dans des masses liquides limitées par des faces planes. Appell. Compt. Rend. XCVIII, 214.
644. Sur la distribution du potentiel dans une masse liquide ayant la forme d'un prisme rectangulaire indéfini. Appell & Chervet. Compt. Rend. XCVIII, 358.
645. Distribution du potentiel dans une plaque rectangulaire, traversée par un courant électrique dont le régime est permanent. A. Chervet. Compt. Rend. XCVIII, 795. XCIX, 78.
646. Sur un dispositif qui permet d'obtenir sans calcul le potentiel magnétique dû à un système de bobines. G. Lippmann. Compt. Rend. C, 1533.
647. Sur le potentiel thermodynamique et la théorie de la pile voltaïque. P. Duhem. Compt. Rend. XCIX, 1113.
Vergl. Differentialgleichungen 347.

Q.

Quadratur.

648. Zur Simpson'schen Methode der mechanischen Quadratur. Fr. Hočevar. Wien. Akad. Ber. XC, 908.
649. Archimedische Kreisquadratur. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. II, 447.
Vergl. Bestimmte Integrale 304.

Quaternionen.

650. Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton. J. J. Sylvester. Compt. Rend. XCVIII, 273, 471. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 845.]
651. Sur la solution d'une classe très etendue d'équations en quaternions. Sylvester. Compt. Rend. XCVIII, 651.
652. Sur la solution du cas le plus général des équations linéaires en quantités binaires, c'est à dire en quaternions ou en matrices du second ordre. Sylvester. Compt. Rend. XCIX, 117.
653. Sur les deux méthodes, celle de Hamilton et celle de l'auteur, pour résoudre l'équation linéaire en quaternions. Sylvester. Compt. Rend. XCIX, 473.
654. Sur l'achèvement de la nouvelle méthode pour résoudre l'équation linéaire la plus générale en quaternions. Sylvester. Compt. Rend. XCIX, 502.
655. Sur la solution explicite de l'équation quadratique de Hamilton en quaternions ou en matrices du second ordre. Sylvester. Compt. Rend. XCIX, 555.
656. Sur les conditions de l'existence de racines égales dans l'équation du second degré de Hamilton et sur une méthode générale pour résoudre une équation unilatérale de n'importe quel degré en matrices d'un ordre quelconque. Sylvester. Compt. Rend. XCIX, 621.
657. On the solution of a class of equations in quaternions. J. J. Sylvester. Phil. Mag. Ser. 5, XVII, 392.
658. On Hamilton's quadratic equation and the general unilateral equation in matrices. J. J. Sylvester. Phil. Mag. Ser. 5, XVIII, 454.
659. Sur la théorie de quaternions. Ed. Weyr. Compt. Rend. XCVIII, 906, 1320.
660. Sur les nombres complexes. H. Poincaré. Compt. Rend. XCIX, 740.

R.

Rectification.

661. Ueber den Begriff der Länge einer Curve. P. de Bois-Reymond. Acta math. VI, 186. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 613.]
662. Construction einer näherungsweisen Rectification eines Kreises. M. F. Bretschneider. Grun. Archiv 2. R. III, 447.

Reihen.

663. Zur Convergenz der Reihen. A. Börsch. Grun. Archiv 2. R. II, 445.
664. Ueber die Bedingungen der Giltigkeit der Taylor'schen Reihe. Jul. König. Math. Annal. XXIII, 450. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 415.]
665. Ueber das Verhalten gewisser Potenzreihen auf dem Convergenzkreise. A. Pringsheim. Math. Annal. XXV, 419.
666. Ueber eine Eigenschaft der Potenzreihen. Jul. König. Math. Annal. XXIII, 447.
667. Ueber Multiplication bedingt convergenter Reihen. A. Voss. Math. Annal. XXIV, 42.
668. Ueber unendliche Doppelreihen. O. Stolz. Math. Annal XXIV, 157.
669. Beitrag zur Auswerthung unendlicher Producte und Reihen. R. Mildner. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 591.
670. Sur une notation propre à représenter certains développement. R. Radau. Compt. Rend. XCVIII, 38.
671. Forme générale du reste dans l'expression d'une fonction au moyen d'autres fonctions. Ch. Lagrange. Compt. Rend. XCVIII, 1422.
672. Ueber die Darstellung willkürlicher Functionen. C. Runge. Acta math. VII, 387.
673. Zur Theorie der trigonometrischen Reihen. O. Hölder. Math. Annal. XXIV, 181.
674. Sur une série analogue à celle de Lagrange. Amigues. Compt. Rend. XCIX, 1149.
675. Zum Lagrange'schen Reversionstheorem und Anwendung auf die Lösung der Keppler'schen Gleichung. E. Weiss. Wien. Akad Ber. XC, 785.
676. Sur l'inversion de certaines séries. E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XIII, 339.
677. Applications of Möbius' Theorem on the reversion of certain series. J. W. L. Glaisher. Phil. Mag. Ser. 5, XVIII, 518.

Vergl. Functionen 394, 400. Geschichte der Mathematik 470. Gleichungen 483. Kugelfunctionen.

S.

Schwerpunkt.

678. Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier Curven. B. Sporer. Grun. Archiv 2. R. III, 84.

Sphärik.

679. Ueber die nur bedingte Richtigkeit eines Satzes von Craig. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. II, 103.

T.

Tetraeder.

680. Ueber einige Eigenschaften des Tetraeders. H. Gellenthin. Grun. Archiv 2. R. III, 52.
681. Zur Lehre vom perspectiven Tetraeder. J. Valyi. Grun. Archiv 2. R. III, 441.

Thetafunctionen.

682. Zur Transformation der Thetafunctionen. F. Rohde. Grun. Archiv 2. R. III, 138.
683. Zur Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen. M. Krause. Math. Annal. XXV, 319.
684. Zur Transformation der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. M. Krause. Math. Annal. XXV, 323.
685. Ueber die Parameterdarstellungen der Verhältnisse der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. O. Staude. Math. Annal. XXIV, 281.
686. Ueber die algebraischen Charakteristiken der hyperelliptischen Thetafunctionen. O. Staude. Math. Annal. XXV, 363.
687. Anwendung der Thetafunctionen auf geodätische Strecken und Winkel. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. III, 75.

Trigonometrie.

688. Trigonometrische Sätze. A. H. Anglin. Grun. Archiv 2. R. II, 407.
689. Einige Sätze, die sich auf reguläre Polygone beziehen, und daraus sich ergebende trigonometrische Relationen. B. Sporer. Grun. Archiv 2. R. III, 217.

Vergl. Sphärik.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

690. Sur un cas de réduction des integrales hyperelliptiqnes du second genre. E. Goursat. Compt. Rend. C, 622.
691. Les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques d'ordre *n*. Brioschi. Compt. Rend. XCIX, 889, 951, 1050.
692. Zur Reduction hyperelliptischer Integrale. L. Kotányi. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 401.

Vergl. Oberflächen 613.

V.

Variationsrechnung.

693. Die Maxima und Minima der einfachen Integrale zwischen festen Grenzen. L. Scheeffer. Math. Annal. XXV, 522, 594.
694. Sur la réduction du problème des brachistochrones aux équations canoniques. Andoyer. Compt. Rend. C, 1577.

W.

Wärmelehre.

695. Ueber die Eigenschaften monocyclischer und anderer damit verwandter Systeme. L. Boltzmann. Wien. Akad. Ber. XC, 231.
696. Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie und das Verhalten des Wassers. C. Puschl. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 631.
697. Der Werth der Integrale A_1 und A_2 der Maxwell'schen Gastheorie unter Zugrundelegung eines Kraftgesetzes $-\frac{k}{r^5}$. P. Czermak. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 723.
698. Ueber die Möglichkeit der Begründung einer kinetischen Gastheorie auf anziehende Kräfte allein. L Boltzmann. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 714.
699. Zur Theorie der Gasdiffusion. L. Boltzmann. Wien. Akad. Ber. LXXXVIII, 835.
700. Sur les lois de l'évaporation. Houdaille. Compt. Rend. C, 170.
701. Sur l'application des procédés d'Ingenhouz et de De Senarmont à la mesure des conductibilités thermiques. Ed. Jannettaz. Compt. Rend. XCIX, 1019.
702. Ueber die beim Magnetisiren erzeugte Wärme. A. Wassmuth. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 104.
703. On a slight error in the customary specification of thermo-electric current-direction and a query with regard to a point in thermodynamics. Ol. J. Lodge. Phil. Mag. Ser. 5, XIX, 448.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

704. On the reduction of observations. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Ser. 5. XVII, 135. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 925, 926, 927.]
705. A priori probabilities. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Ser. 5, XVIII, 204.
706. On the failure of the attempt to deduce inductive principles from the mathematical theory of probabilities. Sophie Bryant. Phil. Mag. Ser. 5, XVII, 510.
707. Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. E. Czuber. Wien. Akad. Ber. XC, 719.
708. Sur la parallaxe solaire déduite d'épreuves daguerriennes; nouveau mode de discussion. Obrecht. Compt. Rend. C, 227, 341, 1121.

Vergl. Zahlentheorie 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726.

Z.

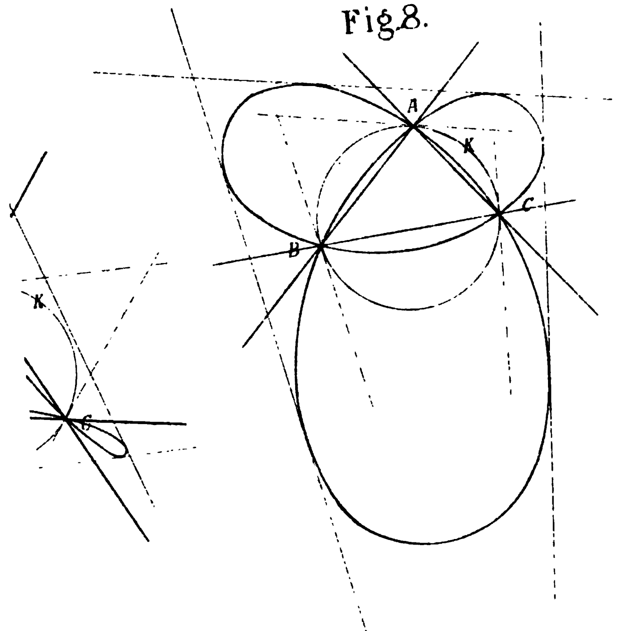
Zahlentheorie.

709. Additions au mémoire sur les unités complexes. L. Kronecker. Compt. Rend. XCIX, 765. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 475.]
710. Ueber einige zahlentheoretische Functionen. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. LXXXIX, 37, 841; XC, 395.
711. Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. XC, 1026.
712. Commentaire arithmétique sur une formule de Gauss. De Jonquières. Compt. Rend. XCVIII, 1358, 1515. — A. E. Pellet ibid. 1482.

713. Sur une loi générale de la théorie de la partition des nombres. N. Bougaieff. Compt. Rend. C, 1123, 1159.
714. Sur une généralisation de la théorie des réduites. Em. Barbier. Compt. Rend. XCVIII, 1531.
715. Déduction arithmétique d'une relation due à Jacobi. R. Lipschitz. Acta math. VII, 95.
716. Sur le dernier théorème de Fermat. De Jonquières. Compt. Rend. XCVIII, 863.
717. Eine Bemerkung über Divisorensummen. M. A. Stern. Acta math. VI, 327.
718. Sur les sommes des diviseurs des nombres. Lipschitz. Compt. Rend. C, 845.
719. Étude moyenne du plus grand commun diviseur de deux nombres E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XIII, 235.
720. Le plus grand diviseur carré. E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XIII, 251.
721. Eventualités de la division arithmétique. E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XIII, 269.
722. Sur le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres. E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XIII, 291.
723. Sur la distribution des quantités commensurables. E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XIII, 295.
724. Sur le rôle arithmétique de $\sin\frac{\pi x}{2}$. E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XIII, 315.
725. Sur la fonction $z-[z]$. E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XIII, 323.
726. Sur la fonction $\mathfrak{T}(x)$. E. Cesaro. Annali mat. Ser. 2, XIII, 329.
727. Ueber Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. A. Hurwitz. Math. Annal. XXV, 157. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 136.]
728. Sur les formes quadratiques quaternaires et sur les groupes hyperabéliens correspondants. E. Picard. Compt. Rend. XCVIII, 904.
729. Sur un théorème de Jacobi relatif à la décomposition d'un nombre en quatre carrés. M. Weill. Compt. Rend. XCIX, 859.
730. Sur la décomposition des nombres en cinq carrés. A. Hurwitz. Compt. Rend. XCVIII, 504. — Stieltjes ibid. 663. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 919.]
731. Sur l'équation indéterminée $x^2-Ky^2=z^n$. M. d'Ocagne. Compt. Rend. XCIX, 1112.
732. Ueber einige Fehler der Burckhardt'schen Factorentafeln. Meissel. Math. Annal. XXIII, 600; XXV, 251.
733. Zur Analyse sehr grosser Zahlen. P. Seelhoff. Grun. Arch. 2. R. II, 329. III, 325.
734. Ueber vollkommene Zahlen. P. Seelhoff. Grun. Arch. 2. R. II, 327.
735. Ueber die Grösse der Periode des Decimalbruchs gleich $1:p$, für p gleich einer der ersten 1500 Primzahlen. F. Kessler. Grun. Arch. 2. R. III, 99.

Vergl. Differentialquotienten. Formen. Functionen 403, 404. Geschichte der Mathematik 473. Gleichungen 510. Reihen 676.

Fig 8.



g. 9.

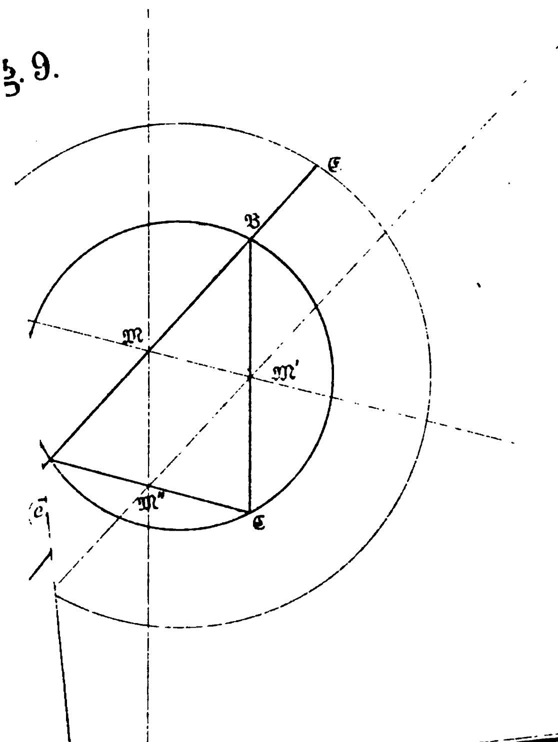


Fig. 4 b.

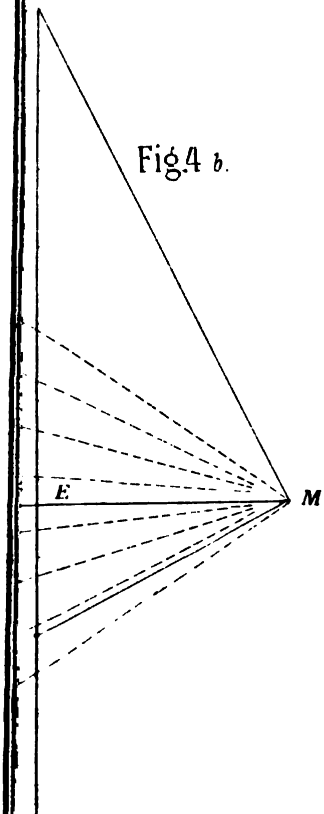


Fig. 4 c.

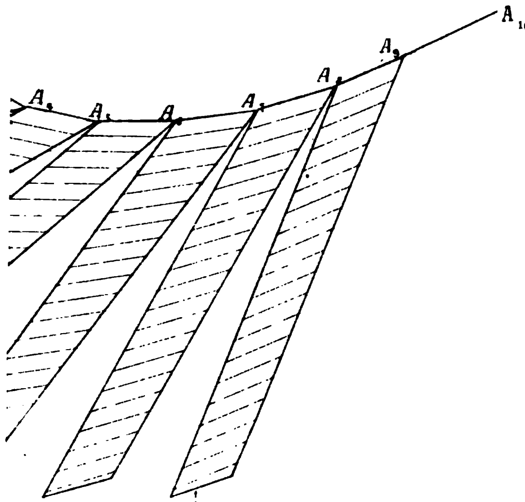
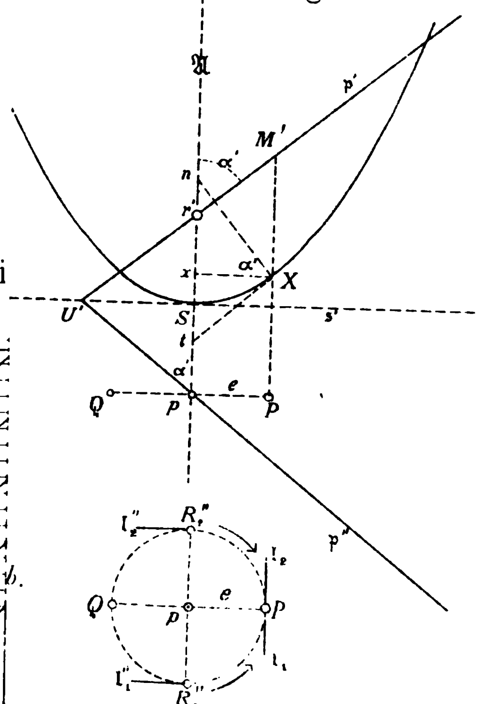
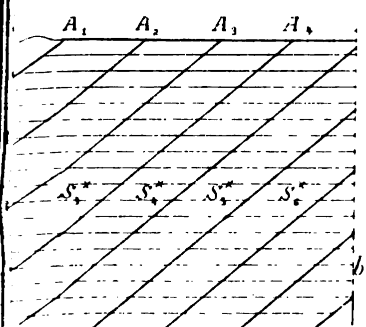


Fig. 5 a.



Fi



b.

INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.